Эффект Ааронова–Бома в трехмерной модели Гросса–Невё с компактификацией при конечной температуре

В. Ч. Жуковский[a], П. Б. Колмаков[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] *zhukovsk@phys.msu.ru,* [b] *pavel.b.kolmakov@yandex.ru*

Статья поступила 01.03.2013, подписана в печать 03.04.2013.

Исследована модель Гросса–Невё в (2+1)-мерном пространстве-времени с одним компактифицированным пространственным измерением (цилиндр) с нетривиальными граничными условиями. Рассмотрен эффект Ааронова–Бома, индуцированный находящимся внутри цилиндра магнитным потоком. Обсуждается возможность применения полученных результатов к описанию полимерных трубок.

Ключевые слова: эффект Ааронова–Бома, модель Гросса–Невё, компактификация.
УДК: 530.145. PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz, 11.10.Wx.

Введение

Понятия нарушения и восстановления симметрии входят в число ключевых для физики высоких энергий. В ряде моделей квантовой теории поля можно наблюдать зависимость сохранения или нарушения симметрии от внешних параметров, задаваемых для модели, что позволяет говорить о фазовом переходе между симметричной и несимметричной фазами.

Механизм нарушения симметрии, получивший название «механизма Хиггса», позволил построить теорию электрослабых взаимодействий, объединив таким образом в рамках неабелевой калибровочной симметрии электромагнитные и слабые взаимодействия.

В ряде моделей возникает также механизм нарушения киральной симметрии при помощи радиационных поправок — динамическое нарушение симметрии. Как правило, данный механизм нарушения симметрии характерен для моделей с четырехфермионным взаимодействием. Данный класс моделей неперенормируем в четырехмерном пространстве, по крайней мере в рамках стандартной теории возмущений, что, однако, не мешает рассматривать эти теории как эффективные теории в четырехмерии и как «игрушечные модели» в маломерных пространствах (где они перенормируемы).

Одной из простейших, но в то же время крайне продуктивных моделей этого типа является модель Гросса–Невё [1], на которой в дальнейшем и будет сосредоточено наше внимание. Помимо применения в качестве иллюстрации к явлениям квантовой хромодинамики (асимптотическая свобода, спонтанное нарушение симметрии и др.) она нашла широкое применение в качестве эффективной модели для описания явлений в физике конденсированного состояния вещества. Лагранжианы типа (1+1)-мерной модели Гросса–Невё возникают при описании одномерных полимеров (таких как полиацетилен [2]), а (1+2)-мерной при описании планарных систем, таких как графен. Это обстоятельство делает особо интересным рассмотрение модели Гросса–Невё при ненулевых значениях таких параметров, как температура, химический потенциал, внешнее магнитное поле и др., чему посвящено большое количество работ (например, [3–7]).

Действие модели Гросса–Невё в D-мерном пространстве записывается в виде [1]

$$S=\int d^Dx\left[\sum_{k=1}^{N}\overline{\psi}_k i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_k+\frac{G}{2N}\left(\sum_{k=1}^{N}\overline{\psi}_k\psi_k\right)^2\right]. \qquad (1)$$

Здесь N — число ароматов фермионов, D — размерность пространства-времени, суммирование по ароматам далее указываться не будет, и запись $\overline{\psi}\hat{O}\psi$ следует понимать как $\sum\limits_{k=1}^{N}\overline{\psi}_k\hat{O}\psi_k$.

В настоящей работе модель Гросса–Невё рассматривается в (2+1)-мерном пространстве-времени с одним компактифицированным пространственным измерением (цилиндр, в приложении к полимерам моделирующий трубки) с нетривиальными граничными условиями и конечной температурой (учет которой эквивалентен компактификации временно́го измерения). Следует отметить, что поведение квантовых полей в пространствах с компактификацией вызывает интерес еще со времен работ Калуцы и Клейна [8]. При этом возникает чисто топологический механизм генерации массы, а соответствующие массивные частицы принято называть калуца-клейновскими модами. Из недавних работ влияние калуца-клейновских частиц на динамическую генерацию массы фермионов в маломерных моделях рассматривалось в [9].

Можно показать, что в пространстве с компактифицированным измерением, имеющим индекс d, можно частично зафиксировать калибровку абелевого поля таким образом, чтобы выполнялось условие $A_d=\mathrm{const}(x_d)$ (подробнее см., например, [10]). На 2+1-мерном цилиндре такая конфигурация электромагнитного потенциала может возникнуть, если он вложен в обычное 4-мерное пространство и вдоль оси цилиндра направлено магнитное поле, создающее ненулевой поток (при этом непосредственно на поверхности цилиндра магнитное поле может быть равно нулю). В [11], кроме того, показано, что такой вектор-потенциал входит в лагранжиан так же, как входило бы в него нетривиальное условие периодичности — топологическая фаза:

$$\psi(x_d + L) = e^{i\phi}\psi(x_d), \tag{2}$$

где $\phi = eLA_d/2\pi$, а L — длина окружности компактифицированного измерения. Подробно поведение такой модели без учета температуры было рассмотрено в [12], а еще раньше рассматривалось в [13].

Поскольку при такой конфигурации на самой поверхности цилиндра магнитное поле отсутствует (магнитный поток заключен внутри цилиндра) и взаимодействие происходит напрямую с вектор-потенциалом, данное явление можно трактовать как проявление эффекта Ааронова–Бома [14, 15].

1. Эффективный потенциал в форме, явно симметричной по компактифицированным измерениям

Выпишем действие модели Гросса–Невё в трехмерном пространстве-времени:

$$S = \int d^3x \left[\overline{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{G}{2N}\left(\overline{\psi}\psi\right)^2\right]. \tag{3}$$

Всюду в данной работе используется (приводимое) представление γ-матриц ранга 4:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & -\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & -i\sigma^3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где σ^i — матрицы Паули.

Действие обладает $\boldsymbol{U}(N)$-симметрией по ароматам, а также $\boldsymbol{Z}(2)$-киральной симметрией:

$$\begin{aligned} \psi_L(x_0,x_1,x_3)' &= \pm\psi_L(x_0,x_1,-x_3), \\ \overline{\psi}_L(x_0,x_1,x_3)' &= \pm\overline{\psi}_L(x_0,x_1,-x_3), \\ \psi_R(x_0,x_1,x_3)' &= \mp\psi_R(x_0,x_1,-x_3), \\ \overline{\psi}_R(x_0,x_1,x_3)' &= \mp\overline{\psi}_R(x_0,x_1,-x_3), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\psi_{R,L}(x) = \frac{1\pm\gamma^2}{2}\psi, \quad \overline{\psi}_{R,L}(x) = \overline{\psi}\frac{1\mp\gamma^2}{2}.$$

Используем преобразование Стратоновича–Хаббарда [16], чтобы преобразовать действие. Для этого введем вспомогательное поле

$$\sigma(x) = \frac{G}{N}\overline{\psi}(x)\psi(x). \tag{6}$$

После этого действие можно переписать в виде

$$S = \int d^3x \left[\overline{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \overline{\psi}\psi\sigma + \frac{N}{2G}\sigma^2\right]. \tag{7}$$

Несложно убедиться, что на уравнениях движения для вспомогательного поля σ преобразованное действие эквивалентно исходному действию модели Гросса–Невё.

Далее мы используем приближение среднего поля, справедливое при большом числе ароматов N (в пределе $N\to\infty$) $\sigma = \mathrm{const}(x) = \frac{G}{N}<\overline{\psi}\psi>$ (метод разложения по степеням $1/N$, ведущим порядком которого является приближение среднего поля, достаточно подробно обсуждался в [17]). В том случае если $\sigma \neq 0$ (что можно трактовать как возникновение кирального конденсата σ), в лагранжиане появляется слагаемое $\sigma\overline{\psi}\psi$, по виду аналогичное массовому члену (отсутствующему в исходной модели) и нарушающее киральную симметрию.

В импульсном представлении действие записывается в виде

$$S = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\overline{\psi}(-p)\left[i\gamma^\mu k_\mu - \sigma\right]\psi(p) + \frac{NV}{2G}\sigma^2, \tag{8}$$

где V — объем пространства-времени. Переходя от производящего функционала $Z = \int D\overline{\psi}D\psi \exp\left(iS\left[\psi,\overline{\psi}\right]\right)$ к эффективному потенциалу с использованием соотношения $Z = \exp(-NVV_{\mathrm{eff}})$, получаем для него выражение

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{eff}} &= \frac{\sigma^2}{2G} - i\,\mathrm{Tr}_{xs}\ln(i\gamma^\mu\partial_\mu - \sigma) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2G} - \int\frac{dp_1}{2\pi}\frac{1}{\beta}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}_s\ln(-\gamma^\mu p_\mu - \sigma), \end{aligned} \tag{9}$$

где введено Фурье-разложение (индекс n), связанное с компактификацией одного из пространственных измерений (длина окружности L), и учтена путем использования стандартной техники разложения по мацубаровским частотам $\omega_l = (2\pi/\beta)(l+1/2)$ $(l = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ конечная температура T $(\beta = 1/T$ — обратная температура; подробнее см. [18]); индексы x и s у операций взятия следа означают соответственно интегрирование по пространству и взятие следа по спинорным индексам. После несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} - 2\int\frac{dp_1}{2\pi}\frac{1}{\beta}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ln\Bigg[\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2(l+1/2)^2 + \\ + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(n-\phi)^2 + p_1^2 + \sigma^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{10}$$

Как можно видеть из формулы (10), учет конечной температуры и компактификации пространственного измерения входят в эффективный потенциал симметрично при топологической фазе $\phi = 1/2$. Воспользовавшись представлением собственного времени

$$\ln\frac{A}{B} = -\int_0^\infty\frac{ds}{s}(\exp(-sA) - \exp(-sB)) \tag{11}$$

и формулой пересуммирования Пуассона

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-s\left(\frac{2\pi l}{B} + C\right)^2\right] = \\ = \frac{B}{2\sqrt{\pi s}}\left[1 + 2\sum_{l=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{B^2l^2}{4s}\right)\cos(BCl)\right], \end{aligned} \tag{12}$$

эффективный потенциал можно переписать в виде

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} + \frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^\infty\frac{ds}{s^{5/2}}\left[\exp(-s\sigma^2)\right]\times$$

$$\times \left[1 + 2\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)^l \exp\left(-\frac{\beta^2 l^2}{4s}\right)\right] \times$$
$$\times \left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{L^2 n^2}{4s}\right)\cos(2\pi n\phi)\right] + \text{c.t.}, \quad (13)$$

где контрчлен c.t. представляет собой вклад свободного фермионного поля и не содержит зависимости от σ; поскольку нас будет интересовать уравнение щели $\partial V_{\text{eff}}/\partial\sigma = 0$ и вторая производная $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial\sigma^2$ (см. ниже), далее контрчлен мы писать не будем. В этом выражении различные комбинации слагаемых в двух последних множителях соответствуют различным физическим ситуациям. Учет только слагаемых, равных единице, вместе со слагаемым $\sigma^2/2G$ соответствует обычной «плоской» (2+1)-мерной модели Гросса–Невё без компактификации и внешних полей при нулевой температуре:

$$V_{(0)} = \frac{\sigma^2}{2G} + \frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}}\exp(-s\sigma^2). \quad (14)$$

Слагаемое, содержащее β в первом сомножителе, представляет собой температурную поправку (восстановление симметрии при высоких температурах — одна из черт модели Гросса–Невё, заставляющая обратить на нее внимание):

$$V_{(T)} = \frac{1}{2\pi^{3/2}}\int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}}\left[\exp(-s\sigma^2)\right]\left[2\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)^l\exp\left(-\frac{\beta^2 l^2}{4s}\right)\right]. \quad (15)$$

Слагаемое, содержащее L во втором сомножителе, характеризует поправки связанные с компактификацией и граничными условиями при нулевой температуре (такая модель рассматривалась ранее в [11]):

$$V_{(A)} = \frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}}\left[\exp(-s\sigma^2)\right] \times$$
$$\times \left[2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{L^2 n^2}{4s}\right)\cos(2\pi n\phi)\right]. \quad (16)$$

Наконец, одновременный учет слагаемых, содержащих как L, так и β, позволяет одновременно учесть влияние конечной температуры и компактификации пространственного измерения:

$$V_{(\times)} = \frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}}\left[\exp(-s\sigma^2)\right] \times$$
$$\times \left[2\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)^l\exp\left(-\frac{\beta^2 l^2}{4s}\right)\right] \times$$
$$\times \left[2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{L^2 n^2}{4s}\right)\cos(2\pi n\phi)\right]. \quad (17)$$

Действие в целом равно сумме слагаемых:

$$V_{\text{eff}} = V_{(0)} + V_{(T)} + V_{(A)} + V_{(\times)} + \text{c.t.} \quad (18)$$

Преобразуем слагаемое $V_{(0)}$, отвечающее за «плоскую» модель Гросса–Невё. Выражение под интегралом является расходящимся. Регуляризуем его, введя дополнительное слагаемое в показатель экспоненты:

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}}\exp(-s\sigma^2) \to \int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}}\exp\left(-s\sigma^2 - \frac{\alpha^2}{s\Lambda^2}\right), \quad (19)$$

где снятие регуляризации достигается при $\Lambda \to \infty$, а числовой коэффициент α введен для удобства дальнейшего сравнения с работами, в которых используются различные схемы регуляризации.

Воспользуемся формулой [19, с. 344, ф. 2.3.16.3]

$$\int_0^\infty x^{-n-1/2}e^{-px-q/x}\,dx = (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{\partial^n}{\partial q^n}e^{-2\sqrt{pq}}. \quad (20)$$

Подставляя $p = \sigma^2$, $q = \alpha^2/\Lambda^2$, $n = 2$ и собирая малые по $1/\Lambda$ члены, которые мы в дальнейшем писать не будем, в символ $\mathcal{O}$, после упрощения получим

$$V_{(0)} = \frac{\sigma^3}{3\pi} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{G} - \frac{\Lambda}{2\pi\alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \quad (21)$$

Исследуем теперь вопрос о нарушении симметрии. Уравнение для щели в точке фазового перехода $\sigma = 0$ запишем в виде (см., например, [20])

$$\left.\frac{\partial V_{(0)}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0. \quad (22)$$

При этом

$$\left.\frac{\partial^2 V_{(0)}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0} = \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c}, \quad (23)$$

и тогда при $G > G_c$ в точке $\sigma = 0$ имеется локальный максимум — симметрия нарушена.

Критическая константа связи, при которой возникает нарушение киральной симметрии, при такой регуляризации оказывается равной

$$G_c = \frac{2\pi\alpha}{\Lambda}. \quad (24)$$

Температурная $V_{(T)}$ и компактификационная $V_{(A)}$ поправки рассчитываются аналогично потенциалу «плоской» модели с использованием формулы (20), суммы при этом берутся в специальных функциях:

$$V_{(T)} = \frac{2}{\pi\beta^3}\left[\sigma\beta\,\text{Li}_2\left(-e^{-\sigma\beta}\right) + \text{Li}_3\left(-e^{-\sigma\beta}\right)\right], \quad (25)$$

$$V_{(A)} = \frac{1}{\pi L^3}\Big[\sigma L\,\text{Li}_2\left(e^{-\sigma L-2\pi i\phi}\right) + \sigma L\,\text{Li}_2\left(e^{-\sigma L+2\pi i\phi}\right) +$$
$$+ \text{Li}_3\left(e^{-\sigma L-2\pi i\phi}\right) + \text{Li}_3\left(e^{-\sigma L+2\pi i\phi}\right)\Big] =$$
$$= \frac{2}{\pi L^3}\left[\sigma L\,\text{Re}\,\text{Li}_2\left(e^{-\sigma L-2\pi i\phi}\right) + \text{Re}\,\text{Li}_3\left(e^{-\sigma L-2\pi i\phi}\right)\right], \quad (26)$$

где Li — специальные функции — полилогарифмы (в данном случае ди- и трилогарифмы; см. [19]), а символ Re означает действительную часть. Наконец перекрестная часть $V_{(\times)}$ не поддается прямому вычислению в специальных функциях, поэтому выпишем ее представление в виде ряда и далее будем учитывать ее, проводя численные расчеты на ЭВМ:

$$V_{(\times)} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{(-1)^m\cos(2\pi n\phi)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\exp\left(-\sigma\sqrt{\beta^2m^2+L^2n^2}\right)\frac{\sigma\sqrt{\beta^2m^2+L^2n^2}+1}{\left(\sqrt{\beta^2m^2+L^2n^2}\right)^3}\right]\right\}. \tag{27}$$

Следует отметить, что поправки $V_{(T)}$ и $V_{(A)}$ явно конечны при любых σ, что видно из их аналитических выражений, равно как и «перекрестная» поправка $V_{(\times)}$, сходимость ряда которой обеспечивается экспоненциальным множителем при $\sigma \neq 0$ и знакопеременностью ряда с учетом поведения знаменателя при $\sigma = 0$.

В точке экстремума $\left.\frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0$ вторая производная оказывается равной

$$\left.\frac{\partial^2 V_{\rm eff}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0} = \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c} + \frac{2\ln(2)}{\pi\beta} + \frac{2\ln(2)}{\pi L} + \frac{2\ln|\sin\pi\phi|}{\pi L} +$$
$$+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{(-1)^m\cos(2\pi n\phi)}{\sqrt{\beta^2m^2+L^2n^2}}\right], \tag{28}$$

где

$$\left.\frac{\partial^2 V_{(0)}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0} = \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c},$$

$$\left.\frac{\partial^2 V_{(T)}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0} = \frac{2\ln(2)}{\pi\beta},$$

$$\left.\frac{\partial^2 V_{(A)}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0} = \frac{2\ln(2)}{\pi L} + \frac{2\ln|\sin\pi\phi|}{\pi L},$$

$$\left.\frac{\partial^2 V_{(\times)}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{(-1)^m\cos(2\pi n\phi)}{\sqrt{\beta^2m^2+L^2n^2}}\right].$$

Следует отметить наличие логарифмических расходимостей в $\left.\frac{\partial^2 V_{(A)}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0}$ и $\left.\frac{\partial^2 V_{(\times)}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0}$ при $\phi = 0$. В разд. 2 будет показано, что эти расходимости взаимно уничтожаются.

На рис. 1 приведены фазовые диаграммы модели в плоскостях (L, β) и (ϕ, β) при различных значениях параметров. При этом всюду далее при построении графиков считается, что $G > G_c$, т. е. киральная симметрия при $T \to 0$, $L \to \infty$ нарушена. На всех графиках закрашенная область соответствует симметричной фазе, а незакрашеная — фазе с нарушенной симметрией.

Значение $\phi = 0.05$ выбрано как близкое к нулю, далее будет показано, что фазовая диаграмма при $\phi \equiv 0$ качественно совпадает с этой (рис. 2); для ее построения, однако, придется вычислить производную эффективного потенциала в иной форме, в которой не наблюдается явной симметрии между L и β. На диаграмме, соответствующей $\phi = 1/2$, можно видеть, что, как следовало ожидать из формулы (10), в этом

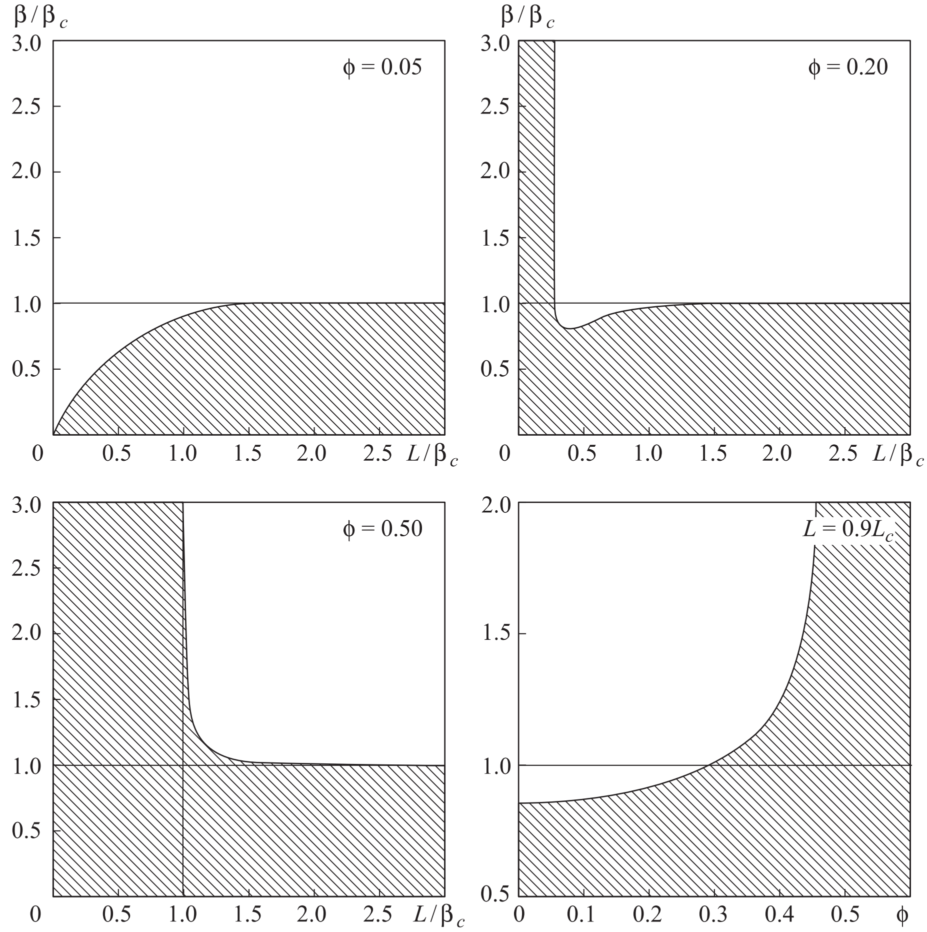

Рис. 1. Фазовые диаграммы модели в плоскости (L, β) при различных значениях топологической фазы и в плоскости (ϕ, β) при фиксированом $L < L_c$. Закрашенная область соответствует симметричной фазе

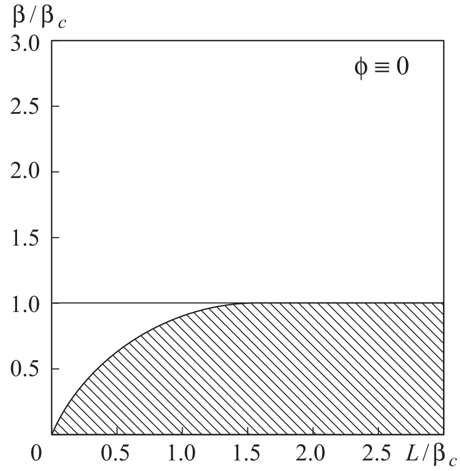

Рис. 2. Фазовая диаграмма модели в плоскости (L,β) при периодических граничных условиях (закрашенная область соответствует симметричной фазе)

случае наблюдается симметрия между влиянием конечной температуры и включением компактификации пространственного измерения, при этом уменьшение длины компактифицированного измерения соответствует увеличению температуры (т. е. уменьшению обратной температуры β). Вопросы нарушения симметрии и размерной редукции данной модели без учета температуры обсуждались ранее, в частности в [20] при периодических ($\phi=0$) и антипериодических ($\phi=1/2$) граничных условиях.

Интерес представляет также то, что при малых ϕ для восстановления симметрии требуется температура выше критической в «плоской» модели, и в то же время получен вполне ожидаемый результат, что при достаточно высокой температуре симметрия может быть восстановлена при любом значении топологической фазы и радиуса компактификации.

2. Поведение модели в отсутствие топологической фазы

Из предыдущей части рассмотрения можно видеть, что особый интерес представляет случай $\phi=0$, соответствующий отсутствию магнитного поля (фактически характерные значения магнитного поля достижимы, но достаточно велики). Однако, как было показано в предыдущих разделах, при строго периодических по компактифицированному пространственному измерению граничных условиях (при $\phi=0$) взятые отдельно вторые производные чисто компактификационной и перекрестной частей содержат логарифмические расходимости, поэтому в этой части рассмотрения сконцентрируемся на этом случае и исследуем поведение системы.

Не будем разделять, как это делалось прежде, компактификационную и перекрестную части. Для этого вернемся к общему виду эффективного потенциала и не станем подвергать пересуммированию Пуассона температурную часть:

$$V_{\text{eff}}=\frac{\sigma^2}{2G}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{s^2}\left[\exp(-s\sigma^2)\right]\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\beta}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-s\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2(m+1/2)^2\right)\right]\times$$
$$\times\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{L^2n^2}{4s}\right)\right].\qquad(29)$$

Чисто температурная, равно как и плоская, части нас сейчас интересовать не будут (результаты для них можно взять из соответствующих частей настоящей работы), выпишем компактификационную часть с учетом температуры:

$$V_{(A+\times)}=$$
$$=\frac{2}{\pi\beta}\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{s^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left[-s\left(\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2(m+1/2)^2+\sigma^2\right)-\frac{L^2n^2}{4s}\right]=$$
$$=\frac{2}{\pi\beta}\int\limits_0^{\infty}d\mathfrak{s}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{\mathfrak{s}}\left(\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2(m+1/2)^2+\sigma^2\right)-\mathfrak{s}\frac{L^2n^2}{4}\right].\qquad(30)$$

Здесь мы перешли к переменной интегрирования $\mathfrak{s}=1/s$. Интеграл по $\mathfrak{s}$ берется в спецфункциях [19, ф. 2.3.16.1 при $\alpha=1$]:

$$\int\limits_0^{\infty}\exp(-px-q/x)=2\sqrt{\frac{q}{p}}\,\mathrm{K}_1\left(2\sqrt{pq}\right).\qquad(31)$$

Таким образом,

$$V_{(A+\times)}=\frac{8}{\pi\beta}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{(2\pi/\beta)^2\,(m+1/2)^2+\sigma^2}}{Ln}\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{K}_1\left(Ln\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\sigma^2}\right).\qquad(32)$$

Сумма ряда не является элементарной функцией (в широком смысле), однако с учетом асимптотики функции Макдональда при больших аргументах

$$\mathrm{K}_\nu(x)\underset{x\to\infty}{\sim}\sqrt{\pi/2}\,\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(1+\mathcal{O}(x^{-1})\right)$$

сходимость ряда не вызывает сомнений. Чтобы продвинуться дальше, продифференцируем полученную часть эффективного потенциала по σ и выпишем значения производных при $\sigma=0$:

$$\left.\frac{\partial V_{(A+\times)}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0}=0,\qquad(33)$$

$$\left.\frac{\partial^2 V_{(A+\times)}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=0}=\frac{8}{\pi\beta}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{K}_1(x)}{x}-\frac{1}{2}\,\mathrm{K}_0(x)-\frac{1}{2}\,\mathrm{K}_2(x)\right],\qquad(34)$$

где $x=2\pi(L/\beta)n(m-1/2)$.

Выражение под знаком суммирования очевидно ведет себя как $e^{-\mathcal{O}(mn)}$ при $m\to\infty$ и/или $n\to\infty$, и сходимость суммы не вызывает сомнений. Таким образом, показано, что возникавшие при $\phi=0$ расходимости на самом деле фиктивны и были исключительно следствием искусственного разделения эффективного потенциала на составные части.

На рис. 2 приведена фазовая диаграмма модели в плоскости (L, β) при $\phi = 0$. Можно заметить, что она практически не отличается от диаграммы на рис. 1, соответствующей $\phi = 0.05$. Важно заметить, что при любом радиусе компактифицированного измерения и любом значении топологической фазы, при достаточно высокой температуре симметрия может быть восстановлена.

3. Численные оценки характерных физических величин

Приведем теперь численные оценки характерных физических величин, рассматривавшихся в тексте работы. Приравняем энергетические масштабы (без численных коэффициентов): $\hbar c/L_c \sim kT_c$, откуда, считая, что критическая температура имеет порядок комнатной $T_c \sim 300$ К $\sim 10^{2.5}$ К, можно получить $L_c \sim 10^5$ Å. Для физики конденсированного состояния роль «скорости света» играет скорость Ферми, значение которой зависит от вещества. Так, например, для графена эта скорость $v_{\mathrm{F}} \sim 10^6$ м/с $\sim c/300$ [3], а значит, $L_c^{\mathrm{graphene}} \sim L_c/300 \sim 300$ Å, что соответствует радиусу компактификации $R_c \sim 50$ Å, лежащему в пределах радиусов реально синтезированных углеродных нанотрубок. Характерные значения магнитных полей можно оценить, исходя из связи магнитного поля со значением топологической фазы (2) и того факта, что $2\pi A_2 = \pi R^2 H$, откуда

$$H = \frac{2\phi}{eR^2} = \frac{\phi}{2\pi^2}\left(\frac{m_e^2}{e}\right)\left(\frac{2\pi}{m_e R}\right)^2 = \frac{\phi}{2\pi^2}\left(\frac{\lambda_e}{R}\right)^2 H_0,$$

где выделены критическое («швингеровское») магнитное поле $H_0 = m^2/e \approx 4.41 \cdot 10^9$ Тл и комптоновская длина волны электрона $\lambda_e = 2\pi/m_e \approx 0.0242$ Å, после чего, приняв в качестве радиуса компактификации характерный радиус углеродных нанотрубок $R \sim 10$ Å, получим для значения магнитного поля $H \sim 3 \cdot 10^{-7} \phi H_0 \underset{\phi=1/2}{=} 662$ Тл (для сравнения, реально полученные постоянные магнитные поля имеют порядок 10^1–10^2 Тл). В графене соответствующее значение оказывается еще меньше $H^{\mathrm{graphene}} \sim H/300 \sim 2$ Тл.

Заключение

В настоящей работе исследована (2+1)-мерная модель Гросса–Невё с компактифицированным пространственным измерением (цилиндр) при наличии внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра, с учетом конечной температуры. Получены явные выражения для эффективного потенциала модели (21), (25)-(27), (18). При помощи ЭВМ построены фазовые диаграммы системы при различных значениях внешних параметров (рис. 1, 2).

Продемонстрировано, что возникающие при вычислениях расходимости, затрудняющие расчет при малых значениях магнитного поля, связаны с искусственным разбиением эффективного потенциала на составные части. Для устранения подобных фиктивных расходимостей предложена другая форма записи, в которой, однако, становится не столь явной симметрия, присущая эффективному потенциалу.

В заключение приведены оценки численных значений магнитных полей и радиусов компактификации, при которых могут наблюдаться рассматриваемые в работе эффекты. Полученные значения лежат в пределах возможностей современных экспериментов. При этом, как отмечалось во введении и разд. 3, рассмотренная модель квантовой теории поля находит применение в физике конденсированного состояния вещества и описывает электроны в двумерных полимерах, таких как графен. Заметным отличием такой теории от других применений модели Гросса–Невё является то, что в качестве «предельной скорости» выступает не скорость света в вакууме, а скорость Ферми в соответствующем полимере (для графена она приблизительно в 300 раз ниже скорости света в вакууме). Поскольку однослойные углеродные нанотрубки можно рассматривать в качестве свернутых в цилиндры различных диаметров листов графена, то это позволяет применить к ним описание, основанное на модели Гросса–Невё. При этом введенное нами условие периодичности (топологическая фаза) $\phi = 0$ соответствует нанотрубкам, проявляющим металлические свойства, а условие $\phi = 1/3$ — полупроводниковым нанотрубкам [21].

Авторы искренне благодарят участников научного семинара кафедры теоретической физики физического факультета МГУ за обсуждение работы и полезные замечания.

Список литературы

1. *Gross D.J., Neveu A.* // Phys. Rev. D. 1974. **10**. P. 3235.
2. *Caldas H.* // Nucl. Phys. B. 2009. **807**[FS]. P. 651.
3. *Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V.* et al. // Nature. 2005. **438**. P. 197.
4. *Вшивцев А.С., Магницкий Б.В., Жуковский В.Ч., Клименко К.Г.* // ЭЧАЯ. 1998. **29**, № 5. С. 1259.
5. *Caldas H., Ramos R.O.* // Phys. Rev. B. 2009. **80**. 115428.
6. *Ebert D., Klimenko K.G., Tyukov A.V., Zhukovsky V.Ch.* // Phys. Rev. D. 2008. **78**. P. 045008.
7. *Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhukovsky V.Ch.* // arXiv: 1106.2928. Hep-ph. 2011.
8. *Kaluza Th.* // Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1921. P. 966; *Klein O.* // Zeitsch. f. Phys. 1926. **37**. P. 895.
9. *Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Tyukov A.V.* // Mod. Phys. Lett. A. 2010. **25**. P. 2933.
10. *Raman S.* // arXiv:hep-th/0508134. 2005.
11. *Gamayun A.V., Gorbar E.V.* // Phys. Lett. B. 2005. **610**. P. 74.
12. *Song D.Y.* // Phys. Rev. D. 1993. **48**. P. 3925.
13. *Krive I.V., Naftulin S.A.* // Nucl. Phys. B. 1991. **364**. P. 541.
14. *Aharonov Y., Bohm D.* // Phys. Rev. 1959. **115**. P. 485.
15. *Ehrenberg W., Siday R.E.* // Proc. Phys. Soc. (London) B. 1949. **62**. P. 8.
16. *Стратонович Р.Л.* // Докл. АН СССР. 1957. **157**. С. 1097; *Hubbard J.* // Phys. Rev. Lett. 1959. **3**. P. 77.
17. *Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H.* // Phys. Rep. 1991. **205**. P. 59.
18. *Kapusta J.I., Gale C.* Finite-temperature Field Theory: Principles and Applications. Cambridge, 2006.
19. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М., 1981.
20. *Bietenholz W., Gfeller A., Wiese U.-J.* // JHEP. 2003. **10**. P. 018.
21. *Elizalde E., Odintsov S.D., Saharian A.A.* // Phys. Rev. D. 2011. **83**. P. 105023.

Aharonov–Bohm effect in 3D Gross–Neveu model with compactification at finite temperature

V. Ch. Zhukovsky[a], **P. B. Kolmakov**[b]

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *zhukovsk@phys.msu.ru,* [b] *pavel.b.kolmakov@yandex.ru.*

Gross-Neveu model in (2+1)-dimensional space–time with one compactified spatial dimension (cylinder) is investigated under the influence of non-trivial boundary conditions. The Aharonov–Bohm effect induced by magnetic flux contained within the cylinder is considered. Possible application of the results obtained for the description of polymeric tubes is discussed.

Keywords: Aharonov-Bohm effect, Gross-Neveu model, compactification.
PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz, 11.10.Wx.
Received 1 March 2013.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2013).

Сведения об авторах

1. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
2. Колмаков Павел Борисович — аспирант; тел.: (915) 308-01-93, e-mail: pavel.b.kolmakov@yandex.ru.