

Флуктуации амплитуды волны при совместной диффузии лучей в среде со случайными неоднородностями

О. К. Власова^{1,a}, Л. И. Приходько^{2,b}

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,

¹Центр гидрофизических исследований; ²кафедра физики атмосферы.

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^aolasovaok@mail.ru, ^bl.prikhodko@mail.ru

Статья поступила 27.10.2012, подписана в печать 28.12.2012.

Рассмотрены флуктуации амплитуды плоской волны и положения двух лучей, распространяющихся в среде в среднем однородной со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Решение задачи основано на методе диффузии лучей. Получено уравнение Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятностей расстояния между лучами и относительной амплитуды в случае, когда начальное расстояние между лучами много меньше радиуса корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости. Найдена условная плотность вероятностей относительной амплитуды при условии, что распределение расстояния между лучами является логарифмически нормальным законом, полученным без учета флуктуаций амплитуды. Численный анализ аналитических решений данной работы проведен для случая распространения коротких радиоволн в тропосфере и ионосфере.

Ключевые слова: случайно-неоднородные среды, диффузия лучей, уравнение Эйнштейна–Фоккера.

УДК: 550.388.2. PACS: 41.20.Jb.

Введение

Совместное распространение двух изначально параллельных лучей в среде в среднем однородной со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости рассмотрено в настоящей работе. В приближении геометрической оптики поле имеет в каждой точке структуру плоской волны:

$$u = Ae^{ik\varphi},$$

A — амплитуда, φ — эйконал.

Используя известные уравнение эйконала для φ и уравнение переноса для амплитуды A плоской волны, распространяющейся в данной среде, можно перейти к следующим лучевым уравнениям и уравнению для амплитуды:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \mathbf{S}, \quad \frac{d(n\mathbf{S})}{d\sigma} = \nabla_{\mathbf{r}}n, \quad (1)$$

$$\frac{dA}{d\sigma} = -\frac{A}{2\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{S} \frac{\nabla_{\mathbf{r}}\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad (2)$$

\mathbf{r} определяет положение луча в среде, \mathbf{S} — единичный вектор касательной к лучу, σ — длина дуги, пройденной лучом, $\varepsilon = n^2$ — диэлектрическая проницаемость среды, которую запишем в виде суммы регулярной и случайной составляющих

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_f.$$

В работе [1] подробно описан переход от уравнений (1), (2) к динамическим уравнениям типа уравнений Ланжевена, позволяющим использовать метод диффузии лучей:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_{\perp}}{dz} &= \mathbf{S}_{\perp}, & \frac{d\mathbf{S}_{\perp}}{dz} &= \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}_{\perp}}\varepsilon_{\alpha}, \\ \frac{dA}{dz} &= -\frac{\alpha A_0}{2\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}}{\partial z} - \frac{A_0}{2} \operatorname{div} \mathbf{S}_{\perp}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}\{x, y\}$, $\mathbf{S}_{\perp} = \{S_x, S_y\}$ — поперечные координаты положения и направления луча, z — координата, вдоль которой первоначально направлен луч, A_0 — значение амплитуды при $z = 0$.

Уравнения (3) получены при условии малоуглового отклонения направления луча от первоначального направления

$$\langle \mathbf{S}_{\perp}^2 \rangle \ll 1$$

и малых флуктуациях диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_f = \alpha \varepsilon_{\alpha}, \quad \alpha \ll 1.$$

В работе [2] была рассмотрена задача о совместной диффузии двух лучей, однако решить уравнение для совместной плотности вероятностей $W(\mathbf{r}_{\perp 1}, \mathbf{r}_{\perp 2}, \mathbf{S}_{\perp 1}, \mathbf{S}_{\perp 2}, z)$ не удалось. В связи с этим нами было предложено [3] заменить в динамических уравнениях вектор \mathbf{S}_{\perp} интегральным выражением, следующим из (3):

$$\mathbf{S}_{\perp} = \int_0^z \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}'_{\perp}} \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{r}'_{\perp}, z') dz',$$

и записать уравнения типа уравнений Ланжевена следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{r}_{\perp 1,2}}{dz} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} \int_0^z \nabla_{\mathbf{r}'_{\perp 1,2}} \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{r}'_{\perp 1,2}, z') dz', \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_{1,2}}{dz} &= -\frac{\alpha A_0}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{r}_{\perp 1,2}, z)}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^z \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{r}'_{\perp 1,2}, z')}{\partial x'_{1,2}{}^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{r}'_{\perp 1,2}, z')}{\partial y'_{1,2}{}^2} \right) dz' \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

1. Уравнение Эйнштейна–Фоккера

Переход от динамических уравнений (4,5) к уравнению Эйнштейна–Фоккера можно представить следующим образом. Пусть компоненты вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, описывающего n -мерный случайный процесс, удовлетворяют системе динамических уравнений

$$\frac{d\xi_i(s)}{ds} = v_i(\xi, s) + f_i(\xi, s), \quad (6)$$

где $v_i(\xi, s)$ ($i = 1, \dots, n$) — детерминированные функции, $f_i(\xi, s)$ — случайные функции, обладающие следующими свойствами:

- а) $f_i(\xi, s)$ — гауссово случайное поле;
- б) $\langle f_i(\xi, s) \rangle = 0$;
- в) $\langle f_i(\xi, s) f_k(\xi', s') \rangle = 2\delta(s - s') F_{ik}(\xi, \xi', s) = B_{ik}(\xi, \xi'; s, s')$

усреднение проводится по множеству всех реализаций f .

В этом случае плотность вероятностей для решения $\xi(s)$ системы (6), т. е. функция

$$P_s(\mathbf{x}) = \langle \delta_n(\xi(s) - \mathbf{x}) \rangle$$

удовлетворяет уравнению Эйнштейна–Фоккера

$$\frac{\partial P_s(\mathbf{x})}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x_k} \{ [v_k(\mathbf{x}, s) + A_k(\mathbf{x}, s)] P_s(\mathbf{x}) \} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, s) P_s(\mathbf{x})] = 0, \quad (8)$$

где $A_k(\mathbf{x}, s) = \left[\frac{\partial F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s)}{\partial x'_l} \right]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}$.

В реальных задачах, когда условие δ -коррелированности (7в) нарушено, уравнение (8) является приближенным, и под $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s)$ следует понимать величину

$$F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s) = \int_0^s B_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s, s') ds',$$

если радиус корреляции функции $f(\mathbf{x}, s)$ много меньше s .

Предположим далее, что радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости много меньше расстояния, пройденного лучом

$$r_0 \ll z.$$

При выполнении этого условия уравнения (4), (5) удовлетворяют требованиям, позволяющим перейти от динамических уравнений к уравнению Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятностей $W(\mathbf{r}_{\perp 1}, \mathbf{r}_{\perp 2}, A_1, A_2, z)$ [4].

Приведем выражения для коэффициентов уравнения Эйнштейна–Фоккера, связанных с исследованием флуктуаций амплитуды, вычисленные по аналогии с [1, 5]:

$$F_{A_1 A_1} = F_{A_2 A_2} = 16DA_0^2 \frac{z^2}{r_0^2},$$

$$F_{A_1 A_2} = 8DA_0^2 \frac{z^2}{r_0^2} e^{-R^2/r_0^2} \left[\left(\frac{R}{r_0} \right)^4 - 4 \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 + 2 \right],$$

$$F_{A_1 x_2} = -F_{A_2 x_1} = -8DA_0 \frac{z^2}{r_0^2} \Delta x e^{-R^2/r_0^2} \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 2 \right),$$

$$F_{A_1 y_2} = -F_{A_2 y_1} = -8DA_0 \frac{z^2}{r_0^2} \Delta y e^{-R^2/r_0^2} \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 2 \right),$$

$$A_{A_1} = A_{A_2} = -32DA_0 \frac{z^2}{r_0^2} +$$

$$+ 16DA_0 \frac{z^2}{r_0^2} e^{-R^2/r_0^2} \left[\left(\frac{R^2}{r_0^2} - 2 \right) - \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 2 \right) \frac{R^2}{r_0^2} + \frac{R^2}{r_0^2} \right],$$

где коэффициент диффузии $D = \frac{\alpha^2 \varepsilon_0 \sqrt{\pi}}{4\varepsilon_0^2 r_0}$, $R^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, $\Delta x = x_1 - x_2$, $\Delta y = y_1 - y_2$.

Остальные коэффициенты, связанные с переменными $\mathbf{r}_{\perp 1}$, $\mathbf{r}_{\perp 2}$, получены в [3].

Таким образом, плотность вероятностей $W(\mathbf{r}_{\perp 1}, \mathbf{r}_{\perp 2}, A_1, A_2, z)$ удовлетворяет следующему уравнению Эйнштейна–Фоккера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z} = & Dz^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} \right) + \\ & + 2Dz^2 e^{-R^2/r_0^2} \left[2 \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial W}{\partial x_2} \right) \frac{\Delta x}{r_0^2} \left(2 - \frac{R^2}{r_0^2} \right) + \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial y_1} - \frac{\partial W}{\partial y_2} \right) \frac{\Delta y}{r_0^2} \left(2 - \frac{R^2}{r_0^2} \right) + \left(1 - 2 \frac{\Delta y^2}{r_0^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial y_2} + \\ & + \left. \left(1 - 2 \frac{\Delta x^2}{r_0^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{\Delta x \Delta y}{r_0^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \right] + \\ & + 2F_{A_1 A_2} \frac{\partial^2 W}{\partial A_1 \partial A_2} + F_{A_1 A_1} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial A_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial A_2^2} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial A_1} + \frac{\partial W}{\partial A_2} \right) \times \\ & \times \left\{ -32DA_0 \frac{z^2}{r_0^2} + 16DA_0 \frac{z^2}{r_0^2} e^{-R^2/r_0^2} \times \right. \\ & \times \left. \left[\left(\frac{R^2}{r_0^2} - 2 \right) + 3 \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 2 \right) \frac{R^2}{r_0^2} + \frac{R^2}{r_0^2} \right] \right\} - \\ & - 16DA_0 \frac{z^2}{r_0^2} \Delta x e^{-R^2/r_0^2} \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial A_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 W}{\partial A_2 \partial x_1} \right) - \\ & - 16DA_0 \frac{z^2}{r_0^2} \Delta y e^{-R^2/r_0^2} \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial A_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 W}{\partial A_2 \partial y_1} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

с начальными условиями

$$W(\mathbf{r}_{\perp 1}, \mathbf{r}_{\perp 2}, A_1, A_2, z=0) =$$

$$= \delta(x_1) \delta(y_1) \delta(x_2 - x_{20}) \delta(A_1 - A_0) \delta(A_2 - A_0).$$

2. Решение уравнения Эйнштейна–Фоккера

При использовании стандартной процедуры перехода в (9) к переменным разности и полусуммы

$$\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_{\perp 1} - \mathbf{r}_{\perp 2}, \quad \mathbf{r}_+ = \frac{\mathbf{r}_{\perp 1} + \mathbf{r}_{\perp 2}}{2},$$

$$A_- = A_1 - A_2, \quad A_+ = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

оказывается возможным проинтегрировать полученное уравнение по x_+ , y_+ , A_+ и получить уравнение для $W(x_-, y_-, A_-, z)$ при условии, что расстояние между лучами много меньше радиуса корреляции неоднородностей $\mathbf{r}_-^2/r_0^2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x_-, y_-, A_-, z)}{\partial z} = & 2Dz^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_-^2} \left(3 \frac{x_-^2}{r_0^2} + \frac{y_-^2}{r_0^2} \right) + \\ & + 2Dz^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y_-^2} \left(3 \frac{y_-^2}{r_0^2} + \frac{x_-^2}{r_0^2} \right) + 8Dz^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_- \partial y_-} \frac{x_- y_-}{r_0^2} + \\ & + 16Dz^2 \frac{\partial W}{\partial x_-} \frac{x_-}{r_0^2} + 16Dz^2 \frac{\partial W}{\partial y_-} \frac{y_-}{r_0^2} + \\ & + 96DA_0^2 \left(\frac{r_-}{r_0} \right)^2 \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial A_-^2}, \quad (10) \end{aligned}$$

где $r_-^2 = x_-^2 + y_-^2$.

Решение уравнения (10) удовлетворяет начальным условиям:

$$W(\mathbf{r}_-, A_-, z=0) = \delta(y_-) \delta(x_- - x_{02}) \delta(A_-).$$

Перейдем в (10) от переменных (x_-, y_-) к полярной системе координат (ρ, φ) , $x_- = \rho \cos \varphi$, $y_- = \rho \sin \varphi$, как это делалось в работе [3]. Получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\rho, \varphi, A_-, z)}{\partial z} = \\ = \frac{6Dz^2}{r_0^2} \left\{ \rho^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + 3\rho \frac{\partial W}{\partial \rho} + 16 \frac{\rho^2}{r_0^2} A_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial A_-^2} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

с начальными условиями $W(\rho, \varphi, A_-, z=0) = \delta(\varphi) \times \delta(\rho - \rho_0) \delta(A_-)$.

Заметим, что без учета амплитудных флуктуаций уравнение для $\widetilde{W}(\rho, \varphi, z)$ имеет вид [3]

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial z} = \frac{6Dz^2}{r_0^2} \left\{ \rho^2 \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \varphi^2} + 3\rho \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \rho} \right\}, \quad (12)$$

$$\widetilde{W}(\rho, \varphi, z=0) = \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi), \quad \rho_0 = x_{02}.$$

Используя метод разделения переменных

$$\widetilde{W}(\rho, \varphi, z) = V(\rho, z)U(\varphi, z),$$

получим нормальное распределение для $U(\varphi, z)$ с нулевым средним и дисперсией $\sigma_\varphi^2 = 4Dz^3/3r_0^2$. Для плотности вероятностей $V(\rho, z)$ — логарифмически нормальное распределение [3]

$$\begin{aligned} V(\rho, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \rho} \exp \left\{ - \frac{\ln \rho - \ln \rho_0 + \sigma^2}{2\sigma^2} \right\}, \\ \sigma^2 = \frac{4Dz^3}{r_0^2}, \quad (13) \end{aligned}$$

найденное в результате решения уравнения

$$\frac{\partial V(\rho, z)}{\partial z} = \frac{6Dz^2}{r_0^2} \left\{ \rho^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right\}, \quad (14)$$

$$V(\rho, z=0) = \delta(\rho - \rho_0).$$

По аналогии с (12), решение уравнения (11) представим в виде

$$W(\rho, \varphi, A_-, z) = U(\varphi, z) \widehat{W}(\rho, A_-, z).$$

Тогда плотность вероятностей $\widehat{W}(\rho, A_-, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \widehat{W}(\rho, A_-, z)}{\partial z} = \frac{6Dz^2}{r_0^2} \left\{ \rho^2 \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \rho} + 16 \frac{\rho^2}{r_0^2} A_0^2 \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial A_-^2} \right\}. \quad (15)$$

Аналитическое решение данного уравнения найти не удастся, но поскольку известно распределение $V(\rho, z)$ (13), следующее из (14), то можно получить условное распределение $W_\rho(A_-, z)$, представив решение уравнения (15) в виде

$$\widehat{W}(\rho, A_-, z) = V(\rho, z)W_\rho(A_-, z).$$

В результате уравнение для условного распределения относительной амплитуды при условии, что $V(\rho, z)$ удовлетворяет (13), приобретает вид

$$\frac{\partial W_\rho(A_-, z)}{\partial z} = 96 \frac{\rho^2}{r_0^2} D A_0^2 \frac{z^2}{r_0^2} \frac{\partial^2 W_\rho}{\partial A_-^2}, \quad (16)$$

$$W_\rho(A_-, z=0) = \delta(A_-).$$

Используя метод решения дифференциальных уравнений в частных производных, разработанный в [6], получим для функции $W_\rho(A_-, z)$ нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma_{A_-}^2(z) = 2\rho^2(z) \int_0^z 96 \frac{A_0^2}{r_0^2} \frac{Dz'^2}{r_0^2} dz'. \quad (17)$$

Дисперсия условного распределения флуктуаций относительной амплитуды двух лучей зависит не только от пройденного пути z , но и от расстояния между лучами $\rho(z)$. Поведение ρ в (16), (17) подчиняется логарифмически нормальному распределению (13), достаточно подробно исследованному в работе [3]. Поэтому в выражении (17) для $\rho^2(z)$ можно выбрать как второй момент $\overline{\rho^2} = \rho_0^2$, так и среднее значение $(\overline{\rho})^2 = \rho_0^2 e^{-\sigma^2}$, определяемые из распределения (13).

Интегрируя (17), найдем

$$\sigma_{A_-}^2 = 16 \frac{\rho^2(z)}{r_0^2} \sigma^2, \quad \sigma^2 = \frac{4Dz^3}{r_0^2} = \alpha^2 \varepsilon_\alpha^2 \sqrt{\pi} \left(\frac{z}{r_0} \right)^3 \quad (18)$$

Рассматривая первый вариант, $\overline{\rho^2} = \rho_0^2$, получим для квадратного корня из дисперсии, или стандартного отклонения σ_{A_-} , выражение

$$\sigma_{A_-} = 4 \frac{\rho_0}{r_0} \sigma. \quad (19)$$

Таким образом, дисперсия относительной амплитуды пропорционально кубической зависимости от пройденного лучами пути (18), т. е. определяется лишь диффузионным расплыванием.

Во втором варианте, когда среднее расстояние между лучами уменьшается в соответствии с $\overline{\rho} = \rho_0 e^{-\sigma^2/2}$, стандартное отклонение равно

$$\sigma_{A_-} = 4 \frac{\rho_0}{r_0} \sigma e^{-\sigma^2/2}. \quad (20)$$

Заметим, что для малых σ (18) различие между (19) и (20) мало. С ростом σ начинается сближение лучей, вызывающее уменьшение дисперсии относительной амплитуды.

На рис. 1 представлены графики зависимости стандартного отклонения флуктуаций относительной амплитуды от пройденного пути z . Кривые 1, 2 описывают поведение исследуемой величины в E -слое области ионосферы с параметрами $\alpha^2 \varepsilon_\alpha^2 = 10^{-6}$, $r_0 = 0.5$ км,

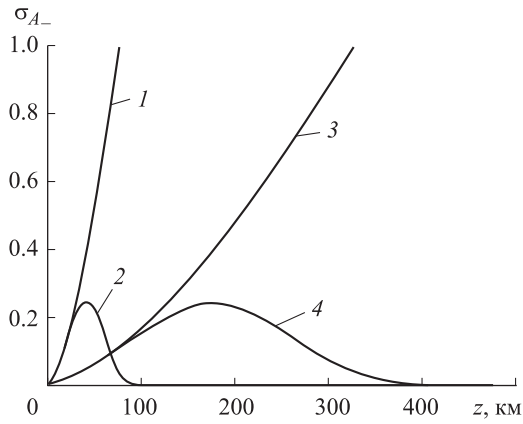


Рис. 1. Зависимость стандартного отклонения условного распределения флуктуаций относительной амплитуды двух лучей от пройденного пути z (16), (17). Кривые 1, 2 описывают σ_{A-} в E -слое ионосферы, кривые 3, 4 относятся к тропосфере. Графики 1, 3 определяют поведение стандартного отклонения при условии, что $\rho^2(z) = \bar{\rho}^2 = \rho_0^2$. Графики 2, 4 выполнены в предположении, что $\rho^2(z) = (\bar{\rho})^2 = \rho_0^2 e^{-\sigma^2}$

$\rho_0 = 0.05$ км [7]. Кривые 3, 4 относятся к тропосферному распространению радиоволн: $\alpha^2 \varepsilon_\alpha^2 = 10^{-10}$, $r_0 = 0.1$ км, $\rho_0 = 0.01$ км [7]. Заметим, что координата $z=0$ соответствует началу слоя. Графики 1, 3 определяют поведение σ_{A-} в ионосфере (кривая 1) и тропосфере (кривая 3) в соответствии с первым вариантом (19). Второй вариант относится к случаю, который описывается выражением (20) и представлен кривыми 2 (E -слой), 4 (тропосфера).

В области тропосферного распространения, как следует из рис. 1, на расстоянии порядка 50 км кривые 3, 4 начинают расходиться. Поскольку это расстояние превышает размеры слоя, то, как следует из работы [3], при рассеянии в тропосфере не происходит уменьшения расстояния между лучами, а рост σ_{A-} вызван диффузией.

Однако в области ионосферного распространения, как видно из поведения графиков 1, 2, уже на расстоянии порядка 15–20 км заметно расхождение кривых. Таким образом, в области E -слоя ионосферы происходит уменьшение расстояния между лучами (кривая 2 соответствует второму варианту (20)), и рост стандартного отклонения замедляется, поскольку диффузионному расплыванию начинает препятствовать уменьшение дисперсии, вызванное сближением лучей.

В качестве иллюстрации на рис. 2 представлен условный закон распределения относительной амплитуды (16), (17) в E -слое ионосферы для различных значений z , когда расстояние между лучами выбрано в соответствии со вторым вариантом (19). Однако даже при распространении в ионосфере, как следует из рис. 1 (кривая 2), рост дисперсии, вызванный диффузией, превосходит уменьшение дисперсии, связанное со сближением лучей. Уменьшение интенсивности флуктуаций относительной амплитуды двух лучей становится

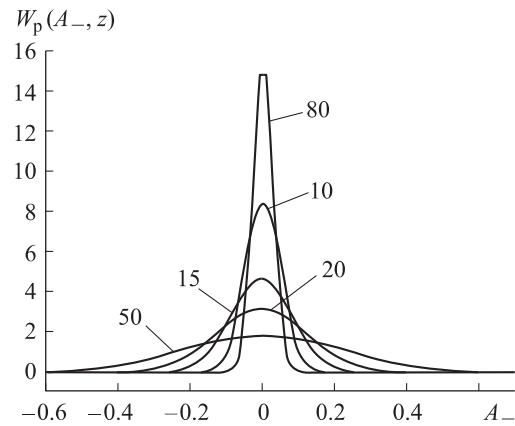


Рис. 2. Нормальный условный закон распределения относительной амплитуды для различных пройденных расстояний z (указаны в километрах для каждой кривой) в области E -слоя ионосферы в предположении, что расстояние между лучами удовлетворяет условию

$$\rho^2(z) = (\bar{\rho})^2 = \rho_0^2 e^{-\sigma^2}$$

заметным лишь на расстояниях порядка 40 км, которые уже превосходят размеры E -слоя ионосферы.

Заключение

Рассмотренная в настоящей работе задача о совместной диффузии двух лучей решена для случая, когда расстояние между лучами значительно меньше радиуса корреляции неоднородностей. Получено уравнение Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятностей расстояния между лучами и относительной амплитуды. Решение уравнения основано на предположении, что распределение расстояния между лучами удовлетворяет логарифмически нормальному закону, полученному в работе [3]. Показано, что условное распределение относительной амплитуды подчиняется нормальному закону с нулевым средним и дисперсией, зависящей от расстояния между лучами. Проведен анализ дисперсии для различных вариантов поведения расстояния между лучами в E -слое ионосферы и в тропосфере.

Список литературы

1. Власова О.К., Приходько Л.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 5. С. 18.
2. Кляцкин В.И., Татарский В.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. 14, № 5. С. 707.
3. Власова О.К., Приходько Л.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 2. С. 37.
4. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Физматлит. М., 2008.
5. Власова О.К., Приходько Л.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 4. С. 38.
6. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947.
7. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М., 1961.

The fluctuations of the wave amplitude at the mutual diffusion of rays in a medium with random inhomogeneities**O. K. Vlasova**^{1,a}, **L. I. Prikhod'ko**^{2,b}¹*Center of Hydrophysical Research;* ²*Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.**E-mail:* ^a*vlasovaok@mail.ru,* ^b*l.prihodko@mail.ru.*

Amplitude fluctuations of the plane wave and positions of two rays, propagating in a medium with random inhomogeneities of dielectric permittivity, are considered. The solution of the problem is based on the rays diffusion method. The probabilities density of the distance between rays are obtained by making use the Einstein–Fokker equation for a case when an initial distance between rays is much smaller than the correlation radius of fluctuations of dielectric permittivity. A conditional probability density of the relative amplitude is found in case when a distribution of distances between rays is defined by a logarithmic normal law obtained not accounting the amplitude fluctuation. A numerical analysis of the obtained analytical solution is carried out for a case of short wave propagations in troposphere and ionosphere.

Keywords: random media, rays diffusion, Einstein–Fokker equation.

PACS: 41.20.Jb.

Received 27 October 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin 2(2013).*

Сведения об авторах

1. Власова Ольга Кузьминична — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник, e-mail: vlasovaok@mail.ru.
2. Приходько Лидия Ивановна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; e-mail: l.prihodko@mail.ru.