Асимптотические методы Маслова в задачах теории оптических решеток

Д. Е. Булычев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: lunix2003@mail.ru

Статья поступила 31.05.2013, подписана в печать 26.06.2013.

Рассмотрено применение асимптотических методов Маслова к уравнениям, возникающим в теории оптических решеток. Исследовано возникновение малого параметра в уравнениях Шрёдингера с потенциалами трехмерной и управляемой оптической решетки и определены условия применения асимптотических методов Маслова к решению этих уравнений. Рассмотрение различных условий, налагаемых на параметры в данных потенциалах, привело к использованию двух разных способов решения возникающих уравнений — метода комплексного ростка Маслова и операторнозначного метода комплексного ростка Маслова. Получены соотношения, с помощью которых могут быть рассчитаны интересующие характеристики атомных систем, указанных в работе, в оптических решетках.

Ключевые слова: асимптотические методы Маслова, оптические решетки, дипольные ловушки.
УДК: 51-73. PACS: 37.10.Jk.

Введение

Трехмерная оптическая решетка образуется при интерференции лазерных пучков в трех взаимно перпендикулярных направлениях [1]. Она представляет из себя пространственный набор микроскопических потенциалов, в которых могут удерживаться нейтральные атомы. В одномерном случае простейшая оптическая ловушка состоит из одного сфокусированного лазерного луча [2]. Впервые такая экспериментальная реализация описана в работе [3]. Дипольная сила светового давления, действующая на атом в лазерном луче, образует при отрицательной отстройке частоты лазерного поля к частоте атомного перехода трехмерную потенциальную яму вблизи фокуса лазерного луча. Для высокой степени контроля атомов в экспериментах в основном используют ультрахолодный газ [4]. На квантовом уровне внутренними и внешними степенями свободы частиц манипулируют, изменяя интенсивность лазерного излучения, частоту отстройки и используя магнитное поле [5]. Это приводит к большим временам когерентности и позволяет изучать когерентную динамику атомных ансамблей в чистом окружении. Периодический потенциал оптической решетки формирует структуру энергетического спектра, подобную структуре в твердых телах. Поэтому атомы в оптической решетке представляют собой хорошую модель для изучения квантовых эффектов, трудно наблюдаемых в твердых телах.

1. Уравнения, возникающие в теории оптических решеток

Рассмотрим основные принципы захвата и удерживания нейтральных атомов в оптических ловушках. Удерживающий потенциал является результатом взаимодействия дипольного момента атома и лазерного излучения, далеко отстроенного от резонанса. В этом случае оптическое возбуждение невелико и радиационными силами, вследствие рассеяния фотонов можно пренебречь [6]. Для вывода основных характеристик такого взаимодействия будем рассматривать атом как классический и квантовый гармонический осциллятор, а затем перейдем к более сложным моделям. Рассмотрим также различные типы оптических решеток и уравнения, возникающие в их описательной теории.

Под воздействием внешнего периодического поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}E(\boldsymbol{r})\exp^{-i\omega t} + \boldsymbol{e}^*E^*(\boldsymbol{r})\exp^{i\omega t}$ в атоме индуцируется дипольный момент $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}P(\boldsymbol{r})\exp^{-i\omega t} + \boldsymbol{e}^*P^*(\boldsymbol{r})\exp^{i\omega t}$, где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор поляризации. Амплитуда дипольного момента связана с амплитудой электрического поля простой формулой [7]

$$P = \alpha(\omega)E,$$

где α — комплексная поляризуемость. Потенциал взаимодействия поля с наведенным дипольным моментом равен

$$U_{\rm dip} = -\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{pE}\rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c}\,\mathrm{Re}(\alpha)I,$$

где мы ввели $I = 2\epsilon_0 c|E|^2$ — интенсивность излучения. Фактор $1/2$ учитывает два направления колебания $\boldsymbol{p}$ из-за линейной поляризации лазерного излучения. Угловыми скобками обозначено усреднение по периоду колебания волны возбуждающего поля. Таким образом, потенциальная энергия пропорциональна интенсивности I и вещественной части поляризации $\mathrm{Re}(\alpha)$, которая описывает синфазную часть дипольной осцилляции и ответственна за поглощающие свойства взаимодействия. Дипольная сила получается взятием градиента от потенциала

$$F_{\rm dip} = -\nabla U_{\rm dip}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0 c}\,\mathrm{Re}(\alpha)\nabla I.$$

Энергию, поглощенную осциллятором, можно найти, используя следующее соотношение:

$$P_{\rm abs} = \langle \dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{E}\rangle = \frac{\omega}{\epsilon_0 c}\,\mathrm{Im}(\alpha)I$$

Как видно, за поглощение ответственна мнимая часть поляризации, которая описывает противофазную составляющую дипольной осцилляции. Рассматривая поле как поток фотонов $\hbar\omega$, поглощение можно описать в терминах теории рассеяния (фотон может поглотиться и затем спонтанно излучиться). Коэффициент рассеяния равен

$$\Gamma_{sc}(\boldsymbol{r}) = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c}\,\mathrm{Im}(\alpha) I(\boldsymbol{r}).$$

Таким образом, мы получили две важные характеристики дипольной ловушки, U_{dip} и Γ_{sc}. Они применимы для любых нейтральных частиц в переменных элекрических полях. Найдем поляризуемость для лоренцовской модели атома как классического осциллятора [8]. В простейшем случае электрон с массой m_e и частотой ω_0, соответствующей оптической частоте перехода, вращается вокруг ядра. Уравнение движения в таком случае имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma_\omega\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{eE}{m_e}\cos\omega t,$$

или в терминах дипольного момента

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \Gamma_\omega\frac{dp}{dt} + \omega_0^2 p = -\frac{e^2E}{m}\cos\omega t,$$

где Γ_ω — классический коэффициент затухания, вызванного радиационными потерями энергии. Если искать решение в виде $p = p_0\exp^{-i\omega t}$, то можно легко найти значение для α:

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_\omega\omega},$$

Используя соотношение $\frac{e^2}{m_e} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3\Gamma_\omega}{\omega^2}$ и вводя резонансный коэффициент рассеяния $\Gamma \equiv \Gamma_{\omega_0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\Gamma_\omega$, получим

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3\frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma}. \qquad (1)$$

В квазиклассическом подходе атомная поляризуемость может быть вычислена для двухуровневой модели квантовой системы [9]. Пренебрегая эффектами насыщения уровней, результат для поляризуемости совпадает с классическим. Нужно только заметить, что коэффициент затухания не может уже вычисляться по формуле Лармора. Он определяется дипольным матричным элементом между основным и возбужденным состоянием:

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3}|\langle e|\mu|g\rangle|^2.$$

Для многих атомов с разрешенными дипольными переходами из основного состояния классическая формула (1) дает хорошую аппроксимацию. Например, для D-линий щелочных атомов Na, K, Rb и Cs классический результат соответствует экспериментальному с точностью до нескольких процентов. Разница классического и квантового рассмотрения заключается в возможности эффектов насыщения. При мощном внешнем поле возбужденное состояние становится частозаселенным, и классика перестает работать. Для дипольных ловушек нас особенно интересует случай далеко отстроенного от резонанса поля с низким насыщением и маленьким коэффициентом рассеяния, т. е. $\Gamma_{sc} \ll \Gamma$.

С учетом (1) выражения для дипольного потенциала и коэффициента рассеяния можно записать

$$U_{dip}(\boldsymbol{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3}\left(\frac{\Gamma}{\omega_0-\omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0+\omega}\right)I(\boldsymbol{r}),$$

$$\Gamma_{sc}(\boldsymbol{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3\left(\frac{\Gamma}{\omega_0-\omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0+\omega}\right)^2 I(\boldsymbol{r}).$$

В этих формулах помимо обычного резонанса при $\omega = \omega_0$ учитывался и противофазный при $\omega = -\omega_0$. Вторым слагаемым можно пренебречь, если учесть, что в большинстве экспериментов используется отстройка частоты $|\Delta| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ [10]. В этом случае выражения для потенциала и коэффициента рассеяния упрощаются:

$$U_{dip}(\boldsymbol{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3}\frac{\Gamma}{\Delta}I(\boldsymbol{r}),$$

$$\Gamma_{sc}(\boldsymbol{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3}\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\boldsymbol{r}).$$

Легко видеть, что существует такое соотношение между этими величинами

$$\hbar\Gamma_{sc} = \frac{\Gamma}{\Delta}U_{dip},$$

которое представляет собой фундаментальную связь между поглощением и излучением энергии осциллятором. Отсюда можно сделать два вывода относительно дипольных ловушек.

В случае, когда частота поля ниже резонансной частоты (красная отстройка, $\Delta < 0$), дипольный потенциал отрицательный и он притягивает атомы. Минимум потенциала находится в максимуме интенсивности. И соответственно в случае синей отстройки ($\Delta > 0$), т. е. когда частота больше резонансной частоты, атомы выталкиваются из поля. Минимум потенциала находится в минимуме интенсивности. В соответствии с этим дипольные ловушки можно разбить на два класса, с $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$.

Дипольный потенциал пропорционален I/Δ, тогда как коэффициент рассеяния I/Δ^2. Таким образом, для уменьшения коэффициента рассеяния при определенной глубине потенциала в дипольной ловушке используется далекая отсройка и высокая интенсивность.

В реальных атомах, которые используют в экспериментах с дипольными ловушками, приходится учитывать сложную структуру разрешенных переходов. Это приводит к качественным изменениям и новым эффектам в рассмотрении теории ловушек. В рамках осцилляторной модели это означает, что поляризуемость становится зависима от состояния атома. Рассмотрим для многоуровневых атомов концепцию потенциала, зависящего от состояния [11, 12].

Воздействие далеко-отстроенного излучения на атомные уровни может быть рассмотрено как возмущение второго порядка по полю. Используя теорию возмущений для невырожденных уровней, запишем сдвиг для i-го уровня (ϵ_i — невозмущенная энергия):

$$\Delta E_i = \sum_{j\neq i}\frac{|\langle j|H_1|i\rangle|^2}{\epsilon_i - \epsilon_j},$$

где $H_1 = -\boldsymbol{\mu E}$ — гамильтониан взаимодействия атома с излучением. Здесь $\mu = -e\boldsymbol{r}$ — дипольный оператор. В работе [13] рассматривается комбинированная система атом плюс поле, так называемое «одетое» состояние. В основном состоянии атом имеет нулевую внутреннюю энергию, а поле — $n\hbar\omega$ в соответствии с числом фотонов n. В сумме это дает полную энергию $\epsilon_i = n\hbar\omega$ для невозбужденного состояния. Когда атом возбуждается, фотон поглощается и сумма внутренней энергии атома $\hbar\omega_0$ и энергии поля $(n-1)\hbar\omega$ становится $\epsilon_j = \hbar\omega_0 + (n-1)\hbar\omega = -\hbar\Delta_{ij} + n\hbar\omega$. Таким образом, для двухуровневого атома имеем

$$\Delta E = \pm\frac{|\langle(e|\mu|g\rangle)|^2}{\Delta}|E|^2 = \pm\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3}\frac{\Gamma}{\Delta}I,$$

где верхний знак для основного состояния, а нижний — для возбужденного. Отсюда можно заметить интересный факт: результат теории возмущения для сдвига энергии основного состояния совпадает с дипольным потенциалом для двухуровнего атома. Когда эффекты насыщения малы, атом находится большую часть времени в основном состоянии, и мы можем интерпретировать такой энергетический сдвиг основного состояния как потенциальную яму для атомов.

Обычно в экспериментах для дипольных ловушек используются гауссовы лазерные пучки, которые при отражении и интерференции создают стоячие волны. Распределение интенсивности пучка мощности P, распространяющегося вдоль оси z, будет пропорционально $\cos^2(kz)$:

$$I(r,z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)}e^{-2\frac{r^2}{w^2(z)}}\cos^2 kz,$$

где $w(z)$ зависит от аксиальной координаты z:

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2},$$

а w_0 — радиус пучка в перетяжке и $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ — рэлеевская длина. Максимум интенсивности равен $I_0 = \frac{2P}{\pi w_0^2}$. Гауссов лазерный пучок с такими параметрами формирует цилиндрически-симметричную дипольную ловушку. Для создания простой кубической решетки используются три взаимно ортогональные стоячие волны. Поляризации этих волн тоже должны быть ортогональными. Для притягивающего потенциала с $\Delta < 0$ можно записать

$$V(\boldsymbol{r}) = -V_x e^{-2(y^2+z^2)/w_x^2}\sin^2(kx) - V_y e^{-2(x^2+z^2)/w_y^2}\sin^2(ky) - \\ - V_z e^{-2(x^2+y^2)/w_z^2}\sin^2(kz).$$

Здесь V_x, V_y, V_z — потенциальные глубины соответствующих одномерных решеток. В центре ловушки для расстояний много меньших тех, где луч начинает исчезать, притягивающий потенциал может быть аппроксимирован как сумма однородных периодических решетчатых потенциалов с добавлением внешнего гармонического локализующего фактора:

$$V(\boldsymbol{r}) \simeq V_x\sin^2(kx) + V_y\sin^2(ky) + V_z\sin^2(kz) + \\ + \frac{m}{2}(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2),$$

где $\omega_{x,y,z}^2$ — квадраты эффективных удерживающих частот внешнего гармонического локализующего фактора. Таким образом, потенциал трехмерной решетки представляет собой суперпозицию потенциалов одномерной решетки

$$V(x) = V_0\cos(2kx) + \frac{m\omega^2x^2}{2}. \qquad (2)$$

В экспериментах дополнительная локализация может быть предоставлена магнитным удерживающим потенциалом. В работе [14] рассматриваются атомы, захваченные потенциалом вида

$$V(x,t) = mgx + V_0\cos(2k(x - x_0\cos\omega_0 t)), \qquad (3)$$

и исследуется когерентная делокализационная динамика, возникающая во внутризонных переходах между уровнями Ванье–Штарка. Здесь V_0 — глубина решетки, k — волновой вектор оптической решетки, x_0 и $\nu_M = \frac{\omega_0}{2\pi}$ — фазово-модулированная амплитуда и частота.

2. Возникновение малого параметра в уравнениях

Асимптотические методы Маслова, позволяющие строить квазиклассические решения уравнения Шрёдингера, применимы к уравнениям с малым параметром при операторе дифференцирования [15]. В простейшем случае это уравнение вида

$$i\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\left(-i\epsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right)\psi, \quad \epsilon\to 0. \qquad (4)$$

Имеются и более сложные уравнения, которые можно исследовать методами Маслова:

$$i\epsilon\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial t} = H\left(-i\epsilon\frac{\partial}{\partial x},\ x,\ -i\frac{\partial}{\partial y},\ y\right)\psi(x,y,t). \qquad (5)$$

Уравнение (5) описывает систему, квазиклассическую по координатам x и квантовую по координатам y.

Чтобы применить методы Маслова к конкретным задачам, следует сначала привести возникающие в задаче уравнения к виду (4) или (5), сделав координаты и время безразмерными. Тогда, если возникающий безразмерный параметр ϵ много меньше единицы, методы Маслова можно применять.

2.1. Суперпозиция осцилляторного и периодического потенциалов

Перейдем к исследованию уравнений, возникающих в теории оптических решеток. Уравнение Шрёдингера с потенциалом (2) имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0\cos(2kx) + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\psi. \qquad (6)$$

Сделаем замену переменных $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\xi$ и $t = \frac{\tau}{\omega}$. С учетом этого уравнение (6) запишется так:

$$i\hbar\omega\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{\hbar^2 m\omega}{2m\hbar}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + V_0\cos\left(2k\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\xi\right) + \frac{m\omega^2\hbar}{m\omega}\frac{\xi^2}{2}\right)\psi.$$

Поделив обе части уравнения на $\hbar\omega$ и обозначив через $a = 2k\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ и $W_0 = \frac{V_0}{\hbar\omega}$, получим

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + W_0\cos(a\xi) + \frac{\xi^2}{2}\right)\psi. \qquad (7)$$

Методы Маслова могут быть применимы к уравнению (7) в двух качественно разных случаях: $a \ll 1$, $W_0 \lesssim a^{-2}$ и $a \gg 1$, $W_0 \lesssim a^2$.

Рассмотрим случай, когда $a \ll 1$ и $W_0 \lesssim a^{-2}$. Уравнение (7) приводится к виду (4), к которому методы Маслова применимы напрямую. Сделаем замену переменной $\xi = z/a$ в уравнении (7):

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + W_0\cos z + \frac{z^2}{2a^2}\right)\psi.$$

Умножив обе части уравнения на a^2 и приняв во внимание условия на параметры, получим

$$ia^2\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{a^4}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + A\cos z + \frac{z^2}{2}\right)\psi, \tag{8}$$

где ввели обозначение $A = W_0 a^2$. Уравнение (8) относится к типу (4) при $\epsilon = a^2$:

$$i\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + A\cos z + \frac{z^2}{2}\right)\psi. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a \gg 1$ и $W_0 \lesssim a^2$. Сделаем замену переменной $\xi = az$ в уравнении (7):

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + W_0\cos(a^2 z) + \frac{z^2a^2}{2}\right)\psi.$$

Разделив обе части уравнения на a^2, получим

$$\frac{i}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{1}{2a^4}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{W_0}{a^2}\cos(a^2 z) + \frac{z^2}{2}\right)\psi.$$

Обозначая $W_0/a^2 = A$, $\epsilon = 1/a^2$, приводим уравнение к виду

$$i\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + A\cos\left(\frac{z}{\epsilon}\right) + \frac{z^2}{2}\right)\psi. \tag{10}$$

Уравнение (10) не относится к типу (4) или (5). Однако его можно привести к типу (5). Будем искать решение уравнения (10) в виде $\psi(z,\tau) = \widetilde{\psi}(z, \frac{z}{\epsilon}, \tau)$. Функция $\psi(z,\tau)$ удовлетворяет соотношению (7), если функция $\widetilde{\psi}(z,y,\tau)$ является решением уравнения

$$i\epsilon\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\tau} = \left[-\frac{\epsilon^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + A\cos y + \frac{z^2}{2}\right]\widetilde{\psi}. \tag{11}$$

Уравнение (11) относится к типу (5). Интересно отметить, что оно описывает эволюцию квантовой системы с большим числом степеней свободы, чем исходное уравнение (10). Предполагается, что по переменной y для функции $\widetilde{\psi}$ выполняется условие периодичности с периодом 2π.

2.2. Управляемый потенциал решетки

Запишем уравнение Шрёдингера с потенциалом (3)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + mgx + V_0\cos(2k(x - x_0\cos\omega_0 t))\right)\psi \tag{12}$$

и приведем его к виду, удобному для применения асимптотических методов Маслова. Рассмотрим перемасштабирование $x = x_0 z$ и $t = \tau/\omega_0$, тогда уравнение (12) примет вид

$$i\hbar\omega\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\hbar^2}{2mx_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + mgx_0 z\psi + V_0\cos(2kx_0(z - \cos\tau))\psi.$$

Поделив обе части уравнения на V_0, получим

$$i\frac{\hbar\omega}{V_0}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\hbar^2}{2mx_0^2V_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{mgx_0z}{V_0}\psi + \cos(2kx_0(z - \cos\tau))\psi. \tag{13}$$

Рассмотрим уравнение при следующих соотношениях для параметров:

$$\frac{\hbar\omega}{V_0} \sim \epsilon, \quad \frac{\hbar}{x_0\sqrt{mV_0}} \sim \epsilon, \quad \frac{mgx_0}{V_0} \lesssim O(1), \quad 2kx_0 \sim \frac{1}{\epsilon}.$$

При этом два первых выражения приводят к тому, что $m(\omega x_0)^2 \sim V_0$. Обозначая $1/\epsilon = 2kx_0$ и вводя обозначения для коэффициентов $\frac{\hbar\omega}{V_0} = \frac{\epsilon}{A}$, $\frac{\hbar}{x_0\sqrt{mV_0}} = \frac{\sqrt{C_2}\epsilon}{A}$, $\frac{mgx_0}{V_0} = \frac{C_3}{A}$, приведем уравнение (13) к виду

$$i\frac{\epsilon}{A}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\epsilon^2C_2}{2A}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{C_3z}{A}\psi + \cos\left(\frac{z - \cos\tau}{\epsilon}\right)\psi,$$

или

$$i\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\epsilon^2C_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + C_3z\psi + A\cos\left(\frac{z - \cos\tau}{\epsilon}\right)\psi. \tag{14}$$

Уравнение (14) не относится к типу (4) или (5). Чтобы привести его к типу (5), будем искать решение в виде $\psi(z,\tau) = \widetilde{\psi}\left(z, \frac{z-\cos\tau}{\epsilon}, \tau\right)$. Получим уравнение для $\widetilde{\psi}(z,y,\tau)$. Имеем

$$\left(i\sin\tau\frac{\partial}{\partial y} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\widetilde{\psi} = \\ = \left[\frac{C_2}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial y} - i\epsilon\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + C_3z + A\cos y\right]\widetilde{\psi}. \tag{15}$$

Здесь, как и в случае уравнения (11), описана эволюция квантовой системы с бо́льшим числом степеней свободы, чем исходное уравнение.

3. Использование асимптотических методов Маслова

В этом разделе покажем, как с помощью асимптотических методов Маслова решать уравнения (9), (11) и (15)

3.1. Метод комплексного ростка Маслова

Уравнение (9) можно решать с помощью метода комплексного ростка Маслова в точке [16]. Рассматривается подстановка вида

$$\psi(z,\tau) = e^{(i/\epsilon)S(\tau)}e^{(i/\epsilon)P(\tau)(z-Q(\tau))}f\left(\frac{z - Q(\tau)}{\sqrt{\epsilon}}, \tau\right). \tag{16}$$

Волновая функция (16) имеет следующий физический смысл: неопределенность как координаты, так и импульса порядка $\sqrt{\epsilon}$. Используя правила дифференцирования и обозначая $\xi = \frac{z-Q}{\sqrt{\epsilon}}$, получим

$$i\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = e^{(i/\epsilon)S}e^{(i/\epsilon)P(z-Q)} \times$$

$$\times i\epsilon\left(\frac{i}{\epsilon}\dot{S}+\frac{i}{\epsilon}\dot{P}(z-Q)-\frac{i}{\epsilon}P\dot{Q}+\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\dot{Q}}{\sqrt{\epsilon}}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)f(\xi,\tau)-$$
$$-\epsilon^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=e^{(i/\epsilon)S}e^{(i/\epsilon)P(z-Q)}\left(P-i\sqrt{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2 f(\xi,\tau).$$

Подстановка в уравнение (9) приводит к следующему соотношению для f:

$$\left(-\dot{S}-\dot{P}\xi\sqrt{\epsilon}+P\dot{Q}-i\sqrt{\epsilon}\dot{Q}\frac{\partial}{\partial\xi}+i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)f=$$
$$=\frac{1}{2}\left(P-i\sqrt{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2 f+\left(A\cos(Q+\xi\sqrt{\epsilon})+\frac{(Q+\xi\sqrt{\epsilon})^2}{2}\right)f. \tag{17}$$

Проводя разложение по малому параметру $\cos(Q+\xi\sqrt{\epsilon})=\cos Q-\sin Q\cdot\xi\sqrt{\epsilon}-\frac{1}{2}\cos Q\cdot\xi^2\epsilon+\ldots$ и приравнивая слагаемые одного порядка по $\sqrt{\epsilon}$, получим

$$-\dot{S}+P\dot{Q}=\frac{P^2}{2}+A\cos Q+\frac{Q^2}{2}, \tag{18}$$
$$-\dot{P}=-A\sin Q+Q,\quad \dot{Q}=P, \tag{19}$$
$$i\frac{\partial f}{\partial\tau}=\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1-A\cos Q}{2}\xi^2\right)f. \tag{20}$$

Система уравнений (18)–(20) является классической системой Гамильтона для частицы в потенциале $U(z)=\cos z+z^2/2$. Соотношение (18) описывает набег фазы S со временем, а уравнение (20) показывает, как изменяется форма волнового пакета со временем.

3.2. Операторнозначный метод комплексного ростка Маслова

Уравнения (11) и (15) можно решать с помощью операторнозначного аналога метода комплексного ростка Маслова [17]. Будем искать решение в виде

$$\widetilde{\psi}(z,y,\tau)=e^{(i/\epsilon)S(\tau)}e^{(i/\epsilon)P(\tau)(z-Q(\tau))}f\left(\frac{z-Q(\tau)}{\sqrt{\epsilon}},y,\tau\right). \tag{21}$$

Отличие соотношения (21) от (16) в дополнительном аргументе y. Это связано с тем, что уравнения (11) и (15) описывают систему, квазиклассическую по переменной z и квантовую по переменной y. Еще одна особенность операторнозначного случая в том, что функцию $f(\xi,y,t)$ надо раскладывать в ряд по $\sqrt{\epsilon}$:

$$f=f^{(0)}+\sqrt{\epsilon}f^{(1)}+\epsilon f^{(2)}+\ldots\ . \tag{22}$$

По аналогии с предыдущим пунктом, подстановка волновой функции (21) в уравнение (11) приводит к соотношению для f

$$\left(-\dot{S}-\dot{P}\xi\sqrt{\epsilon}+P\dot{Q}-i\sqrt{\epsilon}\dot{Q}\frac{\partial}{\partial\xi}+i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)f=$$
$$=\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}-i\sqrt{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2 f+\left(A\cos y+\frac{(Q+\xi\sqrt{\epsilon})^2}{2}\right)f. \tag{23}$$

При подстановке волновой функции в уравнение (15) получим

$$\left(-\dot{S}-\dot{P}\xi\sqrt{\epsilon}+P\dot{Q}+i\sin\tau\frac{\partial}{\partial y}-i\sqrt{\epsilon}\dot{Q}\frac{\partial}{\partial\xi}+i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)f=$$
$$=\left[\frac{C_2}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}-i\sqrt{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2+A\cos y+C_3(Q+\xi\sqrt{\epsilon})\right]f. \tag{24}$$

Уже исследование (23) и (24) в нулевом приближении по ϵ демонстрирует их качественное отличие от уравнения (17): возникает задача на собственные значения для функции $f^{(0)}$

$$(-\dot{S}+P\dot{Q})f^{(0)}=\left[\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y+\frac{Q^2}{2}\right]f^{(0)} \tag{25}$$

для уравнения (23) и для уравнения (24)

$$\left(-\dot{S}+P\dot{Q}+P\sin\tau+\frac{\sin^2\tau}{4}\right)f^{(0)}=$$
$$=\left[\frac{C_2}{2}\left(P+\frac{\sin\tau}{2}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y+C_3Q\right]f^{(0)}. \tag{26}$$

Поскольку операторы, входящие в уравнения (25) и (26), содержат оператор дифференцирования $\partial/\partial y$ и умножения на функцию от y, но не от ξ, решение задач (25) и (26) можно искать методом разделения переменных:

$$f^{(0)}(\xi,y,\tau)=g(y)\phi(\xi,\tau). \tag{27}$$

Тогда функция $g(y)$ должна быть решением задачи на собственные значения

$$\left[\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y\right]g(y)=\lambda g(y) \tag{28}$$

для уравнения (23) и для (24)

$$\left[\frac{C_2}{2}\left(P+\frac{\sin\tau}{2}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y\right]g(y)=\lambda g(y). \tag{29}$$

В дальнейшем для простоты предположим, что собственное значение $\lambda=\lambda(P)$ является невырожденным, и $g(y)$ — единственная с точностью до числового множителя нормированная на единицу собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda(P)$. Тогда уравнение нулевого приближения примет вид

$$-\dot{S}+P\dot{Q}=\lambda(P)+\frac{Q^2}{2}$$

для уравнения (23) и для (24)

$$-\dot{S}+P\dot{Q}+P\sin\tau+\frac{\sin^2\tau}{4}=\lambda(P)+C_3Q.$$

С учетом полученных соотношений преобразуем уравнение (23):

$$\left(-\dot{P}\xi\sqrt{\epsilon}-i\sqrt{\epsilon}\dot{Q}\frac{\partial}{\partial\xi}+i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)f=$$
$$=\left[\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}-i\sqrt{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2+\right.$$
$$\left.+A\cos y-\lambda(P)+\frac{(Q+\xi\sqrt{\epsilon})^2}{2}-\frac{Q^2}{2}\right]f \tag{30}$$

и уравнение (24):

$$\left(-\dot{P}\xi\sqrt{\epsilon}-i\sqrt{\epsilon}\dot{Q}\frac{\partial}{\partial\xi}+i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}-i\sqrt{\epsilon}\sin\tau\frac{\partial}{\partial\xi}\right)f=$$
$$=\left[\frac{C_2}{2}\left(P+\frac{\sin\tau}{2}-i\frac{\partial}{\partial y}-i\sqrt{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2+\right.$$
$$\left.+A\cos y-\lambda(P)+C_3\xi\sqrt{\epsilon}\right]f. \quad (31)$$

Будем приравнивать слагаемые, пропорциональные $\sqrt{\epsilon}$, с учетом разложения (22) для f.

3.3. Суперпозиция осцилляторного и периодического потенциалов

Начнем с уравнения (30):

$$\left(-\dot{P}\xi-i\dot{Q}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)f^{(0)}=$$
$$=\left[\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y-\lambda(P)\right]f^{(1)}+$$
$$+\left[\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+Q\xi\right]f^{(0)}, \quad (32)$$

или

$$\left[\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y-\lambda(P)\right]f^{(1)}=$$
$$=\left[\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}-\dot{Q}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)-(\dot{P}+Q)\xi\right]f^{(0)}. \quad (33)$$

Учитывая, что $\lambda(P)$ — невырожденное собственное значение оператора $\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y$, получаем, что уравнение

$$\left[\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y-\lambda(P)\right]f^{(1)}=h^{(1)}$$

разрешимо относительно неизвестной функции $f^{(1)}(\xi,y,\tau)$ тогда и только тогда, когда известная функция $h^{(1)}(\xi,y,\tau)$ удовлетворяет свойству

$$\int g^*(y)h^{(1)}(\xi,y,\tau)\,dy=0.$$

Следовательно, уравнение (33) разрешимо относительно $f^{(1)}$ при

$$\int g^*(y)\left[\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}-\dot{Q}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)-(\dot{P}+Q)\xi\right]\times$$
$$\times f^{(0)}(\xi,y,\tau)\,dy=0.$$

Учитывая вид функции $f^{(0)}$ (27), приведем полученное соотношение к виду

$$\int g^*(y)\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}-\dot{Q}\right)g(y)\,dy=0,\quad \dot{P}=-Q. \quad (34)$$

Первое уравнение (34) нуждается в дополнительном упрощении. Учтем, что в соотношении (28) как $\lambda(P)$, так и $g(y,P)$ зависят от P. Запишем это соотношение:

$$\left[\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y-\lambda(P)\right]g(y,P)=0$$

и продифференцируем его по P:

$$\left[\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial P}\right]g(y,P)+$$
$$+\left[\frac{1}{2}\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y-\lambda\right]\frac{\partial g}{\partial P}=0.$$

Умножим соотношение на $g^*(y,P)$ и проинтегрируем по y:

$$\int g^*(y,P)\left[P-i\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial P}\right]g(y,P)\,dy=0.$$

Отсюда

$$\int g^*(y,P)\left[P-i\frac{\partial}{\partial y}\right]g(y,P)\,dy=\frac{\partial\lambda(P)}{\partial P}.$$

И первое уравнение (34) принимает вид

$$\dot{Q}=\frac{\partial\lambda(P)}{\partial P}.$$

Таким образом, квазиклассическая частица, эволюционирующая согласно уравнению Шрёдингера (10), движется по классическим траекториям — решениям системы Гамильтона

$$\dot{Q}=\lambda'(P),\quad \dot{P}=-Q$$

для необычного гамильтониана $H=\lambda(P)+\frac{Q^2}{2}$. При этом функция $\lambda(P)$ («кинетическая энергия частицы») определяется из задачи (28) на собственные значения.

3.4. Управляемый потенциал решетки

Перейдем к исследованию уравнения (31). Приравнивая слагаемые, пропорциональные $\sqrt{\epsilon}$, получим уравнение, аналогичное (32):

$$\left[\frac{C_2}{2}\left(P+\frac{\sin\tau}{2}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+A\cos y-\lambda(P)\right]f^{(1)}=$$
$$=\left[\left(C_2\left(P+\frac{\sin\tau}{2}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)-\dot{Q}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)-(\dot{P}+C_3)\xi\right]f^{(0)}. \quad (35)$$

Уравнение (35) отличается от уравнения (33) тем, что при $\left(P-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ появляется коэффициент C_2 и вместо величин P и $Q\xi$ записываются $P+\frac{\sin\tau}{2}$ и $C_3\xi$ соответственно. Поэтому исследование для уравнения (35) аналогично рассмотреному для (33). Квазиклассическая частица, описываемая уравнением (15), так же как и частица, описываемая (10), движется по классическим траекториям, являющимися решениями системы Гамильтона

$$C_2\dot{Q}=\lambda'(P),\quad \dot{P}=-C_3$$

для гамильтониана $H=\frac{1}{C_2}\lambda(P)+\frac{C_3^2}{2}$. Функция $\frac{\lambda(P)}{C_2}$ является кинетической энергией частицы и определяется из задачи (29) на собственные значения.

3.5. Исследование задачи на собственные значения

Как показано выше, решение задачи на собственные значения (29) $\lambda=\lambda(P)$ может рассматриваться как кинетическая энергия частицы. Исследуем эту задачу подробнее. Будем искать ее решение в виде [18]

$$g(y) = \exp\left\{-i\left(P + \frac{\sin\tau}{2}\right)y\right\}G(y), \tag{36}$$

причем

$$G(y + 2\pi) = G(y)\exp\left\{2\pi i\left(P + \frac{\sin\tau}{2}\right)\right\}. \tag{37}$$

Подстановка соотношения (36) в уравнение (29) приводит к уравнению

$$\left[-\frac{C_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A\cos y\right]G = \lambda G. \tag{38}$$

Если в уравнении (38) заменить $C_2 \to 1$, то оно будет являться аналогичной подстановкой (36) в (28). Решения уравнения (38) при условии (37) хорошо изучены в литературе по специальным функциям [19]. Уравнение (38) можно привести к виду уравнения Матье, за каноническую форму которого принято

$$\frac{d^2U}{dz^2} + (a + 16q\cos 2z)U = 0. \tag{39}$$

Решением этого уравнения будут функции $ce_0(z,q)$, $ce_1(z,q)$, $ce_2(z,q),\ldots$ и $se_1(z,q)$, $se_2(z,q),\ldots$. При $q \to 0$ их можно записать через разложения

$$ce_0(z,q) = \\ = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2^{r+1}q^r}{r!r!} - \frac{2^{r+3}r(3r+4)q^{r+2}}{(r+1)!(r+1)!} + O(q^{r+4})\right]\cos 2rz, \tag{40}$$

$$ce_1(z,q) = \cos z + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2^r q^r}{(r+1)!r!} - \frac{2^{r+1}rq^{r+1}}{(r+1)!(r+1)!} + \right. \\ \left. + \frac{2^r q^{r+2}}{(r-1)!(r+2)!} + O(q^{r+3})\right]\cos(2r+1)z, \tag{41}$$

$$se_1(z,q) = \sin z + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2^r q^r}{(r+1)!r!} - \frac{2^{r+1}rq^{r+1}}{(r+1)!(r+1)!} + \right. \\ \left. + \frac{2^r q^{r+2}}{(r-1)!(r+2)!} + O(q^{r+3})\right]\sin(2r+1)z, \tag{42}$$

$$ce_2(z,q) = \left[-2q + \frac{40}{3}q^3 + O(q^5)\right]\cos 2z + \\ + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2^{r+1}q^r}{(r+2)!r!} + \frac{2^{r+1}rq^{r+2}(47r^2 + 222r + 247)}{3^2(r+2)!(r+3)!} + \right. \\ \left. + O(q^{r+4})\right]\cos(2r+2)z. \tag{43}$$

Функции (40)–(43) называются косинус и синус эллиптического цилиндра. В общем случае, когда на параметры a и q нет ограничений, уравнение (39) можно решить методом Хилла [20].

Заключение

Рассмотренные асимптотические методы Маслова позволяют анализировать и решать уравнения с малым параметром при операторе дифференцирования. Такие задачи возникают в физике очень часто. В настоящей работе исследовано возникновение малого параметра в уравнениях Шрёдингера с потенциалами трехмерной и управляемой оптической решетки и определены условия применения асимптотических методов Маслова к решению этих уравнений. Рассмотрение различных условий, налагаемых на параметры в данных потенциалах, привело к использованию двух разных способов решения возникающих уравнений: метод комплексного ростка Маслова и операторнозначный метод комплексного ростка Маслова.

В настоящей работе получены в удобном виде для численного исследования соотношения, с помощью которых могут быть расчитаны интересующие характеристики атомных систем, указанных в работе, в оптических решетках.

Список литературы

1. *Ashkin A.* // Phys. Rev. Lett. 1978. **40**. P. 729.
2. *Bjorkholm J.E., Freeman R.R., Ashkin A., Pearson D.B.* // Phys. Rev. Lett. 1978. **41**. P. 1361.
3. *Chu S., Bjorkholm J., Ashkin A., Cable A.* // Phys. Rev. Lett. 1986. **57**. P. 314.
4. Laser Manipulation of Atoms and Ions. Proc. of Intern. School of Physics «Enrico Fermi» / Ed/ by E. Arimondo, W.D. Phillips, F. Strumia. Amsterdam, 1992.
5. *Migdall A., Prodan J., Phillips W.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1985. **54**. P. 2596.
6. *Gordon J.P., Ashkin A.* // Phys. Rev. A. 1980. **21**. P. 1606.
7. *Askar'yan G.A.* // Sov. Phys. JETP. 1962. **15**. P. 1088.
8. *Jackson J.D.* Classical electrodynamics. N. Y., 1962.
9. *Grimm R., Weidemuller M., Ovchinnikov Y.B.* // Adv. in Atomic, Molecular, and Optical Phys. 2000. **42**. P. 95.
10. *Allen L., Ederly J.H.* Optical resonance and two-level atoms. N. Y., 1975.
11. *Dalibard J., Cohen-Tannoudji C.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 1985. **2**. P. 1707.
12. *Dalibard J., Cohen-Tannoudji C.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 1989. **6**. N 11. P. 2023.
13. *Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynderg G.* Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications. N. Y., 1992.
14. *Ivanov V.V., Alberti A., Schioppo M.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2008. **100**. 043602.
15. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М., 2000.
16. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М., 1965.
17. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // Докл. РАН. 1995. **340**, № 1. С. 42.
18. *Маслов В.П.* Операторные методы. М., 1973.
19. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н.* Курс современного анализа. Трансцендентные функции. Т. 1, 2. М., 1963.
20. *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики. М., 1972.

Maslov's asymptotic methods in problems of the theory of optical lattices

D. E. Bulychev

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: lunix2003@mail.ru.

In this paper application of Maslov's asymptotic methods to equations arising in the theory of optical lattices is considered. The occurrence of a small parameter in the Schrodinger equation with the potentials of the three-dimensional optical lattice and driven lattice is investigated. Also the conditions for the application of Maslov's asymptotic methods to solving these equations are identified. Consideration of various conditions on the parameters in these potentials led to the use of two different methods of solving equations: the Maslov's method of complex germ and operator-method of complex germ. Relations which can can be used to calculate interesting characteristics of atomic systems in optical lattices are obtained.

Keywords: Maslov's asimptotic methods, optical lattices, dipole traps.
PACS: 37.10.Jk.
Received 31 May 2013.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2013).

Сведения об авторе

Булычев Дмитрий Евгеньевич — аспирант; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: lunix2003@mail.ru.