АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Математическое моделирование релятивистского эффекта при лазерной локации искусственных спутников Земли

М. В. Останина[1,a], М. А. Пасисниченко[2,3,b], В. С. Ростовский[1]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

[2] *Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга (ГАИШ МГУ), Россия, 119991, Москва, Университетский просп., д. 13.*

[3] *МАТИ-РГТУ имени К. Э. Циолковского, кафедра прикладной математики и информационных технологий. Россия, 121552, Москва, Оршанская ул., д. 3.*

E-mail: [a] *chich@goa.bog.msu.ru* [b] *pm@mati.ru*

Статья поступила 09.06.2013, подписана в печать 09.09.2013.

Построена математическая модель релятивистского эффекта, возникающего при проведении лазерной локации искусственных спутников Земли (ИСЗ) с поверхности Земли. Разработан алгоритм численных расчетов и проведен расчет величины этого эффекта в зависимости от положения ИСЗ на орбите. Показано, что этот эффект может быть измерен при локации существующих отечественных ИСЗ, оборудованных уголковыми лазерными отражателями.

Ключевые слова: математическая модель, релятивистский эффект, лазерная локация ИСЗ.
УДК: 52-17. PACS: 95.75.–z.

Введение

Современный уровень точности измерений при лазерной локации искусственных спутников Земли (ИСЗ) позволяет провести наблюдение ряда релятивистских эффектов общей теории относительности, вызываемых неинерциальностью движения лазерной станции, находящейся на вращающейся Земле. По словам Эйнштейна [1], поля инерции неинерциальных систем отсчета являются гравитационными полями частного вида. Поэтому при проведении лазерной локации ИСЗ с поверхности вращающейся Земли в той или иной мере должны проявляться эффекты общей теории относительности, и некоторые из них при современном уровне развития лазерной техники могут быть доступны наблюдению [2].

В конце прошлого столетия на основе работ [3] были проведены эксперименты по измерению поперечного доплер-эффекта при лазерной локации искусственных спутников Земли. И хотя поперечный доплер-эффект уже неоднократно наблюдался с использованием релятивистских частиц, эксперименты по измерению этого эффекта при лазерной локации имели смысл по двум причинам. Одной из них является то, что, хотя движение спутников является существенно нерелятивистским ($\beta \approx 2.6 \cdot 10^{-5}$), получаемый сдвиг частоты лазерного излучения ($\Delta\omega/\omega \approx 6 \cdot 10^{-10}$) тем не менее доступен измерению. Второй причиной этих измерений явилась наметившаяся тенденция всесторонней экспериментальной проверки основных принципов физики в тех условиях, в которых они не были проверены. Именно в конце прошлого столетия появился ряд работ [4–6], в которых были предложены эксперименты по этой тематике.

В настоящее время в связи с повышением точности угловых измерений при лазерной локации спутников [7] до 0.5 угловой секунды появилась возможность для измерения еще одного релятивистского эффекта.

При лазерной локации обычно измеряют дальность — расстояние от лазерной станции до отражателя ИСЗ, совершенно не интересуясь различием между направлением, по которому лазерный импульс был испущен к ИСЗ, и направлением, по которому отраженный импульс вернулся на лазерную станцию. Однако лазерный луч, по которому световой импульс распространяется с поверхности вращающейся Земли к ИСЗ, является кривой линией [8, 9] относительно реперных точек вращающейся вместе с Землей системы координат. Поэтому между этими направлениями должен существовать небольшой угол, который зависит от взаимного расположения лазерной станции и ИСЗ в момент локации, а также от расстояния между ними. Математическому моделированию этого релятивистского эффекта и выяснению перспектив его измерения и посвящена настоящая статья.

1. Постановка задачи

Предположим, что лазерная станция расположена на поверхности Земли в точке со сферическими координатами R_0, θ_0 и φ_0. Обозначим момент времени, в который лазерная станция испустила одиночный световой импульс в направлении ИСЗ, находящегося на околоземной эллиптической орбите, через t_b. Световой импульс в некоторый момент времени $t = t_r$ отразится от отражателей этого ИСЗ и попадет на приемный телескоп лазерной станции в момент времени $t = t_f$. Вычислим величину угла $\delta\alpha$ между направлением, по которому световой импульс необходимо послать к ИСЗ, чтобы он попал на его отражатели, и направлением, по которому отраженный импульс входит в приемный телескоп лазерной станции.

Рассмотрим топоцентрическую систему отсчета [10], начало которой совмещено с лазерной станцией, ось z направлена вдоль местной вертикали, ось x — по касательной к меридиану, а ось y — по касательной к параллели. Компоненты метрического тензора псевдориманова пространства-времени в этой системе отсчета имеют вид

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - \frac{\Omega^2}{c^2}\left\{[x\cos\theta_0 + (z+R_0)\sin\theta_0]^2 + y^2\right\},\\
g_{01} &= \frac{y\Omega}{c}\cos\theta_0,\\
g_{02} &= -\frac{\Omega}{c}[x\cos\theta_0 + (z+R_0)\sin\theta_0],\\
g_{03} &= \frac{y\Omega}{c}\sin\theta_0,\\
g_{11} &= g_{22} = g_{33} = -1,
\end{aligned}$$

где R_0 — радиус Земли, Ω — угловая частота ее вращения.

Распространение электромагнитных сигналов в неинерциальной системе отсчета, согласно общей теории относительности [11–13], описывается уравнениями для изотропного геодезического движения. Воспользуемся методом, развитым в нелинейной электродинамике вакуума [14–16], и перепишем эти уравнения в более удобном виде, переходя от дифференцирования по аффинному параметру к дифференцированию по времени $x^0 = ct$. Тогда они примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{(dx^0)^2} + \left\{\Gamma^1_{mi} - \frac{dx}{dx^0}\Gamma^0_{mi}\right\}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^m}{dx^0} = 0,\\
&\frac{d^2y}{(dx^0)^2} + \left\{\Gamma^2_{mi} - \frac{dy}{dx^0}\Gamma^0_{mi}\right\}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^m}{dx^0} = 0,\\
&\frac{d^2z}{(dx^0)^2} + \left\{\Gamma^3_{mi} - \frac{dz}{dx^0}\Gamma^0_{mi}\right\}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^m}{dx^0} = 0,
\end{aligned}\tag{1}$$

где Γ^n_{mi} — символы Кристоффеля.

Эти уравнения имеют первый интеграл

$$g_{ik}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^k}{dx^0} = 0. \tag{2}$$

Решения уравнений (1), (2) для лучей, по которым световой импульс распространяется с лазерной станции к космическому аппрату и обратно, имеют существенно разный вид и будут приведены позднее.

В топоцентрической системе отсчета [5] координаты x_S, y_S, z_S ИСЗ, движущегося по эллиптической орбите с требуемой точностью, имеют вид

$$\begin{aligned}
x_S(\xi, t(\xi)) &= a\Big\{\big[\cos\psi\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) +\\
&\quad + \sin\psi\cos\theta\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)\big]\cos\theta_0 -\\
&\quad - \sin\psi\sin\theta\sin\theta_0\Big\}(\cos\xi - e) -\\
&\quad - a\sqrt{(1-e^2)}\Big\{\big[\sin\psi\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) -\\
&\quad - \cos\psi\cos\theta\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)\big]\cos\theta_0 +\\
&\quad + \cos\psi\sin\theta\sin\theta_0\Big\}\sin\xi,\\
y_S(\xi, t(\xi)) &= a(\cos\xi - e)\big[\sin\psi\cos\theta\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) -\\
&\quad - \cos\psi\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)\big] +\\
&\quad + a\sqrt{(1-e^2)}\big[\sin\psi\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) +\\
&\quad + \cos\psi\cos\theta\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)\big]\sin\xi,\\
z_S(\xi, t(\xi)) &= a\Big\{\big[\cos\psi\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) +\\
&\quad + \sin\psi\cos\theta\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)\big]\sin\theta_0 +\\
&\quad + \sin\psi\sin\theta\cos\theta_0\Big\}(\cos\xi - e) +\\
&\quad + a\sqrt{(1-e^2)}\Big\{\big[\cos\psi\cos\theta\sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi) -\\
&\quad - \sin\psi\cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi)\big]\sin\theta_0 +\\
&\quad + \cos\psi\sin\theta\cos\theta_0\Big\}\sin\xi - R_0,
\end{aligned}\tag{3}$$

где θ — наклонение орбиты; φ — долгота восходящего узла; ψ — угловое расстояние перигея орбиты от узла; ξ — безразмерная переменная, называемая эксцентрической аномалией; a — большая полуось эллипса; e — его эксцентриситет.

Время t, входящее в выражения (3), является собственным временем невращающейся геоцентрической системы отсчета. Оно связано с эксцентрической аномалией ξ соотношением

$$t(\xi) = T_0 + \frac{T}{2\pi}[\xi - e\sin\xi], \tag{4}$$

где T_0 — постоянная интегрирования, имеющая смысл момента времени, в который ИСЗ находился в перигее; $T = 2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$ — период обращения ИСЗ по орбите; $GM = 3.98603 \cdot 10^{14}$ м^3/с^2 — произведение гравитационной постоянной на массу Земли [17].

2. Движение светового импульса к ИСЗ

Предположим, что в момент времени $t = t_b$ световой импульс был послан с лазерной станции в сторону ИСЗ и в момент времени $t = t_r$ попал на его отражатели. Обозначим эксцентрическую аномалию в момент попадания лазерного импульса на отражатели ИСЗ через ξ_r. Момент времени t_r, соответствующий этому значению ξ_r, может быть найден с помощью выражения (4).

Решение уравнений (1) для пучка лучей, при $t = t_b$ выходящих из лазерной станции (из точки $x = y = z = 0$), имеет вид

$$\begin{aligned}
x_L(t) &= R_0\sin\theta_0\cos\theta_0[\cos\Omega(t - t_b) - 1] +\\
&\quad + c(t - t_b)\Big\{\big[n_x\cos[\Omega(t - t_b) + \varphi_0] +\\
&\quad + n_y\sin[\Omega(t - t_b) + \varphi_0]\big]\cos\theta_0 - n_z\sin\theta_0\Big\},\\
y_L(t) &= -R_0\sin\theta_0\sin\Omega(t - t_b) -\\
&\quad - c(t - t_b)\big[n_x\sin[\Omega(t - t_b) + \varphi_0] -\\
&\quad - n_y\cos[\Omega(t - t_b) + \varphi_0]\big],\\
z_L(t) &= R_0\sin^2\theta_0[\cos\Omega(t - t_b) - 1] +\\
&\quad + c(t - t_b)\Big\{\big[n_x\cos[\Omega(t - t_b) + \varphi_0] +\\
&\quad + n_y\sin[\Omega(t - t_b) + \varphi_0]\big]\sin\theta_0 + n_z\cos\theta_0\Big\},
\end{aligned}\tag{5}$$

где n_x, n_y, n_z — постоянные интегрирования, определяющие ориентацию луча в пространстве.

В силу первого интеграла (2) они должны удовлетворять условию

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=1. \qquad (6)$$

Выберем из пучка лучей (5) луч, при $t=t_r$ проходящий через точку пространства, в которой в этот момент времени находится ИСЗ. Для обеспечения этого требования константы интегрирования и время t_r необходимо определить из уравнений

$$x_L(t_r)=x_S(\xi_r,t_r), \quad y_L(t_r)=y_S(\xi_r,t_r), \quad z_L(t_r)=z_S(\xi_r,t_r).$$

Разрешим эти уравнения относительно n_x, n_y и n_z и подставим их в уравнение (6). В результате получим трансцендентное уравнение относительно ξ_r

$$\begin{aligned}
&c^2\left\{T_0+\frac{T}{2\pi}[\xi_r-e\sin\xi_r]-t_b\right\}^2=\\
&=R_0^2-2aR_0(\cos\xi_r-e)\Big\{\cos\theta_0\sin\theta\sin\psi+\\
&\quad+\sin\theta_0\big[\cos\psi\cos(\Omega t_b+\varphi_0-\varphi)+\\
&\quad+\cos\theta\sin\psi\sin(\Omega t_b+\varphi_0-\varphi)\big]\Big\}-\\
&-2aR_0\sqrt{1-e^2}\Big\{\cos\theta_0\sin\theta\cos\psi-\\
&\quad-\sin\theta_0\big[\sin\psi\cos(\Omega t_b+\varphi_0-\varphi)-\\
&-\cos\theta\cos\psi\sin(\Omega t_b+\varphi_0-\varphi)\big]\Big\}\sin\xi_r+a^2[1-e\cos\xi_r]^2.
\end{aligned}$$

Это уравнение может быть решено численно относительно ξ_r. Тогда из выражения (4) несложно найти и t_r.

3. Движение отраженного светового импульса

Найдем теперь уравнение луча, по которому отраженный от ИСЗ световой импульс возвращается на лазерную станцию. Для этого нам необходимо найти решение уравнений (1), (2). Учитывая, что при $t=t_r$ координаты светового импульса и ИСЗ должны совпадать, получим

$$\begin{aligned}
x_L(t)&=a\Big\{\big[\cos\psi\cos(\Omega t+\varphi_0-\varphi)+\\
&\quad+\sin\psi\cos\theta\sin(\Omega t+\varphi_0-\varphi)\big]\cos\theta_0-\\
&\quad-\sin\psi\sin\theta\sin\theta_0\Big\}(\cos\xi_r-e)-\\
&-a\sqrt{(1-e^2)}\Big\{\big[\sin\psi\cos(\Omega t+\varphi_0-\varphi)-\\
&\quad-\cos\psi\cos\theta\sin(\Omega t+\varphi_0-\varphi)\big]\cos\theta_0+\\
&\quad+\cos\psi\sin\theta\sin\theta_0\Big\}\sin\xi_r+\\
&+c(t-t_r)\Big\{\big[m_x\cos(\Omega t+\varphi_0)+\\
&\quad+m_y\sin(\Omega t+\varphi_0)\big]\cos\theta_0-m_z\sin\theta_0\Big\},\\
y_L(t)&=a(\cos\xi_r-e)\big[\sin\psi\cos\theta\cos(\Omega t+\varphi_0-\varphi)-\\
&\quad-\cos\psi\sin(\Omega t+\varphi_0-\varphi)\big]+ \qquad (7)\\
&+a\sqrt{(1-e^2)}\big[\sin\psi\sin(\Omega t+\varphi_0-\varphi)+\\
&\quad+\cos\psi\cos\theta\cos(\Omega t+\varphi_0-\varphi)\big]\sin\xi_r+\\
&+c(t-t_r)\big[-m_x\sin(\Omega t+\varphi_0)+m_y\cos(\Omega t+\varphi_0)\big],\\
z_L(t)&=a\Big\{\big[\cos\psi\cos(\Omega t+\varphi_0-\varphi)+\\
&\quad+\sin\psi\cos\theta\sin(\Omega t+\varphi_0-\varphi)\big]\sin\theta_0+\\
&\quad+\sin\psi\sin\theta\cos\theta_0\Big\}(\cos\xi_r-e)+\\
&+a\sqrt{(1-e^2)}\Big\{\big[\cos\psi\cos\theta\sin(\Omega t+\varphi_0-\varphi)-\\
&\quad-\sin\psi\cos(\Omega t+\varphi_0-\varphi)\big]\sin\theta_0+\\
&\quad+\cos\psi\sin\theta\cos\theta_0\Big\}\sin\xi_r-R_0+\\
&+c(t-t_r)\Big\{\big[m_x\cos(\Omega t+\varphi_0)+\\
&\quad+m_y\sin(\Omega t+\varphi_0)\big]\sin\theta_0+m_z\cos\theta_0\Big\},
\end{aligned}$$

где m_x, m_y, m_z — постоянные интегрирования, удовлетворяющие условию

$$m_x^2+m_y^2+m_z^2=1. \qquad (8)$$

Эти постоянные мы должны выбрать так, чтобы в момент времени $t=t_f$ координаты светового импульса совпали с координатами лазерной станции $x_L(t_f)=0$, $y_L(t_f)=0$, $z_L(t_f)=0$. Разрешая эти уравнения относительно m_x, m_y, m_z и подставляя их в уравнение (8), приходим к трансцендентному уравнению относительно t_f

$$\begin{aligned}
&c^2\{t_f-t_r\}^2=a^2[1-e\cos\xi_r]^2+R_0^2-\\
&-2aR_0(\cos\xi_r-e)\Big\{\cos\theta_0\sin\theta\sin\psi+\\
&\quad+\sin\theta_0\big[\cos\psi\cos(\Omega t_f+\varphi_0-\varphi)+\\
&\quad+\cos\theta\sin\psi\sin(\Omega t_f+\varphi_0-\varphi)\big]\Big\}-\\
&-2aR_0\sqrt{1-e^2}\Big\{\cos\theta_0\sin\theta\cos\psi-\\
&\quad-\sin\theta_0\big[\sin\psi\cos(\Omega t_f+\varphi_0-\varphi)-\\
&\quad-\cos\theta\cos\psi\sin(\Omega t_f+\varphi_0-\varphi)\big]\Big\}\sin\xi_r.
\end{aligned}$$

Это уравнение также может быть решено численно относительно t_f.

4. Вычисление угла между касательными к лучам

При движении светового импульса по любому лучу направлением его распространения в некоторой точке является направление [18, 19] касательной к лучу в этой точке. Так как лучи, по которым световой импульс распространяется от лазерной станции к ИСЗ и обратно, разные, то между направлением, по которому световой импульс излучается лазерной станцией, и направлением, по которому отраженный от отражателей ИСЗ световой импульс возвращается в телескоп лазерной станции, существует некоторый угол α. Вычислим его.

Обозначим вектор, касательный к лучу, по которому электромагнитный импульс был послан с лазерной станции в момент времени $t=t_b$, через $\boldsymbol{N}$, а вектор, касательный к лучу, по которому он возвратился на лазерную станцию в момент времени $t=t_f$, через $\boldsymbol{M}$. Эти векторы удобно выбрать в виде

$$\boldsymbol{N}=\frac{c(t_r-t_b)}{a}\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=t_b}, \quad \boldsymbol{M}=-\frac{c(t_f-t_r)}{a}\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=t_f}.$$

Дифференцируя выражения (5) по времени и полагая в полученных соотношениях $t = t_b$, найдем компоненты вектора $\boldsymbol{N}$

$$N_x = (\cos\xi_r - e)\Big\{\big[\cos\psi\cos(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi) + \cos\theta\sin\psi\sin(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi)\big]\cos\theta_0 - \sin\psi\sin\theta\sin\theta_0\Big\} - \sqrt{1-e^2}\Big\{\big[\sin\psi\cos(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi) - \cos\theta\cos\psi\sin(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi)\big]\cos\theta_0 + \cos\psi\sin\theta\sin\theta_0\Big\}\sin\xi_r,$$

$$N_y = (\cos\xi_r - e)\{\cos\theta\sin\psi\cos(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi) - \cos\psi\sin(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi)\} + \sqrt{1-e^2}\{\sin\psi\sin(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi) + \cos\theta\cos\psi\cos(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi)\}\sin\xi_r - \frac{\Omega R_0(t_r - t_b)}{a}\sin\theta_0,$$

$$N_z = (\cos\xi_r - e)\Big\{\sin\psi\sin\theta\cos\theta_0 + \big[\cos\psi\cos(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi) + \cos\theta\sin\psi\sin(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi)\big]\sin\theta_0\Big\} - \sqrt{1-e^2}\Big\{\big[\sin\psi\cos(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi) - \cos\theta\cos\psi\sin(\Omega t_b + \varphi_0 - \varphi)\big]\sin\theta_0 - \cos\psi\sin\theta\cos\theta_0\Big\}\sin\xi_r - \frac{R_0}{a}.$$

Дифференцируя выражения (7) по времени и полагая в полученных соотношениях $t = t_f$, найдем компоненты вектора $\boldsymbol{M}$

$$M_x = (\cos\xi_r - e)\Big\{\big[\cos\theta\sin\psi\sin(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi) + \cos\psi\cos(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi)\big]\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0\sin\psi\Big\} - \sqrt{1-e^2}\Big\{\big[\sin\psi\cos(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi) - \cos\theta\cos\psi\sin(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi)\big]\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\psi\Big\}\sin\xi_r,$$

$$M_y = (\cos\xi_r - e)\Big\{\big[\cos\theta\sin\psi\cos(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi) - \cos\psi\sin(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi)\Big\} + \sqrt{1-e^2}\Big\{\big[\sin\psi\sin(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi) + \cos\theta\cos\psi\cos(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi)\Big\}\sin\xi_r + \frac{\Omega R_0(t_f - t_r)}{a}\sin\theta_0,$$

$$M_z = (\cos\xi_r - e)\Big\{\big[\cos\theta\sin\psi\sin(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi) + {}= \cos\psi\cos(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi)\big]\sin\theta_0 + \sin\theta\cos\theta_0\sin\psi\Big\} - \sqrt{1-e^2}\Big\{\big[\sin\psi\cos(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi) - \cos\theta\cos\psi\sin(\Omega t_f + \varphi_0 - \varphi)\big]\sin\theta_0 - \sin\theta\cos\theta_0\cos\psi\Big\}\sin\xi_r - \frac{R_0}{a}.$$

Для определения угла α между двумя векторами воспользуемся известным соотношением $\sin\alpha = |[\boldsymbol{NM}]|/(|\boldsymbol{N}|\cdot|\boldsymbol{M}|)$. Так как угол α мал ($\alpha \sim 10^{-5}$ рад), получим $\alpha \approx |[\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{M}]|/(|\boldsymbol{N}|\cdot|\boldsymbol{M}|)$. Таким образом, математическая модель эффекта нами построена.

5. Результаты численного анализа

Для проведения численных расчетов по описанному алгоритму была создана программа на языке FORTRAN. В программе было предусмотрено, что для снижения искажений, вносимых земной атмосферой, лазерная локация производится, только если ИСЗ находится выше 20° над линией местного горизонта. В топоцентрической системе отсчета это соответствует условию $N_z \geqslant |\boldsymbol{N}|\cos 70°$. При невыполнении этого условия в программе было предусмотрено пошаговое увеличение времени старта лазерного импульса t_b до тех пор, пока данное условие не будет выполнено.

В качестве лазерных станций при проведении численных расчетов были выбраны [20] Зеленчукская (43.7887° с.ш., 41.5654° в.д.) и Менделеево 1 (56.0267° с.ш., 37.2234° в.д.).

В качестве ИСЗ были выбраны ИСЗ «ЭТАЛОН», «ГЛОНАСС-12» [20] и «РАДИОАСТРОН» [21], имеющие на внешних панелях уголковые лазерные отражатели.

Численные расчеты показали, что при проведении локации указанных выше ИСЗ величина угла α слабо зависит от выбора лазерной станции: отличие ожидаемого угла α при локации Зеленчукской станцией от угла α при локации станцией Менделеево 1 составляет десятые доли угловой секунды.

Более существенное влияние на величину угла α оказывает размер орбиты и ее эксцентриситет. Так, например, при локации ИСЗ «ЭТАЛОН», обращающегося по круговой орбите радиусом 19 120 км, в зависимости от положения ИСЗ на орбите, угол α изменяется от 0.8 до 1.9 угловой секунды. При локации ИСЗ «ГЛОНАСС-12», обращающегося по почти круговой орбите большего радиуса, величина угла α изменяется от 1.0 до 2.5 угловой секунды.

Наиболее перспективным для проведения эксперимента по измерению релятивистского эффекта является ИСЗ «РАДИОАСТРОН», в настоящее время обращающийся по высокоэллиптической орбите ($a = 189\,000$ км, $e = 0.9$). При его локации угол α должен изменяться от 1.8 до 17.7 угловой секунды в зависимости от положения ИСЗ на орбите. С течением времени эксцентриситет орбиты ИСЗ «РАДИОАСТРОН» будет изменяться [21] под влиянием притяжения Луны, а высота перигея увеличится от нынешнего значения 10 000 км до 70 000. В результате такого изменения размеры орбиты возрастут и величина угла α будет изменяться от 6.8 до 24.5 угловой секунды.

Точность измерения угла α при лазерной локации ИСЗ в настоящее время ограничена погрешностями, вносимыми мерцанием атмосферы, и составляет, согласно [7], 0.5 угловой секунды $= 2.5 \cdot 10^{-6}$ радиан.

Заключение

Проведенное математическое моделирование эксперимента по измерению релятивистского эффекта показало, что в настоящее время при проведении локации ИСЗ на российских лазерных станциях попутно с выполнением основных ее задач можно измерить зависимость угла α от положения ИСЗ на орбите. При лазерной локации ИСЗ этот угол, как уже указывалось, не измеряют, хотя технические возможности для этого имеются.

Важным обстоятельством является то, что локацию можно осуществлять, используя только отечественные ИСЗ, оборудованные уголковыми лазерными отражателями, и отечественные лазерные станции.

Список литературы

1. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 1. М., 1965.
2. *Denisov V.I.* // Theor. Math. Phys. 1998. **217**, N 3. P. 1507.
3. *Ashworth D.G., Davies P.A.* // Proc. IEEE. 1976. **64**, N 2. P. 103.
4. *Уилл К.* Квантовая механика. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М., 1985.
5. *Denisov M.I., Denisov V.I.* // Phys. Rev. D. 1999. **60**, N 4. P. 047301.
6. *Collady D., Kostelecky V.A.* // Phys. Rev. D. 1998. **58**. P. 116002.
7. Глонасс — принципы построения и функционирования / Под ред. А. И. Петрова, В. Н. Харисова. 3-е изд., перераб. М., 2005.
8. *Denisov V.I., Denisov M.M.* // Comp. Math. and Math. Phys. 2008. **48**, N 8. P. 1418.
9. *Денисов М.М., Зубрило А.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 6, С. 11.
10. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. М., 1968.
11. *Denisov V.I.* // Theor. and Math. Phys. 1997. **111**, N 2. P. 639.
12. *Denisov V.I., Denisova I.P., Sokolov V.A.* // Theor. and Math. Phys. 2012. **172**, N 3. P. 1321.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., 1988.
14. *Denisov V.I., Denisova I.P., Krivchenkov I.V., Vshivtseva I.A.* // Doklady Physics. 2004. **49**, N 11. P. 630.
15. *Denisov V.I., Denisova I.P., Krivchenkov I.V., Vshivtseva I.A.* // Doklady Physics. 2003. **48**, N 12. P. 657.
16. *Denisov V.I., Denisova I.P., Svertilov S.I.* // Theor. Math. Phys. 2003. **135**, N 2. P. 720.
17. *Павленко Ю.Г.* Задачи по теоретической механике. М., 2003.
18. *Denisov V.I., Kravtsov N.V., Krivchenkov I.V.* // Quantum Electronics. 2003. **33**, N 10. P. 938.
19. *Denisov V.I., Denisova I.P.; Krivchenkov I.V.* // Doklady Mathematics. 2003. **67**, N 1. P. 90.
20. http://ilrs.gsfc.nasa.gov/ .
21. http://radioastron.ru .

Mathematical modeling of relativistic effects in the laser ranging of artificial Earth satellites

M. V. Ostanina [1,a], **M. A. Pasisnichenko**[2,3,b], **V. S. Rostovsky**[1]

[1]*Department of Quantum Field Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

[2]*P. K. Sternberg State Institute of Astronomy, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

[3]*Department of Applied Mathematics and Information Technologies, MATI-RSTU, Moscow 121552, Russia.*

E-mail: [a]*chich@goa.bog.msu.ru* [b]*pm@mati.ru.*

A mathematical model of a relativistic effect, that occurs when the satellite laser ranging is carried out from the surface of the Earth, is constructed. The algorithm of numerical calculations is worked out, and the magnitude of the effect, depending on the the satellite position in orbit, is calculated. It is shown that this effect can be measured at location of the existing native satellites, equipped with angled laser reflectors.

Keywords: mathematical model, relativistic effect, satellite laser ranging.
PACS: 95.75.–z.
Received 9 June 2013.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2013).

Сведения об авторах

1. Останина Маргарита Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-16-47, e-mail: chich@goa.bog.msu.ru.
2. Пасисниченко Максим Александрович — аспирант; тел.: (495) 939-16-47, e-mail: pm@mati.ru.
3. Ростовский Владимир Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-16-47.