

Вероятностное описание турбулентных процессов в атмосфере

В. П. Юшков

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра физики атмосферы. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: yushkov@phys.msu.ru*

Статья поступила 27.11.2013, подписана в печать 01.05.2013.

Предложена схема перехода от статистического описания однородной и изотропной турбулентности к анизотропной плотности функции распределения. Обсуждается роль адиабатических движений в переносе энергии турбулентных флуктуаций по спектру. Обосновывается утверждение, что при больших числах Рейнольдса спектр энергии адиабатических флуктуаций на масштабах однородности и изотропности имеет вид планковской кривой.

Ключевые слова: турбулентность, адиабатические флуктуации, спектр, плотность вероятности.
УДК: 551.511:530.16. PACS: 92.60.N–.

Введение

Колмогоровская теория несжимаемой турбулентности считается краеугольным камнем теоретического анализа закономерностей турбулентного перемешивания [1, 2]. Однако начиная с работ Рейнольдса переход от гидродинамического описания турбулентности к вероятностному строился на определенных предположениях. Сами уравнения гидродинамики (Эйлера или Навье–Стокса) не содержат переменных, которые бы описывали понятия вероятности или статистического ансамбля, а дополнительные условия, которые накладываются на случайное поле скоростей, не связываются напрямую с исходными уравнениями. Кроме того, классические модели турбулентности, такие как модель Колмогорова, сильно идеализированы: например, исходно накладываемое приближение несжимаемости $\text{div } \mathbf{V} = 0$ не позволяет описывать взаимодействие несжимаемых турбулентных движений с адиабатическими флуктуациями.

В настоящей работе предлагается система утверждений, которая может быть положена в основу вероятностного описания макротурбулентного или «синоптического» перемешивания в атмосфере. Эта система является обобщением колмогоровского подхода к описанию однородной и изотропной турбулентности и дополняет предположения, накладываемые на случайные поля не только скоростей, но и флуктуаций плотности и температуры.

Следует отметить, что справедливость предлагаемого подхода еще только предстоит проверить на опыте, хотя сама эта система предположений, разумеется, не противоречит уже известным наблюдаемым закономерностям турбулентного перемешивания. Кроме того, предлагаемая система аксиом следует основополагающим идеям работ Колмогорова и Обухова. По этой причине повторение хорошо известных фактов классической теории турбулентности [1–3] можно считать излишним.

1. Положения вероятностного подхода

Выбор ключевой вероятностной характеристики турбулентного перемешивания в атмосфере не является очевидным. Возможно, ею должна стать не характе-

ристика случайного поля скоростей, а характеристика, которая по физическому смыслу соотносится с плотностью вероятности. Статистически эта характеристика имеет смысл плотности вероятности обнаружить воздушную частицу (лагранжеву частицу) единичной массы в некоторой пространственно-временной точке. Понятно, что такая пространственная точка, рассматриваемая статистически, содержит большое число одинаковых лагранжевых частиц, каждая из которых имеет свою гидродинамическую скорость. В статистической физике такую точку принято называть «физически бесконечно малой» [4]. Эта точка «растянута» и во времени, поскольку взаимодействие лагранжевых частиц не происходит мгновенно. Поэтому не следует смешивать изменение плотности вероятности в пространстве и времени и поток плотности вероятности со скоростями лагранжевых частиц, движение которых подчиняется классическим уравнениям гидродинамики. Такая плотность вероятности «в точке наблюдений» не совпадает с флуктуирующей характеристикой плотности воздуха, а является медленно изменяющейся величиной.

Известно, что наиболее плавно меняющейся термодинамической характеристикой в гидродинамике является энтропия: ее спектральное представление в уравнениях гидродинамики не имеет высокочастотной (адиабатической) компоненты [4]. Термодинамическую энтропию можно функционально связать с потенциальной плотностью, т. е. с плотностью воздуха, адиабатически приведенной к постоянной температуре. Потенциальная плотность ρ_s после локального усреднения по области однородности, изотропности и стационарности должна в статистическом предельном переходе давать плотность вероятности. Такая плотность вероятности для лагранжевых частиц сама изменяется в пространстве и времени, поэтому все статистические характеристики атмосферы могут рассчитываться только как средние по вероятности или «по массе» атмосферы: температура, импульс, момент импульса и пр., а сама система уравнений для плотности вероятности должна выражать законы сохранения в вероятностном смысле.

На локальных масштабах между плотностью вероятности и ее оценкой по измерениям потенциальной плотности существует фундаментальное различие. Разные лагранжевы частицы в одной точке наблюдений

могут обмениваться теплом, импульсом, адиабатически сжиматься и расширяться, образуя в совокупности статистический ансамбль, поэтому плотность вероятности не может быть определена в пространственно-временной точке по единичному измерению плотности воздуха и температуры. Таким образом, пространственные и временные координаты могут быть разделены на две совокупности: макроскопические $(\mathbf{r}, t)$, на которых изменяется плотность вероятности, и микроскопические (ξ, τ) , на которых измеряются гидродинамические характеристики членов статистического ансамбля лагранжевых частиц. Каждая такая частица имеет свою координату $\xi(\tau)$, гидродинамическую скорость $d\xi/d\tau$ и внутреннюю энергию $\mathcal{E}$ (или температуру). Из-за использования пространственных и временных координат и для определения плотности вероятности по измерениям (ξ, τ) , а также для определения изменения вероятности $(\mathbf{r}, t)$ возникает неопределенность плотности вероятности. Эта неопределенность вероятности не позволяет определять вероятность по локальному и мгновенному измерению и характеризует соотношение неопределенности между плотностью вероятности и измерениями плотности числа лагранжевых частиц (ошибку определения плотности вероятности).

Турбулентное перемешивание на «внутренних» масштабах следует считать локально стационарным процессом, т.е. статистические характеристики не должны зависеть от внутреннего времени τ . Для определения плотности вероятности по измерениям плотности воздуха необходимо считать, что плотность вероятности не изменяется за время таких измерений. Это приближение позволяет рассчитывать все статистические характеристики усреднением по внутреннему времени и строго определить понятие статистического ансамбля наблюдений. Если плотность вероятности ρ может быть определена для лагранжевых частиц и для нее справедливо уравнение неразрывности, то условие статистической стационарности характеристик турбулентности в точке измерений имеет вид $\partial\rho/\partial\tau = 0$, а поток вероятности $\mathbf{U} = \rho\mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ — «скорость» изменения вероятности, удовлетворяет условию несжимаемости: $\text{div } \mathbf{U} = 0$, которое замещает условие несжимаемости поля скоростей в теории турбулентности. Отметим, что плотность вероятности и поток вероятности не имеют случайной изменчивости, хотя сами и описывают эту случайную изменчивость распределения лагранжевых частиц.

Поскольку сами уравнения гидродинамики не содержат понятия плотности вероятности, уравнения для этой характеристики не обязательно будут гидродинамическими. Возможно, необходим другой подход, совместимый с известными постулатами теории турбулентности. Как показал Колмогоров [5], локально стационарный случайный процесс можно представить в форме статистического разложения по гармоническим функциям внутреннего времени: $e^{i\omega\tau}$. А. М. Обухов дополнил эту идею и показал, что и для пространственных координат можно подобрать систему ортогональных функций, которые статистически оптимально описывают случайные поля флуктуаций [6]. Если теперь представить *измеряемую* потенциальную плотность ρ_s в виде $\rho_s(\tau) = \psi^*(\tau)\psi(\tau)$, где $\psi(\tau) = \sum_k C_k e^{i\omega_k\tau}$, то

среднее по времени τ значение потенциальной плотности стремится к локальной плотности вероятности $\rho = \sum_k |C_k|^2$. Аналогичное разложение по внутренним пространственным масштабам при условии локальной однородности и изотропности приводит к разложению по пространственным гармоническим функциям аналогично разложению, предложенному А. М. Обуховым в работе [7]. Однако в случае пространственной анизотропии (из-за влияния силы тяжести) и ограниченности атмосферы в целом пространственные ортогональные функции не являются строго гармоническими, а лишь стремятся к ним с ростом волнового числа. На макроскопических масштабах коэффициенты разложения C_k сами являются функциями координат и времени. При спектральном разложении плотность вероятности описывается уже не какой-то заданной или «эмпирической» функцией, а может быть разложена по полной системе ортогональных функций $\{\psi_k\}$.

Важным свойством плотности вероятности является ее нормированность (сохранение числа лагранжевых частиц или массы атмосферы), поэтому ортогональные функции ψ_k можно определить только для атмосферы в целом. Главная область применения такого нелокального вероятностного подхода предполагается для описания планетарных стохастических процессов, поскольку изменение плотности функции распределения для лагранжевых частиц в наибольшей степени значимо для атмосферы в целом. Именно макротурбулентность, т.е. синоптическая изменчивость и планетарные процессы — циклоны и антициклоны, волны Россби и крупномасштабные конвективные ячейки, — не поддаются статистическому описанию в рамках теории локально изотропной и стационарной турбулентности. Такое статистическое описание крупномасштабных процессов характеризует климатическое состояние, или так называемые «типы циркуляции» атмосферы. В отличие от гидродинамической постановки задачи вероятностный подход позволяет ответить на вопрос, как часто будет наблюдаться то или иное синоптическое состояние. Динамика же отдельного синоптического состояния, разумеется, приближенно описывается гидродинамическими моделями.

Распределение вероятности не является непосредственно измеряемой величиной. Заключение о плотности распределения мы делаем на основе предположения о ее гладкости, т.е. о сохранении плотности вероятности за время проведения измерений. Мера гладкости плотности распределения и изменение ее во времени и пространстве зависит от «интенсивности перемешивания», которая имеет энергетическую оценку. Статистически энергетическая характеристика определяет пространственный и временной масштабы корреляций турбулентных флуктуаций и выравнивание пространственных неоднородностей плотности вероятности. Эта энергетическая характеристика служит целям регуляризации формального разложения: $\psi = \sum_k C_k \psi_k$, поскольку систему ортогональных функций можно выбрать различными способами. Другими словами, статистически оптимальная система ортогональных функций может быть выбрана на основе их энергетической оценки.

В заключение отметим еще одно свойство, связывающее физические характеристики и распределе-

ние вероятности. Произвольное векторное поле невозможно однозначно соотнести с единственной скалярной характеристикой ψ , поскольку оно может содержать как потенциальную, так и вихревую компоненту, а также компоненту, являющуюся решением уравнения Лапласа. В классической гидродинамике, например, хорошо известно разложение векторного поля скорости через совокупность трех скалярных полей, описываемых переменными Клебша λ, μ и ϕ , так что $\mathbf{V} = \lambda \nabla \mu + \nabla \phi$ [8]. Это представление показывает, что разные формы турбулентного движения (потенциальное, вихревое, спиральное) должны описываться через разные ортогональные функции ψ_k или разные ортогональные базисы. А физические характеристики, зависящие от распределения вероятности, могут быть связаны с этими ортогональными функциями плотности вероятности через операторное представление.

2. Представление Вигнера

В 1932 г. Е. Вигнер в попытке совмещения квантового и классического понимания вероятности предложил двухмасштабное представление волновой функции, соответствующее спектральному разложению Фурье, медленно зависящему от координат [9]. Через пару волновых функций $\psi^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})$ и $\psi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{x}$ — макрокоордината, а $\boldsymbol{\xi}$ — микрокоордината (векторные), одновременная «классическая» плотность вероятности $P(\mathbf{x}, \mathbf{V})$ может быть выражена посредством преобразования Сцилларда:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \int \psi^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \psi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \exp\left(\frac{2i\mathbf{V}\boldsymbol{\xi}}{\gamma}\right) d\boldsymbol{\xi}. \quad (1)$$

Здесь мы заменили импульс частицы на скорость $\mathbf{V}$, поскольку будем рассчитывать плотность вероятности для лагранжевых воздушных частиц единичной массы, а $\hbar$ на γ , чтобы не возникало путаницы с квантовой механикой и чтобы подчеркнуть, что само это преобразование не зависит от значения постоянной действия. Переход от волновой функции отдельных квантовых частиц к волновой функции одинаковых лагранжевых частиц базируется на статистическом перемешивании и принципе неразличимости лагранжевых частиц. Такой переход в квантовой механике был впервые предложен Ландау при описании квантовой жидкости — гелия II [10].

Если распределение вероятности для лагранжевых частиц в атмосфере можно определить через аналогичную функцию ψ , которая на локальных масштабах в области однородности и изотропности турбулентности не зависит от макрокоординаты $\mathbf{x}$, то преобразование Сцилларда имеет вид

$$P(\mathbf{V}) = \int \psi^*(\boldsymbol{\xi}) \psi(-\boldsymbol{\xi}) \exp\left(\frac{2i\mathbf{V}\boldsymbol{\xi}}{\gamma}\right) d\boldsymbol{\xi} \quad (2)$$

и эквивалентно ортогональному разложению турбулентных флуктуаций поля скоростей [7].

Конечно, классическое преобразование Фурье применимо только к функциям плотности вероятности, а не к случайным полям, т. е. соответствие между представлениями Колмогорова и Вигнера следует рассматривать как соответствие между случайным полем потенциальной плотности $\rho(\tau)$, которое можно измерять в экспери-

менте, и плотностью вероятности, которая не является измеряемой величиной. Чтобы между измерениями и вероятностями можно было поставить знак равенства, необходимо совершить предельный переход и рассмотреть статистический ансамбль лагранжевых частиц.

Преобразование, предложенное Вигнером, можно дополнить спектральным представлением по временной координате с учетом того, что лагранжевы частицы как члены ансамбля могут иметь разную внутреннюю энергию (температуру). Тогда временной или энергетический принцип неопределенности можно трактовать как невозможность мгновенного адиабатического приведения энергии лагранжевой частицы к среднему значению или как соотношение между характерной величиной флуктуаций температуры лагранжевых частиц и характерным временем релаксации этих флуктуаций к среднему значению. Распределение лагранжевых частиц по внутренней энергии $\mathcal{E}$ тогда будет иметь вид

$$P(t, \mathcal{E}) = \int \psi^*(t + \tau) \psi(t - \tau) \exp\left(\frac{2i\mathcal{E}\tau}{\gamma}\right) d\tau \quad (3)$$

и для стационарного состояния не будет зависеть от «внешнего» времени t .

Волновое представление стационарного и однородного случайного турбулентного поля позволяет использовать математический аппарат гамильтонова формализма, развитый для описания нелинейного взаимодействия случайных волновых полей [11]. Но чтобы рассуждать на языке нелинейного взаимодействия, необходимо показать, что скорость звука в атмосфере может зависеть от частоты или длины волны. Если скорость звука является функцией координат и времени, возможно случайной, то линейное дисперсионное соотношение $\omega = c_s k$, где $c_s = c_s(\mathbf{r}, t)$, как раз и описывает двухмасштабное спектральное разложение Фурье, предложенное Вигнером, поскольку сама скорость звука является медленно меняющейся функцией пространственно-временных координат. Чтобы получить нелинейные эффекты гамильтонова подхода или, например, брэгговское взаимодействие адиабатических волн с турбулентностью, следует рассмотреть произвольную пару высоких частот ω_m и ω_l , которые формально соответствуют внутренним масштабам турбулентности или «эффективным» флуктуациям энтропии, так что $\omega_l \sim \omega_m$ и $\delta\omega = |\omega_l - \omega_m| \ll \omega_l$. Тогда низкие частоты $\delta\omega$ и волновые числа δk будут описывать турбулентные изменения плотности вероятности и температуры (скорости звука), а высокие — ω_l, k_l — «тепловой шум» адиабатических колебаний.

Другими словами, случайные адиабатические флуктуации в турбулентной среде можно характеризовать некоторой «эффективной» частотой ω_* стоячих волн, понимая при этом, конечно, что спектр этих флуктуаций очень широк. Такие высокочастотные колебания на волновом языке моделируют тепловое «адиабатическое» движение, которое в консервативном приближении не требует внешних источников энергии. Если положить для этих самых больших волновых чисел $\gamma k_* = c_s$ и $\omega_* = c_s k_*$, то $\omega_* = c_s^2 / \gamma = \gamma k_*^2$. Это формальное нелинейное соотношение показывает, что «эффективные» адиабатические колебания, конечно, не являются гармоническими, поскольку время их затухания τ_*

близко к периоду самих колебаний, а «амплитуда» a_* таких адиабатических возмущений, связанная с характерной скоростью адиабатических движений соотношением $c_* = a_*/\tau_*$, имеет порядок длины волны, а число Маха близко к 1. Поэтому в области волновых чисел интервала диссипации «амплитуда» эффективных флуктуаций энтропии оказывается связанной с частотой ω_* . Флуктуации скорости звука формально соответствуют флуктуациям этой «эффективной» частоты ω_* , а распределение лагранжевых частиц по внутренней энергии (3) соответствует распределению по этим частотам.

Поток энергии от несжимаемых турбулентных неоднородностей к адиабатическим колебаниям обусловлен нелинейным характером уравнений гидродинамики [7]. Нелинейное взаимодействие адиабатических колебаний и турбулентного несжимаемого движения хорошо известно как взаимодействие звуковых волн и турбулентности и описано во многих учебниках (см., например, [12]). Формальное дисперсионное соотношение $\omega_* = \gamma k_*^2$ описывает баланс нелинейности и диссипации, статистически выражая влияние тепловых процессов на масштаб когерентности свободных или турбулентных адиабатических колебаний. Для турбулентных движений с малым числом Маха ($M = V/c_s$), если предположить, что в «инерционном» диапазоне однородной и изотропной турбулентности пространственные масштабы $2\pi/\delta k$ удовлетворяют условию $\delta k \ll k_*$ и $V \sim \gamma \delta k$, дисперсионное соотношение для адиабатических колебаний $\delta\omega = c_s \delta k$ будет практически линейным.

3. Резонансное взаимодействие несжимаемых и адиабатических движений

Рассмотрим сначала взаимодействие плоских адиабатических волн с «одномерной» турбулентной средой. Эта задача не включает описания завихренности и спиральности турбулентного течения, но учет вихревой компоненты поля скоростей на первых порах лишь усложнит предварительный анализ, а полученный в одномерной постановке задачи результат и его расширение на трехмерный случай позволят в дальнейшем понять также место вихревых процессов в турбулентном перемешивании. Разложение изотропных турбулентных флуктуаций по плоским волнам было предложено еще в первых работах Колмогорова и Обухова [7, 13], а также часто используется в теоретических работах по волновой турбулентности [14].

Представим условно «одномерную» частицу среды, достаточно большой, с размером порядка $L_* \gg \lambda_*$, где $\lambda_* = 2\pi/k_*$ — эффективная (наиболее вероятная) длина волны равновесных адиабатических флуктуаций, так чтобы звуковая волна могла полностью «поместиться» в такой частице, т.е. чтобы взаимодействие волны и частицы среды можно было описывать на основе законов сохранения. Этот характерный масштаб L_* можно сопоставить с масштабом когерентности для равновесных или собственных адиабатических флуктуаций в турбулентной среде. Он зависит от интенсивности турбулентного «перемешивания» и в некоторой смысле подобен «пути перемешивания» по Прандтлю [2]. Предположим пока, что L_* значительно меньше приведенной высоты атмосферы и соответствует масштабу

однородности и изотропности турбулентности, в пределах которого средняя плотность и температура меняются незначительно. Такая «частица» турбулентной среды хотя и содержит в себе адиабатические колебания, должна рассматриваться на внешних временных масштабах как несжимаемая, т.е. как частица, движения в которой усредняются за промежуток времени T_* , много больший характерного периода этих колебаний $\tau_* = 2\pi/\omega_* = \lambda_*/c_s$. Осреднение за промежуток времени T_* можно рассматривать как определение статистического среднего.

Такая частица среды может быть статистически неподвижна, но при этом в ней происходит движение неоднородностей температуры и плотности, скорости и давления или «дифракционных решеток турбулентности», на которых, например, происходит рассеяние адиабатических акустических волн [12]. Эти «решетки» пространственной неоднородности энтропии или потенциальной плотности движутся с разными скоростями, т.е. каждой такой «решетке» $\psi_k(x)$ соответствует еще и скорость V_k .

Представление о «дифракционных решетках» в турбулентной среде, предложенное Татарским, является, конечно, вспомогательным, поскольку размеры таких решеток, как и размеры лагранжевых частиц, не имеют жестких границ и могут варьировать в широких пределах. В вероятностном представлении каждая макроскопическая «частица среды» содержит статистический ансамбль лагранжевых частиц. Этот статистический ансамбль существует не в один момент времени, поскольку статистически стационарное состояние не содержит «внешнего» времени, а «внутреннее» время $\tau \in (-\infty, \infty)$. Выбор представления: лагранжевы частицы или дифракционные решетки неоднородностей, скорее, отражают свободу выбора описания сплошной среды.

Каждой дифракционной решетке ψ_k можно сопоставить ее скорость V_k следующим образом: в системе координат, движущейся со скоростью V_k , решетка ψ_k является *стоячей* волной адиабатических колебаний. Такое представление позволит выразить законы сохранения и считать эту частицу среды статистически несжимаемой, поскольку ее границы движутся (статистически) с постоянной скоростью. Удобным с математической точки зрения является переход к комплексному представлению ортогональных функций ψ_k . Комплексное представление имеет и важный статистический смысл. Для стоячей волны адиабатических колебаний вида $\psi_k(x)e^{i\omega_k t}$ статистически ту же вероятность будет иметь ее сопряженная компонента $\psi_k^* = \psi_k(x)e^{-i\omega_k t}$, и каждую пространственную стоячую волну $\psi_k(x)$ можно представить как сумму двух сопряженных компонент. В случае статистически однородного поля эти две компоненты соответствуют гармоническим бегущим волнам с волновыми векторами k и $-k$. Одновременное существование волн ψ_k и ψ_{-k} означает, что в одной точке «статистически одновременно» или с *равной вероятностью* присутствует движение с противоположными скоростями.

Если в системе отсчета (СО), движущейся со скоростью V относительно неподвижной, функция ψ описывает стоячую волну, то в неподвижной СО эффект

Доплера описывает изменение частот и волновых векторов бегущих компонент противоположной направленности и возникновение модуляции колебаний (биений). Применение формул эффекта Доплера при статистическом описании адиабатических колебаний в различных системах координат требует небольшого комментария. В отличие от задач классической акустики свободные адиабатические колебания в атмосфере не имеют локализованного источника, поэтому невозможно говорить об эффекте Доплера как о кинематическом эффекте, вызванном движениями источника или приемника звука. Однако можно воспользоваться тем обстоятельством, что волновое уравнение, определяющее в линейном приближении адиабатические колебания в атмосфере, инвариантно к преобразованию Лоренца при переходе от одной равномерно движущейся СО к другой [15]. При таком преобразовании можно считать скорость звука c_s инвариантом во всех инерциальных системах отсчета, а изменение пространственных и временных координат в соответствии с преобразованиями Лоренца можно рассматривать как одновременное изменение частоты и волнового вектора адиабатических колебаний при переходе от одной инерциальной СО к другой. Представление в форме слабого изменения частоты ω_* , а не скорости звука при переходе между инерциальными СО удобнее еще и потому, что скорость звука в этом случае зависит только от средней температуры турбулентной среды.

Стоячую волну в движущейся СО в неподвижной СО можно рассматривать как две бегущие в противоположные стороны волны с разными волновыми векторами $\mathbf{k}_m$ и $-\mathbf{k}_l$ и соответственно разными частотами ($\omega = c_s k$). Добавление к этой системе бегущих волн третьей, низкочастотной, волны с волновым вектором $\mathbf{k}_n = \mathbf{k}_l - \mathbf{k}_m$ и частотой $\omega_n = c_s k_n$ приведет к образованию стоячей волны теперь уже в неподвижной СО. Такая волна, как нетрудно показать, образуется статистически или «в среднем», т.е. после осреднения за время $T_* \gg 2\pi/\omega_*$. При этом «поглотится» только часть бегущей низкочастотной волны с амплитудой, равной амплитуде стоячей волны в движущейся СО, т.е. $C_n = C_m = C_l$. А скорость лагранжевой частицы, «поглотившей» низкочастотную адиабатическую волну, изменится в той доле, в которой она содержала эту пару бегущих высокочастотных «эффективных» волн. Поскольку падающую волну математически можно рассматривать как сумму двух комплексно сопряженных, то с той же вероятностью будет происходить «остановка» сопряженной компоненты ψ^* . Проведенный элементарный анализ по существу эквивалентен условиям резонансного взаимодействия акустических волн при гамильтоновом описании акустической турбулентности [11, 14].

Аналогично тому, как показал для турбулентных флуктуаций температуры Обухов [16], выравнивание пространственных турбулентных неоднородностей энтропии или некоторой скалярной функции от нее (потенциальной плотности ρ_s или ψ_s) происходит как за счет «перемешивания» в случайном поле скоростей $\mathbf{V}$, так и за счет выравнивания на малых масштабах (по

закону Фика):

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \frac{\partial\psi_s}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\psi_s = \gamma\Delta\psi_s, \quad (4)$$

где γ — коэффициент диссипации пространственных неоднородностей функции ψ_s [17]. В случае стационарного однородного и изотропного случайного поля скоростей, а также в предположении их нормального распределения [16]

$$\frac{1}{2} \frac{\partial\langle\psi_s^2\rangle}{\partial t} = -\gamma\langle(\nabla\psi_s)^2\rangle \quad (5)$$

(здесь $\langle\ldots\rangle$ означает статистическое осреднение). Эта диссипация флуктуаций характеристики ψ_s компенсирует ее генерацию внешними источниками. В случае энтропии такими источниками являются пространственные неоднородности радиационного нагрева и выхолаживания, возникающие за счет планетарных вариаций солнечной коротковолновой и длинноволновой радиации, уходящей с поверхности; вариаций характеристик, влияющих на излучение атмосферы, например облачности, а также различия между океаном и сушей в механизме усвоения солнечного тепла (эффективном альбедо поверхности).

Ортогональные функции ψ_k могут описывать как распределение вероятностей ρ , так и турбулентные флуктуации ρ_s (флуктуации потенциальной плотности). Поэтому можно принять, что в расчете на каждую «моду» или ортогональную функцию ψ_k скорость диссипации турбулентных флуктуаций (5), описываемых такой функцией, пропорциональна их «внутренней» энергии (энергии турбулентного перемешивания). Это линейное флуктуационно-диссипационное соотношение позволяет выразить внутреннюю энергию турбулентных флуктуаций через линейный оператор, действующий на ψ . Примем пока, как гипотезу, что в расчете на единичную массу лагранжевой частицы $\mathcal{E}\psi = -(\gamma^2/2)\Delta\psi$. Такое определение внутренней энергии связывает ее с пространственной неоднородностью плотности вероятности, инвариантно к сдвигам и поворотам СО и указывает на аналогию с «копенгагенской», или вероятностной, интерпретацией волновых функций.

Если считать пока длины волн флуктуаций энтропии значительно меньшими, чем масштаб изменения геопотенциала, т.е. рассмотреть случай флуктуаций энтропии в локально изотропной турбулентной среде, то равенство полной энергии (суммы внутренней и кинетической) двух бегущих волн k_l и k_m в неподвижной СО и стоячей волны в движущейся СО будет иметь вид $\mathcal{E}_l + \mathcal{E}_m = E_i$, где $\mathcal{E}_l = \gamma^2 k_l^2/2$ (в расчете на единицу массы), $\mathcal{E}_m = \gamma^2 k_m^2/2$,

$$E_i = 2 \left(\frac{V_i^2}{2} + \frac{\gamma^2 k_i^2}{2} \right), \quad (6)$$

так как волн две (с одинаковыми амплитудами). То есть каждой «эффективной» волне кроме внутренней энергии мы добавляем в движущейся системе координат кинетическую энергию, так что общая кинетическая энергия движущейся среды в расчете на единицу массы складывается из кинетической энергии «эффективных» волн, которые и составляют плотность, или массу,

среды. Тогда

$$E_i - (\mathcal{E}_l + \mathcal{E}_m) = V_i^2 + \gamma^2 \left(\frac{k_i^2 - k_m^2}{2} \right) + \gamma^2 \left(\frac{k_i^2 - k_l^2}{2} \right) = 0. \quad (7)$$

Обозначим $\delta k = k_i - k_m = k_l - k_i = \bar{k}'' - \bar{k}'$, где $\bar{k}' = (k_i + k_m)/2$, а $\bar{k}'' = (k_i + k_l)/2$. Тогда

$$V_i^2 + \gamma^2 \bar{k}'(k_i - k_m) - \gamma^2 \bar{k}''(k_l - k_k) = V_i^2 - (\gamma \delta k)^2 = 0. \quad (8)$$

Отсюда видно, что если приписать каждой «эффективной» адиабатической волне ψ_i импульс γk_i , то закон сохранения полной энергии при переходе от движущейся СО к неподвижной или обратно будет выполняться, если учитывать изменение импульса $V_i = \gamma \delta k$ (в расчете на единичную массу) и «кинетическую» энергию «эффективных» волн при таком переходе. Стоячая волна тогда является просто суммой двух бегущих волн с противоположными импульсами. Каждая из этих волн имеет внутреннюю энергию $\gamma^2 k_i^2/2$, связанную с неоднородностью плотности вероятности и турбулентным перемешиванием.

Турбулентные флуктуации температуры или флуктуации скорости звука можно рассматривать как слабое изменение эффективной частоты. Две стоячие волны с близкими эффективными частотами ω_l и ω_m образуют «биения» с разностными частотами ω_{ml} и $\omega_{lm} = -\omega_{ml}$, т.е. стоячую волну флуктуаций температуры и плотности. Тогда рассеяние звуковых волн на турбулентных флуктуациях температуры, в соответствии с резонансным принципом Брэгга [12], приводящее в одномерном случае к появлению волны с противоположным направлением (волновым вектором), в рамках предлагаемого подхода можно представить как четырехволновое взаимодействие: две сопряженные «эффективные» волны образуют стоячую волну адиабатических флуктуаций ψ_k , возможно, движущуюся с некоторой скоростью, а еще две акустические волны, падающая и рассеянная, должны удовлетворять резонансным соотношениям для этих высокочастотных «эффективных» волн. Таким образом, в приближении локальной однородности и изотропности частицу среды можно представить как набор стоячих волн энтропии, являющихся дифракционными решетками для бегущих адиабатических волн (более низкой частоты), а пару близких по волновому числу «эффективных» адиабатических флуктуаций высокой частоты и противоположной направленности можно рассматривать как движущуюся решетку. Рассеяние адиабатической волны на такой дифракционной решетке эквивалентно передаче этой решетке импульса при выполнении закона сохранения энергии.

4. Перераспределение частот эффективных колебаний

Так как коэффициенты разложения плотности вероятности по ортогональным функциям ψ_k нормированы: $\sum C_k^2 = 1$, то воздействие адиабатических движений на распределение вероятности может трактоваться только как переход от распределения, описываемого функцией ψ_m с амплитудой C_m , к распределению, в котором доля этой собственной функции в статистическом смысле изменится на величину ΔC_m . При этом

должна измениться доля других флуктуаций, скажем, описываемых собственной функцией ψ_l с эффективной частотой ω_l . При неизменности «вероятности» или доли других флуктуаций $C_m^2 + C_l^2 = C_m'^2 + C_l'^2$ или $C_m'^2 - C_m^2 = C_l'^2 - C_l^2$. Такое изменение коэффициентов разложения за «статистически бесконечно малый» интервал «внешнего» времени Δt , но достаточно большой, чтобы определить само понятие коэффициентов разложения плотности вероятности, можно записать следующим образом:

$$\frac{C_m^* \Delta C_m}{\Delta t} = -\frac{C_l^* \Delta C_l}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad C_m^* \frac{dC_m}{dt} = -C_l^* \frac{dC_l}{dt}. \quad (9)$$

Введение комплексно-сопряженной «амплитуды вероятности» позволяет единым образом описать и адиабатические колебания и изменение плотности вероятности. Очевидно, что $C_k^* C_k$ не зависит от времени t , если $C_k = |C_k| e^{i\omega_k \tau}$. Такое представление амплитуды вероятности C_k позволяет считать «наблюдаемые» амплитуды (разложения по ортогональным пространственным функциям) случайными величинами, а их зависимость от внутреннего времени τ — статистически стационарным, на «внутренних» масштабах, процессом. Таким образом, амплитуды вероятности или коэффициенты разложения могут иметь как случайную, так и детерминированную составляющую.

Если предположить, в соответствии с представлениями Вигнера, что распределение средних квадратов случайных амплитуд $\tilde{C}_k$ в состоянии равновесия соответствует распределению Больцмана, т.е. $\langle \tilde{C}_k^2 \rangle = \exp(-E_k/E_0)$, так что $E_0 = \sum \langle \tilde{C}_k^2 \rangle E_k$, то $\ln \langle \tilde{C}_k^2 \rangle = -E_k/E_0$ и информационная энтропия этого равновесного состояния $S_0 = \sum \langle \tilde{C}_k^2 \rangle \ln \langle \tilde{C}_k^2 \rangle = -1$. Другими словами, состояние теплового равновесия E_0 можно представить как совокупность очень широкого спектра адиабатических флуктуаций ψ_k со случайными амплитудами $\tilde{C}_k$, среднее значение которых равно нулю («белый» или тепловой шум), в то время как разложение плотности вероятности или турбулентных флуктуаций, описываемое теми же функциями ψ_k , имеет среднее значение $\bar{C}_k$, отличное от нуля. Если $C_k = \bar{C}_k + \tilde{C}_k$, так что $\langle \bar{C}_k \tilde{C}_k \rangle = 0$, то полная энергия атмосферы $E = \sum \langle C_k^2 \rangle E_k = \sum (\bar{C}_k^2 + \langle \tilde{C}_k^2 \rangle) E_k$ включает как энергию стационарных мод распределения плотности вероятности, так и энергию тепловых флуктуаций (адиабатический шум). Увеличение доли неравновесных стационарных состояний $\psi_k(\bar{C}_k^2)$, описываемых ортогональными функциями, автоматически приводит к уменьшению доли равновесного состояния (тепловых адиабатических флуктуаций $\tilde{C}_k^2$).

Кроме локальной термодинамической энтропии, флуктуации которой описываются ортогональными функциями ψ , распределение вероятности определяет информационную энтропию распределения. Можно определить информационную энтропию k -го стационарного состояния S_k , как E_k/E_0 , тогда для «смешанного» состояния турбулентных флуктуаций информаци-

онная энтропия

$$S = \sum \bar{C}_k^2 S_k = \frac{\sum \bar{C}_k^2 E_k}{E_0} = \frac{E_s}{E_0}. \quad (10)$$

Таким образом, смешанное состояние турбулентных флуктуаций обладает собственной энергией E_s , отличной от энергии теплового равновесия E_0 .

Определим теперь интенсивность переходов W_{ml} из состояния m в состояние l как относительное изменение вероятности C_m^2 в единицу времени за счет только такого перехода. При неизменности других состояний (двухуровневая модель) это означает, что $dC_m^2/dt = C_m^2 W_{ml}$. Можно предположить, что интенсивность или «вероятность» индуцированных адиабатическими волнами переходов из состояния m (с энергией E_m) в состояние l будет пропорциональна интенсивности адиабатических колебаний с частотой ω_{ml} , удовлетворяющих резонансным соотношениям Брэгга.

В турбулентной среде происходят, как резонансные, или вынужденные, переходы, т. е. изменение коэффициентов ортогонального разложения под действием адиабатических флуктуаций, которые описываются через рассеяние адиабатических волн на несжимаемых турбулентных неоднородностях, так и естественная диссипация турбулентных флуктуаций, обусловленная молекулярной структурой среды. Будем характеризовать эту естественную диссипацию коэффициентом A_l : если C_l^2 — вероятность обнаружить стоячую волну ψ_l , то $C_l^2 A_l$ — скорость диссипации этих флуктуаций. Баланс переходов на уровне l в состоянии статистического равновесия тогда записывается очень просто:

$$\sum_{k \neq l} C_k^2 W_{kl} = \sum_{m \neq l} C_l^2 W_{lm} + C_l^2 A_l. \quad (11)$$

Здесь левая часть описывает генерацию, т. е. увеличение доли турбулентных флуктуаций с энергией E_l (или «эффективной» частотой ω_l), а правая часть — уменьшение вероятности этих колебаний как за счет переходов, индуцированных адиабатическими волнами, так и за счет естественной диссипации. Для больших (энергетических) масштабов это уравнение следует дополнить источниками, вводя их в левую часть или допуская отрицательные значения A_l в правой.

Если, как мы предположили, интенсивность индуцированных адиабатическими колебаниями переходов W_{ml} пропорциональна интенсивности адиабатических колебаний с частотой ω_{ml} , то $W_{ml} = W_{lm}$. Если теперь предположить для простоты, что уровней всего два — m и l , то из (11)

$$W_{ml} = \frac{A_l}{C_m^2/C_l^2 - 1}. \quad (12)$$

Этот же результат получается и для произвольного числа уровней, в чем можно убедиться прямой постановкой с учетом того, что уравнение (11) справедливо для всех l (см., например, [18]). Если для турбулентных флуктуаций при больших числах Рейнольдса справедливо больцмановское распределение по энергиям, т. е. $C_l^2 = \exp(-E_l/E_s)$, где E_s — энергетическая характеристика турбулентного состояния (10), то $C_m^2/C_l^2 = \exp(E_{ml}/E_s)$, где $E_{ml} = E_l - E_m$. Как вид-

но, больцмановское распределение плотности вероятности по энергиям удобно представить через «эффективные» частоты ω_k в расчете на «моду» (ортогональную функцию) ψ_k , в форме $E_k = -\gamma\omega_k$, так что $E_{ml} = \gamma(\omega_m - \omega_l) = \gamma\omega_{ml}$.

Сопоставим теперь уравнение для интенсивности индуцированных адиабатическими колебаниями переходов W_{ml} (12) с формулой Планка квантовой механики [18]. В области низких частот, когда $E_{lm} \ll E_s$ и зависимость распределения адиабатических флуктуаций от их энергии будет слабой, т. е. $C_m^2 \approx C_l^2$ (белый шум)

$$W_{ml} \sim \frac{A_l}{\exp\left(\frac{\gamma\omega_{ml}}{E_s}\right) - 1} \approx A_l \frac{E_s}{\gamma\omega_{ml}}. \quad (13)$$

Как видно из этого выражения, интенсивность резонансных переходов пропорциональна энергии турбулентного перемешивания E_s . В инерционном интервале турбулентности адиабатические волны удовлетворяют условию $\omega_{ml} = c_s k_{ml}$, и вероятность перехода $W_{ml} \sim E_s k_{ml}^2$, а $A_l \sim \gamma\omega_{ml}^3$, что соответствует известному выражению квантовой механики для индуцированных переходов между двумя уровнями [18]. Таким образом, интенсивность переходов между уровнями m и l , или интенсивность равновесных адиабатических флуктуаций на частоте ω_{ml} , в области низких частот ($\omega_{ml} \ll \omega_m, \omega_l$) должна возрастать с ростом волнового числа ($\sim k_{ml}^2$). Этот рост компенсирует увеличение скорости диссипации мелкомасштабных турбулентных флуктуаций. Поскольку высокочастотные флуктуации диссипируют быстрее, поток энергии для поддержания стационарного состояния турбулентного перемешивания направлен от низких частот к высоким, в то время как отдельные, индуцированные адиабатическими движениями переходы могут происходить в обе стороны.

Планковская форма равновесного спектра свободных адиабатических колебаний, конечно, будет иметь место только при достаточно сильной интенсивности турбулентности (при больших числах Рейнольдса), когда спектр адиабатических флуктуаций квазинепрерывен, а распределение турбулентных флуктуаций по энергиям соответствует формуле Больцмана. Другими словами, Планковская форма спектра адиабатических колебаний отражает закон больших чисел, когда распределение турбулентных флуктуаций описывается большим числом ортогональных функций ψ_k . Формула Планка для интенсивности равновесных адиабатических флуктуаций, конечно, не противоречит формулам теории Колмогорова–Обухова для пространственного спектра скоростей и температур несжимаемых турбулентных движений. Предположение о таком распределении Обухова высказал в работе [7]. Можно предположить, что характеристика скорости диссипации температурных флуктуаций или флуктуаций скорости звука в теории Колмогорова–Обухова N связана со средней энергией турбулентности E_s формулой вида $N = C(c_s^2/\gamma)E_s$, где C — числовой коэффициент [17]. Однако утверждать это можно только после проведения измерений спектра свободных адиабатических флуктуаций в турбулентной атмосфере и аппроксимации такого спектра планковской кривой, если эта аппроксимация будет адекватной. Эти измерения позволят уточнить и значение показате-

ля скорости диссипации флуктуаций энтропии γ или потенциальной плотности.

Заключение

На основе операторного или гамильтонова подхода намечен путь вероятностного описания неоднородной и нестационарной турбулентности (макротурбулентности) в атмосфере Земли. Плотность распределения одинаковых лагранжевых воздушных частиц единичной массы рассматривается как вероятностная характеристика случайного поля плотности воздуха (и температуры). Разложение этой плотности вероятности по ортогональному базису представляется альтернативой поиску универсальных эмпирических функций теории подобия. Внутренняя энергия турбулентного перемешивания лагранжевых частиц вводится на основании предположения о пропорциональности энергии и скорости диссипации турбулентных флуктуаций. Показано, что для мелкомасштабных флуктуаций энтропии или потенциальной плотности при больших числах Рейнольдса спектр адиабатических флуктуаций квазинепрерывен и может быть описан формулой Планка.

Список литературы

1. Frish U. Turbulence. Cambridge University Press, 1995. (Пер.: Турбулентность. Наследие Колмогорова. М., 1998.)
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М., 1967.
3. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л., 1988.
4. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М., 1982.
5. Колмогоров А.Н. // Докл. АН СССР. 1940. **26**, № 1. С. 6.
6. Обухов А.М. // Изв. АН СССР. Сер. геофизика. 1960. № 3. С. 432.
7. Обухов А.М. // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геоф. 1941. **5**, № 4. С. 453.
8. V.E. Zakharov, V.S. L'vov, Falkovich G. Kolmogorov spectra of turbulence I. Wave turbulence. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, 1992.
9. Wigner E. // Phys. Rev. 1932. **40**. P. 749.
10. Л.Д. Ландау // ЖЭТФ, 1941, **11**, С. 592
11. L'vov V.S., L'vov Yu., Newell A.C., Zakharov V. // Phys. Rev. E. 1997. **56**, N 1. P. 390.
12. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
13. Колмогоров А.Н. // Докл. АН СССР. 1941. **30**, № 4. С. 299.
14. Захаров В.Е., Васильев О.А., Дьяченко А.И. // Письма в ЖЭТФ. 2001. **73**, № 2. С. 68.
15. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М., 1981.
16. Обухов А.М. // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геоф. 1949. **13**, № 1. С. 58.
17. Юшков В.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 4. С. 65.
18. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика. Ч. 2. М., 2002.

A probabilistic approach towards the atmospheric turbulence

V. P. Yushkov

Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: yushkov@phys.msu.ru.

A bridge from a customary statistical description of a homogeneous isotropic turbulence to the anisotropic probability distribution is outlined. An importance of adiabatic motions for energy transfer over the turbulence spectrum is discussed. The conditions when the Planck curve describes the energy spectrum of adiabatic fluctuations are considered.

Keywords: turbulence, adiabatic fluctuations, spectrum, probability distribution.

PACS: 92.60.H-

Received 27 November 2013.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2013).

Сведения об авторе

Юшков Владислав Пролетарьевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (245) 939-15-41, e-mail: yushkov@phys.msu.ru.