ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Обобщенные гидродинамические уравнения в модели твердых сфер

В. И. Иноземцев[a], И. И. Масленников[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] nginozv@mail.ru, [b] ilyamaslennikov@mail.ru

Статья поступила 20.11.2012, подписана в печать 30.11.2012.

Рассмотрены обобщенные гидродинамические уравнения в модели твердых сфер на основе сформулированного Н. Н. Боголюбовым приближенного подхода к анализу коллективных взаимодействий. Показано, что обобщенная матрица коэффициентов переноса не является самосопряженной при учете конечных размеров области двухчастичного взаимодействия.

Ключевые слова: кинетические уравнения, уравнения гидродинамики, модель твердых сфер, коэффициенты переноса.

УДК: 533.7. PACS: 51.10.+y; 05.20.–y; 05.20.Dd.

Введение

Построение гидродинамических уравнений, позволяющих исследовать макроскопические характеристики неравновесных систем произвольной плотности — одна из важных задач статистической механики. Классический подход к решению проблемы, основанный на рассмотрении нелокальных кинетических уравнений, не учитывающий коллективных взаимодействий частиц в системе, приводит к расходящимся выражениям при попытках построения уравнений гидродинамики в рамках метода Чепмена–Энскога [1–4]. Дисперсионная зависимость скорости распространения гидродинамических возмущений от волнового вектора не является аналитической [5] вследствие нелокальных свойств исходных кинетических уравнений. Как показал Н. Н. Боголюбов [1], кинетические уравнения такого класса могут быть получены в рамках приближений, аналогичных используемым в теории плазмы, и отметил, что им соответствуют нелинейные нелокальные уравнения гидродинамики. В данной работе мы ограничимся анализом круга вопросов, связанных с построением линеаризованных нелокальных гидродинамических уравнений в модели твердых сфер. Ранее [6] было показано, что для модели твердых сфер оператор, определяющий скорость распространения гидродинамических возмущений, является неэрмитовым в соответствии с результатами [7]. Здесь на основе предложенного Н.Н. Боголюбовым метода мы рассмотрим свойства матрицы обобщенных коэффициентов переноса и исследуем ее особенности, возникающие при учете конечных размеров области взаимодействия.

1. Линеаризованное кинетическое уравнение в модели твердых сфер

Будем исходить, следуя [1, 5], из цепочки уравнений ББГКИ для функций распределения в модели твердых сфер в форме [8]

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\phi_0(1)\right]F_1(t;1)=n\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2\widehat{T}_{12}F_2(t;1,2),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\zeta_0(1,2)\right]F_2(t;1,2)= =n\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_3\left[\widehat{T}_{13}+\widehat{T}_{23}\right]F_3(t;1,2,3), \quad \ldots, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$; $\phi_0(1)=\boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}$; $\phi_0(i,j)=\phi_0(i)+\phi_0(j)$; n — плотность числа частиц;

$$\widehat{T}_{ij}=a^2\int\limits_{(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}[(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{\sigma}]\times \times\left[\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j-a\boldsymbol{\sigma})\widehat{b}_{\boldsymbol{\sigma}}-\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j+a\boldsymbol{\sigma})\right],$$

a — диаметр сферы; $\boldsymbol{\sigma}$ — единичный вектор; $\widehat{b}_{\boldsymbol{\sigma}}$ — оператор замены скоростей $\boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{v}_i$ на $\left[\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{\sigma}\right]$, $\left[\boldsymbol{v}_j+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{\sigma}\right]$ соответственно.

Используя фундаментальное условие ослабления корреляций [9], представим функции распределения в уравнениях (1) в виде

$$F_2(t;1,2)=F_1(t;1)F_1(t;2)+G_2(t;1,2);$$
$$F_3(t;1,2,3)=F_1(t;1)F_1(t;2)F_1(t;3)+ +\sum_{i\neq j\neq k}F_1(t;i)G_2(t;j,k)+G_3(t;1,2,3), \quad \ldots$$

Отметим, что обрыв цепочки (1) в предположении $G_2=0$ приводит к хорошо известному уравнению Больцмана–Энскога. Приближенное кинетическое уравнение для F_1, учитывающее коллективные взаимодействия, можно получить, согласно [1], при обрыве цепочки (1) посредством предположения $G_3=0$ и сохранения корреляционных функций G_2.

В дальнейшем будем предполагать, что состояние системы близко к равновесному, и представим функции F_1 и G_2 в форме

$$F_1=f_0(\boldsymbol{v}_1)(1+\Psi_1(t;1)); \quad G_2(t;1,2)=f_0(\boldsymbol{v}_1)f_0(\boldsymbol{v}_2)\Psi_2(t;1,2) \tag{2}$$

($f_0(\boldsymbol{v}_1)$ — нормированная максвелловская функция распределения), сохраняя в (1) лишь члены первого порядка по Ψ_1, Ψ_2. Таким образом, линейная система уравнений для Ψ_1, Ψ_2 имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\zeta_0(1)\right]\Psi_1 = \\ = n\int \mathrm{d}x_2 f_0(v_2)\widehat{T}_{12}(\Psi_1(1)+\Psi_1(2)+\Psi_2(t;1,2)); \\ \left[\frac{\partial}{\partial t}+\phi_0(1,2)-\widehat{T}_{12}\right]\Psi_2 = \\ = \widehat{T}_{12}[\Psi_1(1)+\Psi_1(2)]+n\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_3 f_0(\boldsymbol{v}_3)\times \\ \times\left[\widehat{T}_{13}(\Psi_2(1,2)+\Psi_2(2,3))+\widehat{T}_{23}(\Psi_2(1,2)+\Psi_2(1,3))\right]. \quad (3)$$

Из структуры уравнений (3) можно видеть, что после исключения Ψ_2 кинетическое уравнение для Ψ_1 будет иметь нелокальные свойства. В работе [4] было показано, что влияние начальных условий для корреляционной функции Ψ_2 на гидродинамические моменты функции распределения Ψ_1 оказывается несущественным; поэтому для наших целей удобно положить $\Psi_2(0;1,2)=0$. Таким образом, согласно соотношениям (3) найдем замкнутое уравнение для $\Psi_1(t;1)$:

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}+\widehat{S}\Psi_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) = n\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,f_0(\boldsymbol{v}')\widehat{T}_{12}\times \\ \times\int_0^t \mathrm{d}\boldsymbol{t}'\exp\left\{-\widehat{R}(t-t')\right\}\widehat{T}_{12}\left[\Psi_1(t';\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})+\Psi_1(t';\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v}')\right], \quad (4)$$

где введены обозначения:

$$\widehat{\Lambda}(\boldsymbol{v})\Psi(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) = a^2\int\limits_{(v'-v)\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0} f_0(\boldsymbol{v}')\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\left[(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times \\ \times\{\Psi(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}^*)+\Psi(t,\boldsymbol{r}-a\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v}'^*)-\Psi(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})-\Psi(t,\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v}')\}, \\ \boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma};\quad \boldsymbol{v}'^*=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}; \\ \widehat{S}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}-n\widehat{\Lambda}(\boldsymbol{v});\quad \widehat{R}=\widehat{S}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})+\widehat{S}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v}'). \quad (5)$$

Легко заметить, что уравнение (4) является нелокальным как по времени, так и по пространственным координатам, что соответствует учету коллективных взаимодействий [5].

2. Структура гидродинамических уравнений

Для анализа свойств кинетического уравнения (4) естественно представить Ψ_1 в виде

$$\Psi=\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,e^{i\boldsymbol{kr}}\Psi_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{v}). \quad (6)$$

Поскольку Ψ входит в уравнения (4) линейно, уравнение для $\Psi_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{v})$ также будет линейным. Принимая во внимание, что

$$\widehat{S}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})e^{i\boldsymbol{kr}}\Psi(\boldsymbol{v})=e^{i\boldsymbol{kr}}\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})\Psi(\boldsymbol{v}),$$

где $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})=i\boldsymbol{kv}-n\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$,

$$\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})\Psi(\boldsymbol{v}) = a^2\int\limits_{(v'-v)\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0} f_0(\boldsymbol{v}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times \\ \times\left\{\Psi(\boldsymbol{v}^*)+\Psi(\boldsymbol{v}'^*)e^{-i\boldsymbol{\kappa\sigma}}-\Psi(\boldsymbol{v})-\Psi(\boldsymbol{v}')e^{+i\boldsymbol{\kappa\sigma}}\right\}, \quad (7)$$

рассмотрим действие оператора $\widehat{T}_{12}$ на функции вида (6). Согласно (4), (6), имеем

$$\widehat{T}_{12}\left[e^{i\boldsymbol{kr}}\Psi(\boldsymbol{v})+e^{i\boldsymbol{kr}'}\Psi(\boldsymbol{v}')\right] = a^2\int\limits_{(v'-v)\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0}\left[(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times \\ \times\left\{\Psi(\boldsymbol{v}^*)e^{i\boldsymbol{kr}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-a\boldsymbol{\sigma})+\Psi(\boldsymbol{v}^{*\prime})e^{i\boldsymbol{kr}'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-a\boldsymbol{\sigma})-\right. \\ \left.-\Psi(\boldsymbol{v})e^{i\boldsymbol{kr}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'+a\boldsymbol{\sigma})-\Psi(\boldsymbol{v}')e^{i\boldsymbol{kr}'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'+a\boldsymbol{\sigma})\right\}. \quad (8)$$

Фурье-образ левой части (8) можно представить в форме

$$\widehat{T}_{12}\left[e^{i\boldsymbol{kr}}\Psi(\boldsymbol{v})+e^{i\boldsymbol{kr}'}\Psi(\boldsymbol{v}')\right]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{qr}}e^{i\boldsymbol{q}'\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}'F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'),$$

где

$$F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}') = a^2\int\limits_{(v'-v)\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0}\left[(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times \\ \times\left\{\Psi(\boldsymbol{v}^*)e^{i\boldsymbol{q}'a\boldsymbol{\sigma}}+\Psi(\boldsymbol{v}^{*\prime})e^{-i\boldsymbol{q}a\boldsymbol{\sigma}}-\Psi(\boldsymbol{v})e^{-i\boldsymbol{q}'a\boldsymbol{\sigma}}-\Psi(\boldsymbol{v}')e^{i\boldsymbol{q}a\boldsymbol{\sigma}}\right\}\times \\ \times\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'). \quad (9)$$

Согласно выражениям (4), (9), действие оператора $\widehat{R}$ допускает следующее представление:

$$\widehat{R}e^{i\boldsymbol{qr}}e^{i\boldsymbol{q}'\boldsymbol{r}'}Z(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')=e^{i\boldsymbol{qr}}e^{i\boldsymbol{q}'\boldsymbol{r}'}\left(\widehat{S}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})+S'_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}')\right)Z(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'),$$

и, таким образом,

$$e^{-\widehat{R}(t-t')}T_{12}\left[e^{i\boldsymbol{kr}}\Psi(\boldsymbol{v})+e^{i\boldsymbol{kr}'}\Psi(\boldsymbol{v}')\right]= \\ =\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}'\,e^{i\boldsymbol{kr}}e^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')e^{-\left(\widehat{S}_q(v^*)+\widehat{S}'_q(v')\right)(t-t')}\times \\ \times\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{qq}'}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi(\boldsymbol{v}), \quad (10)$$

где

$$\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{qq}'}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi(\boldsymbol{v}) = a^2\int\limits_{(v'-v)\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0}\left[(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\right]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times \\ \times\left\{\Psi(\boldsymbol{v}^*)e^{i\boldsymbol{q}'a\boldsymbol{\sigma}}+\Psi(\boldsymbol{v}^{*\prime})e^{-i\boldsymbol{q}a\boldsymbol{\sigma}}-\Psi(\boldsymbol{v})e^{-i\boldsymbol{q}'a\boldsymbol{\sigma}}-\Psi(\boldsymbol{v}')e^{i\boldsymbol{q}a\boldsymbol{\sigma}}\right\}. \quad (11)$$

С учетом соотношения (11) правая часть уравнения (4) может быть представлена в виде

$$na^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,f_0(\boldsymbol{v}')\int_0^t \mathrm{d}t'\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}'\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\times \\ \times e^{i\boldsymbol{qr}}e^{i\boldsymbol{q}'\boldsymbol{r}'}\left\{\Psi(\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{v}'^*)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-a\boldsymbol{\sigma})-\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'+a\boldsymbol{\sigma})\right\}. \quad (12)$$

Здесь

$$\Psi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')=e^{-\left(\widehat{S}_q(v)+\widehat{S}_{q'}(v')\right)(t-t')}\Lambda_{\boldsymbol{qq}'}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi(\boldsymbol{v}).$$

Выполняя в выражении (12) интегрирование по $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{q}'$ и сокращая обе части уравнения (4) на $e^{i\boldsymbol{kr}}$, найдем уравнение для функции $\Psi_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{v})$:

$$\frac{\partial\Psi_{\boldsymbol{k}}}{\partial t}+\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}\Psi_{\boldsymbol{k}}=\frac{n}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\widehat{T}_{\boldsymbol{q}}\int\limits_0^t \mathrm{d}t'\,e^{-\left(\widehat{S}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})+\widehat{S}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}')\right)(t-t')}\times$$
$$\times\,\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi_{\boldsymbol{k}}(t',\boldsymbol{v}),\quad (13)$$

где

$$\widehat{T}_{\boldsymbol{q}}Z(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')=a^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,f_0(\boldsymbol{v}')\int\limits_{(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0}\left[(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times$$
$$\times\left\{Z(\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{v}^{*\prime})e^{-iqa\boldsymbol{\sigma}}-Z(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')e^{iqa\boldsymbol{\sigma}}\right\}.\quad (14)$$

Зависимость от волнового вектора $\boldsymbol{k}$ в операторах $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}$, $\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}$ правой части (13) обусловливает нелокальный характер уравнения в координатном пространстве.

Для построения гидродинамических уравнений естественно применить метод проекционных операторов [10], позволяющий явным образом определить эволюцию гидродинамических моментов функций $\Psi_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{v})$. Представим $\Psi_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{v})$ в виде

$$\Psi_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{v})=\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}+\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}},\quad (15)$$

где $\widehat{p}$ — оператор проектирования на гидродинамическое подпространство, базисными векторами которого являются $1,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}^2$ в гильбертовом пространстве с нормой

$$\|\Psi(\boldsymbol{v})\|^2=\int|\Psi(\boldsymbol{v})|^2 f_0(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

а $P_\perp=1-P$. Представляя управление (13) в виде

$$\frac{\partial\Psi_{\boldsymbol{k}}}{\partial t}+\widehat{\mathrm{A}}\Psi_{\boldsymbol{k}}=0,\quad (16)$$

используя (15) и умножая (16) слева на $\widehat{P}$ и $\widehat{P}_\perp$ соответственно, получим систему уравнений для величин $\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}$ и $\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(P\Psi_{\boldsymbol{k}})+\left(\widehat{P}\widehat{\mathrm{A}}\widehat{P}\right)\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}\right)+\left(\widehat{P}\widehat{\mathrm{A}}\widehat{P}_\perp\right)\left(\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}\right)=0,\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}\right)+\left(\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}\widehat{P}_\perp\right)\left(\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}\right)+\left(\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}\widehat{P}\right)\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}\right)=0.\end{gathered}\quad (17)$$

Здесь мы воспользовались свойствами проекционных операторов $\widehat{P}^2=\widehat{P}$, $\widehat{P}_\perp^2=\widehat{P}_\perp$, $\widehat{P}\widehat{P}_\perp=0$. Решение системы двух линейных уравнений первого порядка зависит от функций $\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(0)$, в то время как гидродинамические уравнения должны определять состояние системы лишь по заданным пяти величинам $\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(0)$. Покажем, однако, что структура уравнений (14), (17) такова, что влияние начальных условий $\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(0)$ экспоненциально затухает со временем существенно быстрее, чем вклад величин $\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(0)$в области малых $|\boldsymbol{k}|$, для которой гидродинамические уравнения имеют смысл.

Действительно, согласно второму уравнению (17), вклад в $\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(t)$ от величин $\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(0)$ может быть представлен в виде

$$R\exp\left\{\int\limits_0^t\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}(t')\widehat{P}_\perp\,\mathrm{d}t'\right\}\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(0),\quad (18)$$

где R означает операцию упорядочивания по времени при интегрировании $\widehat{\mathrm{A}}(t')$. В дальнейшем будет показано, что оператор $\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}\widehat{P}_\perp$ допускает представление в виде

$$\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}\widehat{P}_\perp=-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{k}\widehat{\Omega}(\boldsymbol{v}),\quad (19)$$

где $\widehat{\Lambda}_0$ — линеаризованный оператор Больцмана [11]. Поскольку, принимая во внимание результаты [11], разложение величин $\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(0)$ по собственным функциям оператора $\widehat{\Lambda}_0$ содержит лишь те из них, что соответствуют отрицательным собственным значениям, вклад (18) в нулевом порядке по волновому вектору $\boldsymbol{k}$ имеет асимптотическое поведение вида $\exp(n\lambda_0 t)$, где λ_0 — минимальное по модулю отрицательное собственное значение оператора $\widehat{\Lambda}_0$. Так как коэффициенты затухания гидродинамических возмущений имеют порядок k^2, ясно, что вклад от (18) становится при асимптотических значениях t пренебрежимо малым. Следовательно, для начальных условий к уравнениям (17) нужно положить, оставаясь в рамках точности гидродинамического метода описания системы,

$$\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(0)=0.\quad (20)$$

Для нахождения решений уравнений (17) удобно воспользоваться преобразованием Лапласа. Вводя величины

$$\Psi_{\boldsymbol{k}}(z,\boldsymbol{v})=\int\limits_0^\infty e^{-tz}\Psi_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t,\quad (21)$$

преобразуем уравнение (13) к виду

$$\Psi_{\boldsymbol{k}}(z,\boldsymbol{v})-\Psi_{\boldsymbol{k}}(0,\boldsymbol{v})+\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\Psi_{\boldsymbol{k}}(z,\boldsymbol{v})=0,\quad (22)$$

где

$$\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\Psi_{\boldsymbol{k}}(z,\boldsymbol{v})=\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z,\boldsymbol{v})-$$
$$-\frac{n}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\widehat{T}_q\frac{1}{z+\widehat{S}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})+\widehat{S}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}')}\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi_{\boldsymbol{k}}(z,\boldsymbol{v}).\quad (23)$$

Для уравнений (17) имеем с учетом соотношений (20)

$$\begin{gathered}z\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)\right)+\left(\widehat{P}\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}\right)\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)\right)+\\ +\left(\widehat{P}\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_\perp\right)\left(\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)\right)=\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(0),\\ z\left(\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)\right)+\left(\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_\perp\right)\left(\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)\right)+\\ +\left(\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}\right)\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)\right)=0.\end{gathered}\quad (24)$$

Определяя $\widehat{P}_\perp\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)$ из второго уравнения (24), найдем уравнение для проекции $\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)$ на гидродинамическое подпространство:

$$z\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)\right)+\left[\left(\widehat{P}\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\widehat{P}\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_\perp\right)\left(z+\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_\perp\right)^{-1}\left(\widehat{P}_\perp\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}\right)\right]\times$$
$$\times\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z)\right)=\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(0).\quad (25)$$

Переходя посредством обратного преобразования Лапласа к t-представлению, получим нелокальные линеаризованные гидродинамические уравнения, связывающие производные по времени от величин $\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}$, представляющих собой отклонения плотности, макроскопической скорости и температуры от равновесных значений, с линейными комбинациями этих величин в момент времени $0 \div t$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{v})\right) = \int\limits_0^t \mathrm{d}t'\,\widehat{\zeta}(t-t')\left(\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(t',\boldsymbol{v})\right), \tag{26}$$

где $\widehat{\phi}(t)$ — оригинал оператора

$$\Big\{\widehat{P}\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P} - \left(\widehat{P}\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_{\perp}\right)\left(z+\widehat{P}_{\perp}\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_{\perp}\right)^{-1}\left(\widehat{P}_{\perp}\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}\right)\Big\}.$$

3. Исследование общих формул

В этом разделе мы построим явные выражения для различных проекций оператора $\widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z)$ и определим структуру соответствующей матрицы коэффициентов переноса в определенном приближении по плотности и волновому вектору $k=|\boldsymbol{k}|$ для основного уравнения (25). Введем обозначение

$$\widehat{W_{\boldsymbol{k}}}(z)\Psi(\boldsymbol{v}) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int \widehat{T}_{\boldsymbol{q}}\frac{1}{z+\widehat{S}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})+\widehat{S}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}')}\times \widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}v' \tag{27}$$

и рассмотрим разложение оператора $\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)=\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}-\widehat{W_{\boldsymbol{k}}}(z)$ по степеням плотности и волнового вектора k, в котором будем удерживать лишь члены до порядка k^3. Представим $\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)$ в виде

$$\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z) = i\boldsymbol{kv} - n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}) - iank\widehat{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}) + \frac{na^2k^2}{2}\widehat{\Lambda}_2(\boldsymbol{v}) - \widehat{W_{\boldsymbol{k}}}, \tag{28}$$

где используется разложение $\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$ по степеням (ak), исследованное в работах [6].

Известно [6], что оператор $\widehat{\Lambda}_2(\boldsymbol{v})$ приводит к высшим степеням разложения по плотности для коэффициентов переноса; в рамках рассматриваемого приближения его вкладом следует пренебречь.

Далее будет показано, что главный вклад в оператор $\widehat{W_{\boldsymbol{k}}}(z)$ (27) дает область интегрирования $|\boldsymbol{q}|\sim k$. Поэтому можно представить величины $\widehat{T}_{\boldsymbol{q}}$, $\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}}$, входящие в (27), в виде разложений

$$\begin{aligned}\widehat{T}_{\boldsymbol{q}} &= \widehat{T}_0 + q\widehat{T}_1 + q^2\widehat{T}_2 + \ldots,\\ \widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}} &= \widehat{\widehat{\Lambda}}_{00} + q\widehat{\widehat{\Lambda}}_1 + k\widehat{\widehat{\Lambda}}_1 + \ldots\ .\end{aligned} \tag{29}$$

Поскольку оператор $\widehat{W_{\boldsymbol{k}}}$ не имеет аналога в обычной локальной теории уравнений гидродинамики, приводящей к уравнениям Навье–Стокса, и, следовательно, имеет высший порядок по k, достаточно учесть лишь оператор $\widehat{W_0}$, соответствующий замене $\widehat{T}_{\boldsymbol{q}}\to\widehat{T}_0$, $\widehat{\Lambda}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}}\to\widehat{\widehat{\Lambda}}_{00}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')$. Таким образом, представим оператор $\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)$ в виде

$$\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z) = (i\boldsymbol{kv} - iank\widehat{\Lambda}_1(\boldsymbol{v})) - n\widehat{\Lambda}_0 - \widehat{W_0}. \tag{30}$$

Заметим, что, поскольку оператор $\widehat{\Lambda}_0$ обращает в нуль все инварианты столкновений, то

$$\widehat{\Lambda}_0\widehat{P} = \widehat{P}\widehat{\Lambda}_0 = 0;\quad \widehat{P}_{\perp}\widehat{\Lambda}_0 = \widehat{\Lambda}_0\widehat{P}_{\perp} = \widehat{\Lambda}_0. \tag{31}$$

Представим оператор $\widehat{P}$ в виде

$$\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z) = \sum_i \widetilde{\Psi}_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v}) <\Psi_{\boldsymbol{k}}^{(i)}>,\quad i=1,\ldots,5, \tag{32}$$

где $<\Psi_{\boldsymbol{k}}^{(i)}> = (\widetilde{\Psi}_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v}),\Psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}))$; $\widetilde{\Psi}_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v})$ представляют собой ортонормированный базис «правильных» функций нулевого приближения [4] для оператора $(i\boldsymbol{kv}-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}))$; скалярное произведение (Ψ,X) определяется по формуле $(\Psi,\mathrm{X}) = \int d\boldsymbol{v}\, f_0(\boldsymbol{v})\Psi^*(\boldsymbol{v})\mathrm{X}(\boldsymbol{v})$.

Введем также обозначение:

$$\zeta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}) = i\boldsymbol{kv} - iank\widehat{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}). \tag{33}$$

Рассмотрим действие проекционных операторов на $\zeta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$. Согласно (32), можем записать:

$$\begin{aligned}
&\widehat{P}\zeta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})\widehat{P}\Psi(\boldsymbol{v}) = \sum_{i,l}\widetilde{\Psi}_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v})(\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}\left(\widetilde{\Psi}_l^{(k)},\Psi\right),\\
&\widehat{P}_{\perp}\zeta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})\widehat{P}\Psi(\boldsymbol{v}) =\\
&\qquad = \sum_l\left(\widetilde{\Psi}_l^{(k)},\Psi\right)\left[\zeta_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\Psi}_l^{(k)} - \sum_i\widetilde{\Psi}_i^{(k)}(\boldsymbol{v})(\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}\right],\\
&\widehat{P}\zeta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})\widehat{P}_{\perp}\Psi(\boldsymbol{v}) =\\
&\qquad = \sum_i\widetilde{\Psi}_i^{(k)}(\boldsymbol{v})\left(\widetilde{\Psi}_l^{(k)},\zeta_{\boldsymbol{k}}\Psi\right) - \sum_l(\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}(\widetilde{\Psi}_l^{(k)},\Psi), \qquad (34)\\
&\widehat{P}\zeta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})\widehat{P}_{\perp}\Psi(\boldsymbol{v}) = \zeta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})\Psi(\boldsymbol{v}) - \sum_i\Bigg\{\zeta_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\Psi}_i^{(k)}(\boldsymbol{v}) -\\
&\qquad - \widetilde{\Psi}_i^{(k)}(\boldsymbol{v})\left[\left(\widetilde{\Psi}_i^{(k)},\zeta_{\boldsymbol{k}}\Psi\right) - \sum_l(\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}\left(\widetilde{\Psi}_l^{(k)},\Psi\right)\right]\Bigg\},
\end{aligned}$$

где $(\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}$ — матрица оператора $\zeta_{\boldsymbol{k}}$ в базисе $\{\widetilde{\Psi}_i^{(k)}\}$, определенная в работах [6].

Для исследования структуры уравнения (25) необходимо также определить действие проекционных операторов на $\widehat{W_0}$. Согласно (27), имеем

$$\widehat{W_0}(z)\Psi(z) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{q}\,\widehat{T}_0\frac{1}{z+\widehat{S}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})+\widehat{S}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}')}\times \widehat{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi_z(\boldsymbol{v}'). \tag{35}$$

Представим $\widehat{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')$ в виде разложения в двойной ряд по собственным функциям $\Psi_i^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v})$, $\Psi_l^{(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v}')$ операторов $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})$, $\widehat{S}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})$:

$$\widehat{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi_z(\boldsymbol{v}') = \sum_{i,l}D_{il}\left(\Psi_i^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v}),\Psi_l^{(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v}')\right). \tag{36}$$

Функции $\Psi_l^{(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v}')$, $\Psi_i^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v})$ могут быть в свою очередь с точностью до высших порядков по $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{q}$ представлены в виде разложений по ортонормированным базисам $\widetilde{\Psi}_l^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}')$, $\widetilde{\Psi}_i^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v})$ соответственно [6]:

$$\begin{aligned}\Psi_i^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v}) &= \sum_{m=1}^{5}C_{im}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}\widetilde{\Psi}_m^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v});\\ \widetilde{\Psi}_m^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v}) &= \sum_j(C^{-1})_{mj}\Psi_j^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v}).\end{aligned} \tag{37}$$

С учетом соотношений (37) находим коэффициенты D_{il} разложения (36):

$$D_{il} = \sum_{i',l'} C^{-1}_{i'i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) C_{l'l}(\boldsymbol{q}) \times \\ \times \left(\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l'}(\boldsymbol{v}'), \widehat{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi_z(\boldsymbol{v})\right)\right), \quad (38)$$

где $((\ldots))$ —- скалярное произведение с весом $f_0(\boldsymbol{v})f_0(\boldsymbol{v}')$. Подставляя разложение (36) в выражение (35) и применяя формулы преобразования (37), получим

$$\widehat{W_0}(z)\Psi(\boldsymbol{v}) = \\ = \frac{n}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{q} \sum_{i,l}\left(\widehat{T}_0\Psi^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_i(\boldsymbol{v}), \Psi^{\boldsymbol{q}}_l(\boldsymbol{v}')\right)\frac{1}{z+\widehat{S}^{(i)}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+\widehat{S}^{(l)}_{\boldsymbol{q}}} D_{il} = \\ = \frac{n}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{q}\sum_{i,l}\frac{1}{z+\widehat{S}^{(i)}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+\widehat{S}^{(l)}_{\boldsymbol{q}}} D_{il}\sum_{i',l'} C_{ii'}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})C_{ll'}(\boldsymbol{q}) \times \\ \times \left(\widehat{T}_0\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}^{\boldsymbol{q}}_{l'}(\boldsymbol{v})\right). \quad (39)$$

В работах [4, 6] было показано, что имеют место тождества, основанные на том обстоятельстве, что $\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_l$ представляют собой линейные комбинации инвариантов столкновений, $\widehat{T}_0\widetilde{\Psi}'^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_i(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l'}(\boldsymbol{v}') = -\frac{1}{2}\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_i(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}^{\boldsymbol{q}}_l(\boldsymbol{v})$, где $\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})$ — оператор Больцмана, а также

$$\left(\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l'}(\boldsymbol{v}'), \widehat{\Lambda}_{00}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')\Psi_z(\boldsymbol{v})\right)\right) = \\ = -\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l'}(\boldsymbol{v}), \widehat{\Lambda}_0\Psi_z(\boldsymbol{v})\right). \quad (40)$$

Таким образом, из (38)–(40) получим

$$\widehat{W_0}\Psi(\boldsymbol{v}) = \frac{n}{(2\pi)^3}\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})\int d\boldsymbol{q}\sum_{i,l,i',l',i'',l''}\frac{1}{z+S^{(i)}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+S^{(l)}_{\boldsymbol{q}}} \times \\ \times C_{ii'i'',ll'l''}\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i''}(\boldsymbol{v}')\widetilde{\Psi}^{\boldsymbol{q}}_{l''}(\boldsymbol{v}'), \widehat{\Lambda}_0\Psi_z(\boldsymbol{v}')\right) \times \\ \times \left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l'}(\boldsymbol{v})\right), \quad (41)$$

где матрица $C_{ii'i'',ll'l''}$ определяется, согласно (38), (39), соотношением

$$C_{ii'i'',ll'l''} = C_{ii'}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})C_{ll'}(\boldsymbol{q})C^{-1}_{i''i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})C^{-1}_{l''l}(\boldsymbol{q}) \quad (42)$$

и $S^{(i)}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}$, $S^{(l)}_{\boldsymbol{q}}$ представляют собой собственные значения операторов $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})$, $\widehat{S}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}')$ соответственно. Легко заметить, что из (41) следует, что оператор $\widehat{W_0}$ может быть представлен в виде

$$\widehat{W_0} = n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})\widehat{Z}_{\boldsymbol{k}}\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}), \quad (43)$$

где

$$\widehat{Z}_{\boldsymbol{k}}\Psi(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{q}\sum_{i,l,i',l',i'',l''}\frac{1}{2(2\pi)^3}\frac{1}{z+\widehat{S}^{(i)}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+\widehat{S}^{(l)}_{\boldsymbol{q}}} \times \\ \times C_{ii'i'',ll'l''}\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i''}(\boldsymbol{v}')\widetilde{\Psi}^{\boldsymbol{q}}_{l''}(\boldsymbol{v}'), \widehat{\Lambda}_0\Psi_z(\boldsymbol{v}')\right)\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}'^{(\boldsymbol{q})}_{l}(\boldsymbol{v}). \quad (44)$$

Согласно (31), (43), получим

$$\widehat{P}\widehat{W_0}\widehat{P} = \widehat{P}\widehat{W_0}\widehat{P}_\perp = \widehat{P}_\perp\widehat{W_0}\widehat{P} = 0, \quad \widehat{P}_\perp\widehat{W_0}\widehat{P}_\perp = \widehat{W_0}. \quad (45)$$

Таким образом, действие проекционных операторов на $\widehat{\mathrm{A}}_{\boldsymbol{k}}(z)$ определено формулами (33), (34), (45). Вернемся к уравнению (25), представив в нем функции $\widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z), \widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(0)$ в виде

$$\begin{aligned} \widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(z) &= \sum_{i=1}^{5} a^{(\boldsymbol{k})}_i(z)\widehat{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i, \\ \widehat{P}\Psi_{\boldsymbol{k}}(0) &= \sum_{i=1}^{5} a^{(\boldsymbol{k})}_i(0)\widehat{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i. \end{aligned} \quad (46)$$

Подставляя (46) в (25), получим с учетом соотношений (34), (45) следующее уравнение:

$$\sum_i \Psi^{(\boldsymbol{k})}_i(\boldsymbol{v})\left\{z a^{(\boldsymbol{k})}_i(z) + \sum_l (\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il} a^{(\boldsymbol{k})}_l(z) - \right. \\ \left. - \left[\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i(\boldsymbol{v}), \zeta_{\boldsymbol{k}}\Psi(\boldsymbol{v})\right) - \sum_l (\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_l, \Psi\right)\right]\right\} = \\ = \sum_i \widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i(\boldsymbol{v}) a^{(\boldsymbol{k})}_i(0), \quad (47)$$

где

$$\Psi(\boldsymbol{v}) = \left(z+\widehat{P}_\perp\widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_\perp\right)^{-1}\left(\widehat{P}_\perp\widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}\right)\sum_i a^{(\boldsymbol{k})}_i(z)\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i(\boldsymbol{v}) = \\ = \left(z+\widehat{P}_\perp\widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_\perp\right)^{-1}\sum_l a^{(\boldsymbol{k})}_l(z) \times \\ \times \left[\zeta_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_l(\boldsymbol{v}) - \sum_i (\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i(\boldsymbol{v})\right].$$

Введем функции

$$R^{(\boldsymbol{k})}_i(\boldsymbol{v}) = \zeta_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i - \sum_l (\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_l \quad (48)$$

и представим Ψ в виде

$$\Psi = \left(z+\widehat{P}_\perp\widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_\perp\right)\sum_l a^{(\boldsymbol{k})}_l(z) R^{(\boldsymbol{k})}_l(\boldsymbol{v}). \quad (49)$$

Рассматривая выражение

$$\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i, \zeta_{\boldsymbol{k}}\Psi\right) - \sum_l (\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il}\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_l, \Psi\right) = \\ = \left(\left(\zeta^+_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i - \sum_l (\zeta^+_{\boldsymbol{k}})_{il}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_l\right), \ \Psi\right),$$

обозначим

$$\widetilde{R}^{(\boldsymbol{k})}_i(\boldsymbol{v}) = \zeta^+_{\boldsymbol{k}}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i - \sum_l (\zeta^+_{\boldsymbol{k}})_{il}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_l. \quad (50)$$

Соотношения (49), (50) позволяют представить уравнение (47) в форме

$$\sum_i \widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k})}_i(\boldsymbol{v})\left\{z a^{(\boldsymbol{k})}_i(z) + \sum_l (\zeta_{\boldsymbol{k}})_{il} a^{(\boldsymbol{k})}_l(z) - \right. \\ \left. - \sum_l\left(\widetilde{R}^{(\boldsymbol{k})}_i, \left(z+\widehat{P}_\perp\widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z)\widehat{P}_\perp\right)^{-1} R^{(\boldsymbol{k})}_l\right) a^{(\boldsymbol{k})}_l(z)\right\} =$$

$$= \sum_i \widetilde{\Psi}_i^{(\boldsymbol{k})} a_i^{(\boldsymbol{k})}(0). \quad (51)$$

Умножая (51) скалярно на $\widetilde{\Psi}_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v})$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ и воспользовавшись ортонормированностью базиса $\{\widetilde{\Psi}_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v})\}$, получим систему уравнений для гидродинамических величин $a_i^{(\boldsymbol{k})}(z)$:

$$z a_i^{(\boldsymbol{k})}(z) - a_i^{(\boldsymbol{k})}(0) + \sum_l \left[(\phi_{\boldsymbol{k}})_{il} - \left(\widetilde{R}_i^{(\boldsymbol{k})}, \left(z + \widehat{P}_\perp \widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z) \widehat{P}_\perp\right)^{-1} R_l^{(\boldsymbol{k})} \right) \right] a_l^{(\boldsymbol{k})}(z) = 0. \quad (52)$$

Заметим, что оператор $\phi_{\boldsymbol{k}}$ и функции $R_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v})$, $\widetilde{R}_i^{(\boldsymbol{k})}$ линейно зависят от модуля волнового вектора $|\boldsymbol{k}|$.

Вводя обозначения

$$\widehat{Q}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{ik} \phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}); \quad (53)$$

$$N_i^{(\boldsymbol{e})}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{ik} R_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v}); \quad \widetilde{N}_i^{(\boldsymbol{e})}(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{ik} \widetilde{R}_i^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|},$$

представим систему уравнений (52) в виде

$$z a_j^{(\boldsymbol{k})}(z) - a_j^{(\boldsymbol{k})}(0) + \sum_l \left[ik \left(\widehat{Q}_{\boldsymbol{e}}\right)_{jl} + k^2 \left(\widetilde{N}_j^{(l)}, \frac{1}{z + \widehat{P}_\perp \widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z) \widehat{P}_\perp} N_l^{(e)} \right) \right] a_l^{(\boldsymbol{k})}(z) = 0. \quad (54)$$

Функции (48), (50), (53) были исследованы нами в работах [6], где было показано, что $N_l^{(\boldsymbol{e})} = \widetilde{N}_l^{(\boldsymbol{e})}$; $N_l^{(\boldsymbol{e})}$ представляют собой линейные комбинации величин $j_1(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{ev})(\beta m v^2 - 5)$; $j_2(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{ev})^2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}^2$; $(\boldsymbol{ev})(\boldsymbol{e}_{1\perp}\boldsymbol{v})$; $(\boldsymbol{ev})(\boldsymbol{e}_{2\perp}\boldsymbol{v})$; ($\beta$ — равновесное значение обратной температуры; $\boldsymbol{e}_{1\perp}$ и $\boldsymbol{e}_{2\perp}$ образуют с единичным вектором $\boldsymbol{e}$ ортонормированный базис). В низших порядках по плотности функции $N_l^{(e)}$ могут быть записаны в виде [6]

$$\begin{aligned}
N_{1,2}^{(\boldsymbol{e})} &= \frac{1}{\sqrt{30}} j_1(\boldsymbol{v}) \left(1 + \frac{2\Delta}{5}\right) \pm \sqrt{\frac{\beta m}{2}} j_2(\boldsymbol{v}) \left(1 + \frac{4\Delta}{15}\right); \\
N_3^{(\boldsymbol{e})} &= \frac{1}{\sqrt{10}} j_1(\boldsymbol{v}) \left(1 + \frac{2\Delta}{5}\right); \\
N_4^{(\boldsymbol{e})} &= \sqrt{\beta m} \left(1 + \frac{4\Delta}{15}\right) (\boldsymbol{ev})(\boldsymbol{e}_{1\perp}\boldsymbol{v}); \qquad (55) \\
N_5^{(\boldsymbol{e})} &= \sqrt{\beta m} \left(1 + \frac{4\Delta}{15}\right) (\boldsymbol{ev})(\boldsymbol{e}_{2\perp}\boldsymbol{v}); \\
\Delta &= \pi n a^3.
\end{aligned}$$

Поскольку функции (55) обладают свойством $\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}) N_l^{(\boldsymbol{e})} \neq 0$, то в системе уравнений (54) можно произвести разложения вида $\frac{1}{\widehat{A} - \widehat{B}} = \frac{1}{\widehat{A}} + \frac{1}{\widehat{A}} \widehat{B} \frac{1}{\widehat{A}} + \frac{1}{\widehat{A}} \widehat{B} \frac{1}{\widehat{A}} \widehat{B} \frac{1}{\widehat{A}} + \ldots$, где $\widehat{A} = -n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})$, $\widehat{B} = -\left(z + ik\widehat{P}_\perp \widehat{Q}_e(\boldsymbol{v}) \widehat{P}_\perp\right) + n\widehat{\Lambda}_0 \widehat{Z}_{\boldsymbol{k}} \widehat{\Lambda}_0$. (Заметим, что в выражении для оператора $\widehat{B}$ учтен явный вид операторов $\widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z)_0 \widehat{W}_0$, данный соотношением (43), а также определение (53).) Таким образом, выражение $\left(N_j^{(\boldsymbol{e})}, \frac{1}{z + \widehat{P}_1 \widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z) \widehat{P}_1} N_l^{(\boldsymbol{e})}\right)$ можно представить в виде

$$\left(N_j^{(\boldsymbol{e})}, \frac{1}{z + \widehat{P}_\perp \widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z) \widehat{P}_\perp} N_l^{(\boldsymbol{e})}\right) = -\left(N_j^{(\boldsymbol{e})}, \frac{1}{n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})} N_l^{(\boldsymbol{e})}\right) - \frac{1}{n^2} \left(\widetilde{N}_j^{(\boldsymbol{e})}, \frac{1}{\widehat{\Lambda}_0} \left(z + ik\widehat{P}_\perp \widehat{Q}_{\boldsymbol{e}} \widehat{P}_\perp\right) \frac{1}{\widehat{\Lambda}_0} N_l^{(\boldsymbol{e})}\right) + \frac{1}{n} \left(N_j^{(\boldsymbol{e})}, \widehat{Z}_{\boldsymbol{k}} N_l^{(\boldsymbol{e})}\right) + \ldots, \quad (56)$$

где, как легко видеть, все невыписанные члены разложения имеют высшие порядки по $\widehat{Z}_k$ и $\left(z + ik\widehat{P}_\perp \widehat{Q}_{\boldsymbol{k}} \widehat{P}_\perp\right)$.

Рассмотрим случай предельно малых $|\boldsymbol{k}|$, когда в разложении (56) можно ограничиться первым слагаемым (в гидродинамическом режиме $z \sim k$, $\widehat{Z}_{\boldsymbol{k}}$ также обращается в нуль при $k \to 0$).

Подставляя выражение $\left(N_j^{(\boldsymbol{e})}, \frac{1}{z + \widehat{P}_\perp \widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z) \widehat{P}_\perp} N_l^{(\boldsymbol{e})}\right) \simeq -\left(N_l^{(\boldsymbol{e})}, \frac{1}{n\Lambda(\boldsymbol{v})} N_l^{(\boldsymbol{e})}\right)$ в формулу (54) и переходя посредством обратного преобразования Лапласа к зависящим от времени функциям, приходим к соотношениям

$$\frac{\mathrm{d}a_j^{(\boldsymbol{k})}}{\mathrm{d}t} + i\boldsymbol{k} \sum_l \left(\widehat{Q}_l\right)_{jl} a_l^{(k)}(t) - \frac{k^2}{n} \sum_l \left(N_j^{(\boldsymbol{e})} \frac{1}{\widehat{\Lambda}_0} N_e^{(\boldsymbol{e})}\right) a_l^{(\boldsymbol{k})}(t) = 0. \quad (57)$$

Нетрудно заметить, что (57) представляет собой стандартные уравнения Навье–Стокса. Действительно, поскольку при преобразовании Фурье

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \to i\boldsymbol{k}\Psi_{\boldsymbol{k}}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \to -k^2 e_\alpha e_\beta \Psi_{\boldsymbol{k}}, \quad (58)$$

уравнения (57) связывают производные по времени от гидродинамических величин с производными первого и второго порядков по координатам локальным образом. Соотношение (58) показывает также, что в общем случае величины $\left(N_j^{(\boldsymbol{e})}, \frac{1}{z + \widehat{P}_\perp \widehat{A}_{\boldsymbol{k}}(z) \widehat{P}_\perp} N_l^{(\boldsymbol{e})}\right)$ представляют собой обобщенную матрицу коэффициентов переноса [4], зависящих от z и волнового вектора. В низших порядках по величинам z, k следует, однако, пренебречь в уравнениях (54) величинами порядка $\sim zk^2$, k^3, т. е. вторым слагаемым в (56). Таким образом, необходимо исследовать свойства выражения $\frac{1}{n}\left(N_j^{(\boldsymbol{e})}, \widehat{Z}_k N_l^{(\boldsymbol{e})}\right)$, которые в низших порядках по z, k обусловливают отличие уравнений (54) от системы Навье–Стокса (57). Согласно определению (44), имеем

$$\Phi_{il}(z, k) = \left(N_i^{(\boldsymbol{e})}, \widehat{Z}_k N_l^{(\boldsymbol{e})}\right) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{q} \sum_{i', l'} \widetilde{C}_{i'i'', l'l''}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) \times \left(\widetilde{\Psi}_{i''}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})} \widetilde{\Psi}_{l''}^{(\boldsymbol{q})}, N_l^{(\boldsymbol{k})}\right) \left(\widetilde{\Psi}_{i'}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})} \Psi_{l'}^{(\boldsymbol{q})}, N_i^{(\boldsymbol{e})}\right), \quad (59)$$

где $\widetilde{C}_{i'i''l'l''} = \sum_{i^*, l^*} \frac{1}{z + S_{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}^{(i^*)} + S_{\boldsymbol{q}}^{(l^*)}} C_{i^*i'i'', l^*l'l''}$; матрица C определена посредством соотношения (42). Вся зависимость величин $\Phi_{il}(z,k)$ (59) от z и k содержится в интегралах вида

$$\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{z+S^{(i*)}_{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}+S^{(l*)}_{\boldsymbol{q}}},$$

где $S^{(i^*)}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}$, $S^{(l^*)}_{\boldsymbol{q}}$ — собственные значения операторов $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}$, $\widehat{S}_{\boldsymbol{q}}$, обращающихся в нуль при $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|\to 0$, $|\boldsymbol{q}|\to 0$ соответственно. В работе [4] было показано, что в случае $z\sim k$, $z\sim k^2$ (т. е. в гидродинамической области) подобные интегралы зависят от z и k подобно $z^{1/2}$, $k^{1/2}$. Здесь, оставляя в стороне вычисление явной зависимости величин $\Phi_{il}(z,k)$ от их аргументов, мы рассмотрим влияние учета конечных размеров области взаимодействия на свойства симметрии матрицы $\Phi_{il}(z,k)$ по индексам i, l. Из (42), (59) следует, что в пределе $a\to 0$ матрица $C_{i^*i'i'',e^*e'e''}$ переходит в произведение δ-символов $\delta_{i^*i'}\cdot\delta_{l^*l'}\cdot\delta_{i'i''}\cdot\delta_{l'l''}$ и $\Phi_{il}(z,k)$ является симметричной относительной замены $i\leftrightarrow l$. При конечных значениях a матрицы $C_{ii'}$, входящие в (39), можно представить в виде $C_{ii'}=\delta_{ii'}+d_{ii'}$, $C^{-1}_{i''i}=\delta_{i''i}-\widetilde{d}_{i''i}$, матрица $d_{ii'}$ симметрична, и ее отличные от нуля компоненты могут быть записаны в форме [6] $d_{21}=d_{12}=\frac{\Delta}{5}$; $d_{13}=\frac{2\Delta}{5\sqrt{3}}=d_{23}=d_{31}=d_{32}$. Учитывая эти свойства, получим для матрицы $\widetilde{C}_{i'i'',l'l''}$ в низших порядках по Δ выражение

$$\widetilde{C}_{i'i'',l'l''}=\delta_{i'i''}\delta_{l'l''}\frac{1}{z+S^{(i')}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+S^{(l')}_{\boldsymbol{q}}}+$$
$$+\left[\frac{1}{z+S^{(i'')}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+S^{(l'')}_{\boldsymbol{q}}}\cdot(\delta_{l''l}d_{i''i}+\delta_{i''i'}d_{l''l'})-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{z+S^{(i')}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+S^{(l')}_{\boldsymbol{q}}}\cdot(\delta_{l''l'}d_{i''i'}+\delta_{i''i'}d_{l''l'})\right]. \quad (60)$$

Рассмотрим диагональные элементы матрицы Φ_{ll}. Поскольку в этом случае величина $\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i''}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l''},N^{(\boldsymbol{e})}_{l}\right)\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l'},N^{(\boldsymbol{e})}_{l}\right)$ является симметричной относительно замены $i'',l''\to i',l'$, то, заметив, что члены, пропорциональные d, в матрице (61) антисимметричны относительно подобной перестановки, заключаем, что элементы Φ_{ll} не содержат вкладов порядка $\sim na^3$ от матрицы d_{ij}. Для недиагональных элементов, однако, свойство антисимметричности второго слагаемого в (61) приводит к нарушению симметрии матрицы Φ_{il} с точностью до членов порядка $\sim na^3$:

$$\Phi_{il}-\Phi_{li}=\frac{1}{2(2\pi)^3}\times$$
$$\times\int d\boldsymbol{q}\sum_{i'',l'',i',l'}\left[\frac{1}{Z+S^{(i'')}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+S^{(l'')}_{\boldsymbol{q}}}-\frac{1}{Z+S^{(i')}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}+S^{(l')}_{\boldsymbol{q}}}\right]\times$$
$$\times(\delta_{l''l'}d_{i''i'}+\delta_{i''i'}d_{l''l'})\times$$
$$\times\left[\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i''}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l''},N^{(\boldsymbol{e})}_{l}\right)\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l'},N^{(\boldsymbol{e})}_{i}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i'}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l'},N^{(\boldsymbol{e})}_{l}\right)\left(\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})}_{i''}\widetilde{\Psi}^{(\boldsymbol{q})}_{l''},N^{(\boldsymbol{e})}_{i}\right)\right].$$

Таким образом, учет конечности области взаимодействия приводит к неэрмитовости обобщенной матрицы коэффициентов переноса, определяющей структуру нелокальных линеаризировагных гидродинамических уравнений, причем эффекты нарушения симметрии имеют, как в случае пренебрежениия диссипационными явлениями [6], порядок $\sim na^3$.

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* Кинетические уравнения и функции Грина в статической механике. Препринт № 57 Института физики АН АзССР. 1977.
2. *Dorfman J.R., Cohen E.G.D.* // Phys. Lett. 1965. **16**. P. 124.
3. *Dorfman J.R., Cohen E.G.D.* // J. Math. Phys. 1967. **8**. P. 282.
4. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. 1976.
5. *Ernst M.H., Dorfman J.R.* // Physica. 1972. **61**. P. 157; J. Stat. Phys. 1975. **12**. P. 311.
6. *Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И.* // ТМФ. 1976. **31**. С. 276; Препринт ИТФ-76-149Р. Киев, 1976; *Inozemtseva N.G., Sadovnikov B.I.* // Physica A. 1978. 92. P. 26.
7. *Dorfman J.R., Cohen E.G.D.* // Phys. Rev. 1975. **A12**. P. 292.
8. *Ernst M.H., Dorfman J.R., Hoegy W.R., van Leeunn J.M.J.* // Physica. 1969. **45**. P. 127.
9. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. 1946.
10. *Zwanzig R.* // Ann. Rev. Phys. Chem. 1965. **16**. P. 67.
11. *Уленбек Дж., Форд Дж.* Лекции по статистической механике. 1965.

Generalized hydrodynamical equations in the model of hard spheres

V. I. Inozemtsev[a], **I. I. Maslennikov**[b]

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] nginozv@mail.ru, [b] ilyamaslennikov@mail.ru.

The generalized linearized hydrodynamical equations in the model of hard spheres are considered using the approximate approach to the analysis of collective interactions formulated by N. N. Bogolubov. It is shown that the generalized matrix of transfer coefficients is not self-adjoint taking into account the final dimensions of the two-particle interaction region.

Keywords: kinetic equations, model of hard spheres, transfer coefficients.
PACS: 51.10.+y; 05.20.–y; 05.20.Dd.
Received 20 November 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2013).

Сведения об авторах

1. Владимир Иванович Иноземцев — докт. физ.-мат. наук, профессор; e-mail: nginozv@mail.ru.
2. Масленников Илья Игоревич — аспирант; e-mail: ilyamaslennikov@mail.ru.