

Индукцированный ток и прохождение через барьер в четырехфермионной модели с 2+1 измерениями

В. Ч. Жуковский^a, Е. А. Степанов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^azhukovsk@phys.msu.ru

Статья поступила 09.11.2013, подписана в печать 23.11.2013.

Рассмотрена трехмерная модель теории поля с компактификацией третьего измерения с четырехфермионным взаимодействием в присутствии внешнего калибровочного поля A_3 , в которой осуществляется генерация массы на двумерной бране. В рамках данной модели исследуется возникновение индуцированного тока. Вычислен индуцированный ток как функция потока поля Ааронова–Бома. Полученное выражение оказывается осциллирующим с частотой, зависящей от величины потока. При снятии компактификации вычислен коэффициент прохождения через дельтаобразный барьер, образованный потенциалом четырехфермионного взаимодействия.

Ключевые слова: модель Калуцы–Клейна, компактификация, четырехфермионное взаимодействие, низко-размерные модели, графен.

УДК: 539.12.01. PACS: 11.30.Qc, 11.30.Rd, 12.38.Mh, 12.39.–x, 21.65.–f.

Введение

В развиваемых в последнее время многомерных теориях поля одной из проблем является механизм, благодаря которому дополнительные измерения оказываются скрытыми. Оригинальной идеей Калуцы–Клейна является то, что дополнительное пятое измерение компактифицировано, с тем чтобы описать физические процессы в четырехмерном пространстве-времени нашего мира [1, 2]. Однако недавно особое внимание стало уделяться представлению мира на бране, в котором подразумевается локализация обычного вещества на трехмерном многообразии — бране, вложенной в многомерное пространство. В моделях мира на бране, таких как модели ADD [3] и Рэндалл–Сундрума [4], дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечно большой размер и могли бы приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам. Именно возможность обнаружения больших и бесконечных дополнительных измерений является основной причиной, из-за которой они представляют интерес.

В работе [5] была предложена модель, в которой существуют два типа фермионов, одни живут в пятимерном пространстве-времени и взаимодействуют с фермионами, живущими на 3-бране. Такое взаимодействие можно описать с помощью четырехфермионного взаимодействия при обмене калуца-клейновскими модами гравитона, что ведет к генерации динамической массы. В работе [6] модель [5] была рассмотрена в пятимерии, где высшая размерность была компактифицирована по кругу с радиусом компактификации R и, кроме того, были добавлены периодические и антипериодические граничные условия для фермионов. Модель была расширена введением постоянного калибровочного поля A_5 , живущего в пятимерном пространстве, для исследования нарушения киральной симметрии и получения динамической массы для легких фермионов при четырехфермионном взаимодействии с компонентой калибровочного поля A_5 . Эта идея была выдвинута

Хосотани (механизм Хосотани [7]). Она состоит в том, что в качестве хиггсовской частицы может выступать дополнительная компонента калибровочного поля высшей размерности A_5 . Юкавская связь, состоящая из четырехмерных скаляров и A_5 , похожа на калибровочную связь (также называемая юкавской унификацией) и тоже может приводить к генерации массы. Ненулевое поле A_5 нарушает калибровочную и киральную симметрию и играет роль хиггсовского поля [8].

В последние годы проявляется также интерес к теориям с небольшим количеством пространственно-временных измерений (так называемые низкоразмерные модели (см., например, [9, 10]), где исследована топологически массивная КЭД при конечной температуре и плотности и, в частности, построен поляризационный оператор модели в магнитном поле, и обзор [11]). Напомним известную работу [12], в которой была предложена модель трехмерной аномалии на основе теории конденсированных сред. В 1979 г. в работе [13] при исследовании линейных полимеров выяснилось, что непрерывная модель полимерной цепочки совпадает в основном с уже известными одномерными моделями квантованных полей. Теория поля в случае двух пространственных размерностей давно признана важной для понимания некоторых физических явлений, которые могут быть приблизительно рассмотрены как плоские. Особенный интерес к двумерным моделям возникает в физике конденсированного вещества, в рамках которой было открыто большое число важных новых явлений. Пример такой двумерной модели — графен, плоский одноатомный слой углерода, который обладает целым рядом необычных характеристик [14–16]. В ряде исследований [17, 18] были открыты такие свойства, как аномальный эффект Холла, свойства проводимости и ряд других интересных особенностей материала. В описании графена поведение электронов эффективно подчиняется уравнению Дирака [12, 19–21], и в таком случае удобно рассматривать эту задачу в рамках квантовой теории поля для фермионов в пространстве раз-

мерности $2 + 1$. В частности, модели Гросса–Невё [22] и Намбу–Йона-Лазинио [23–25] хорошо подходят для рассмотрения подобных задач. В таких плоских системах модель Гросса–Невё обычно используется для исследования свойств симметрии, нарушения киральной симметрии [26], а также для задач генерации массы фермионов [27]. Вторым примером теории с малым числом пространственно-временных измерений является полиацетилен. Интерес к этой модели вызван рядом причин. С экспериментальной точки зрения появляется возможность создания нанополупроводниковых устройств из этого материала, а с теоретической точки зрения эту модель можно представить как одномерную модель графена. В задаче [28] была рассмотрена модель полиацетилена в рамках модели Гросса–Невё с размерностью $1 + 1$ и были рассмотрены нарушение киральной симметрии и генерация фермионной массы.

Низкоразмерные модели с электромагнитными полями и нетривиальной топологией, подобные двумерной модели графена и фуллерена, рассматривались в недавних работах [29, 30]. Подобная проблема также обсуждалась в работе [31] как модель углеродной нанотрубки (см. также [32–34]). В модели [31] исследовалась генерация массы фермионов под влиянием внешнего магнитного поля Ааронова–Бома [35].

В нашей работе [36] мы рассмотрели генерацию массы, состоящей из компоненты калибровочного поля A_3 и $2D$ -конденсата фермионов в похожей модели, но в размерности $2 + 1$. Для этого мы получили эффективный потенциал взаимодействия как функцию фермионного конденсата и постоянного поля A_3 при периодических и антипериодических условиях на фермионы.

Недавно в работе [37] была рассмотрена поляризация вакуума в поле тонкого соленоида и исследовано возникновение индуцированного тока. В качестве применения полученного ими результата авторы рассмотрели графен в поле соленоида перпендикулярного плоскости образца. В настоящей работе мы исследуем индуцированный ток, возникающий благодаря поляризации вакуума в калибровочном поле, заданном третьей компонентой потенциала A_3 в $2+1$ -мерной модели [36] с двумя типами фермионов, живущими на бране и во всем объеме образца. В разделе 2 мы даем краткий обзор процесса динамической генерации массы фермионов, предложенного в работе [36], с целью ввести все технические детали, необходимые для вычисления в разделе 3 индуцированного тока. В 4-й части мы рассмотрели нашу модель без компактификации в отсутствие калибровочного поля с целью изучить распространение фермионов на плоскости с эффективным линейным барьером, создаваемым фермионным конденсатом за счет четырехфермионного взаимодействия. В рамках данной задачи исследуется прохождение фермионов через подобный барьер, моделируемый дельта-образными потенциалами с включением псевдоспина.

1. Модель

Рассмотрим $3D$ -фермионную модель, содержащую два типа фермионных полей, Ψ и L , и калибровочное поле A_M в трехмерном пространстве. Ψ -фермионы существуют в $3D$ -пространстве, а L — на $2D$ -бране.

Четырехфермионное эффективное взаимодействие этих фермионов может осуществляться за счет обмена возбужденными модами Калуцы–Клейна гравитонов во всем объеме [38]. Одним из возможных примеров такой модели является линейная дислокация атомов или молекул различных веществ на поверхности графена [39–41]. Дадим краткий обзор процесса динамической генерации массы фермионов, предложенного в работе [36], с целью ввести все технические детали для дальнейших вычислений, которые мы проведем в разделе 3. Лагранжиан $3D$ -модели, аналогичный лагранжиану для $5D$ -модели [5, 6], зададим в виде

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi} i \gamma^M D_M \Psi + [\bar{L} i \gamma^\mu D_\mu L + g^2 (\bar{\Psi} \gamma^M L) (\bar{L} \gamma_M \Psi)] \delta(x^3),$$

где $M = 1, 2, 3$; $\mu = 1, 2$; $D_M = \partial_M - ieA_M$. Здесь используются метрика $(+, -, -)$ и γ -матрицы, заданные в виде

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что фермионы Ψ и L содержат N_f компонент. Представим калибровочное поле как конденсат со средним значением компонент $\langle A_3 \rangle = \text{const} \neq 0$, and $\langle A_1 \rangle = \langle A_2 \rangle = 0$.

Проведем преобразование Хаббарда–Стратоновича, введя вспомогательное поле σ_M аналогично [5, 6], в результате получим

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi} i \gamma^M \partial_M \Psi + \bar{\Psi} \gamma^3 e A_3 \Psi + [\bar{L} i \partial L - \sigma^M \sigma_M + g \sigma_M \bar{\Psi} \gamma^M L + \text{h. c.}] \delta(x^3). \quad (1)$$

При больших N_f можно пренебречь флуктуациями поля относительно его среднего значения. Тогда можно использовать приближение среднего поля (см., например, [5]), заменяя реальное поле его средним значением, тогда $\langle \sigma_\mu \rangle = 0$, $\langle \sigma_3 \rangle = \sigma_3 = -\sigma$.

Компактифицируем третью размерность по кругу радиуса R и зададим дополнительный параметр — фазовое смещение α :

$$\Psi = N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi_n(x_\mu) e^{\frac{i \alpha}{R} (n + \alpha)},$$

тогда лагранжиан $\mathcal{L}^{(2)} = \int_0^{2\pi R} dx^3 \mathcal{L}^{(3)}$ после перехода к матричному представлению для фермионных полей Ψ

$$(\Psi)^T = (L, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_{-1}, \Psi_2, \Psi_{-2}, \dots)$$

примет вид

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \bar{\Psi} i \partial \Psi + \bar{\Psi} M \Psi - |\sigma|^2,$$

где массовая матрица ($eA_3 \equiv a$)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m^* & m^* & m^* & m^* & \dots & \dots \\ m & \frac{\alpha}{R} - a & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ m & 0 & \frac{\alpha+1}{R} - a & 0 & 0 & \dots & \dots \\ m & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{R} - a & 0 & \dots & \dots \\ m & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+2}{R} - a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$m = Ng\sigma$, $N = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ — нормировочная константа. Если σ будет иметь исчезающее вакуумное среднее, мы заменяем ее в выражении для m вакуумным средним $\langle\sigma\rangle$, т. е. $m = Ng\langle\sigma\rangle$. Собственные значения матрицы M определяют массы двумерных фермионов.

2. Эффективный потенциал модели

Производящий функционал нашей системы дается формулой

$$Z = \int [D\bar{\Psi}][D\Psi][D\sigma][D\sigma^*] e^{i \int d^2x \mathcal{L}^{(2)}}.$$

Интегрируя по фермионным полям, получаем

$$Z = \int [D\sigma][D\sigma^*] e^{-i \int d^2x V_{\text{eff}}(\sigma)},$$

где эффективный потенциал при разложении по $1/N_f$ определяется выражением

$$V_{\text{eff}} = |\sigma|^2 - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \ln \det(M + Ik).$$

Используя формулу

$$\det(M^2 + Ik_E^2) \equiv \det(M + ik_E) \det(M - ik_E),$$

получим

$$V_{\text{eff}} = |\sigma|^2 - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \ln \det(M^2 + Ik_E^2).$$

Отсюда с помощью несложных преобразований (см. [36]) найдем (в дальнейшем для сокращения выражений мы полагаем $\alpha = 0$, так как включение конечного значения фазы α , входящей аддитивно с aR , может быть легко учтено в конечном результате)

$$V_{\text{eff}} = |\sigma|^2 - \int_0^\Lambda \frac{dx x}{4\pi} \ln \left[(x \operatorname{sh}(\pi x R) + m^2 \pi R \operatorname{ch}(\pi x R))^2 + (x^2 - m^4 \pi^2 R^2) \sin^2(\pi a R) \right], \quad (2)$$

где мы ввели параметр обрезания Λ , поскольку интеграл расходится на верхнем пределе. После некоторых преобразований получаем

$$V_{\text{eff}}(\sigma, a) = |\sigma|^2 - \frac{1}{4\pi} \int_0^\Lambda dx x \ln \left(x^2 [\operatorname{ch}(2\pi R x) - \cos(2\pi R a)] + 2\pi R x |m|^2 \operatorname{sh}(2\pi R x) + (\pi R |m|^2)^2 [\operatorname{ch}(2\pi R x) + \cos(2\pi R a)] \right). \quad (3)$$

Этот интеграл в критической точке $m = 0$ ($\sigma = 0$) можно преобразовать к следующему виду:

$$V_{\text{eff}}(\sigma = 0, a) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\Lambda dx x \ln [\operatorname{ch}(2\pi R x) - \cos(2\pi R a)]. \quad (4)$$

3. Индуцированный ток

Рассмотрим эффект вакуумной поляризации, приводящий к возможности образования индуцированного тока. Заметим, что именно нетривиальная топология

через посредство вакуумных эффектов проявляется в возникновении вакуумного тока. Индуцированный ток $J = \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial A_3}$ направлен вдоль третьей координаты, и его можно найти с помощью формулы (3)

$$J_{\text{ind}} = \int_0^\infty \left(dx x \frac{1}{2} eR \sin(2\pi\nu) (m^4 \pi^2 R^2 - x^2) \right) \times \left\{ [\operatorname{ch}(2\pi R x) - \cos(2\pi\nu)] x^2 + 2\pi R x |m|^2 \operatorname{sh}(2\pi R x) + [\operatorname{ch}(2\pi R x) + \cos(2\pi\nu)] (\pi R |m|^2)^2 \right\}^{-1}. \quad (5)$$

Следует заметить, что приведенный выше интеграл сходится, и поэтому мы смогли распространить верхний предел до бесконечности. Как видно, ток является периодической функцией $\nu = eA_3 R$ и обращается в нуль при $\nu = n/2$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т. е. при $e\Phi/2\pi = n/2$, где $\Phi = 2\pi R A_3$ — поток калибровочного поля A_3 .

Интеграл (5) в критической точке $m = 0$ в согласии с (4) упрощается и принимает вид

$$J_{\text{ind}} = -\frac{1}{2} eR \sin(2\pi\nu) \int_0^\infty \frac{x dx}{\operatorname{ch}(2\pi R x) - \cos(2\pi\nu)}.$$

График зависимости индуцированного тока J_{ind} от величины поля $a = eA_3 R$ показан на рис. 1, где для удобства численных вычислений мы обезразмерили переменные $J_{\text{ind}}/e \rightarrow J_{\text{ind}}(e\Lambda)^{-1}$, $a \rightarrow a\Lambda^{-1}$ и $R \rightarrow R\Lambda$ параметром верхнего обрезания Λ (см. (2)). Стоит заметить, что в таком случае величина $\nu = aR$ остается безразмерной.

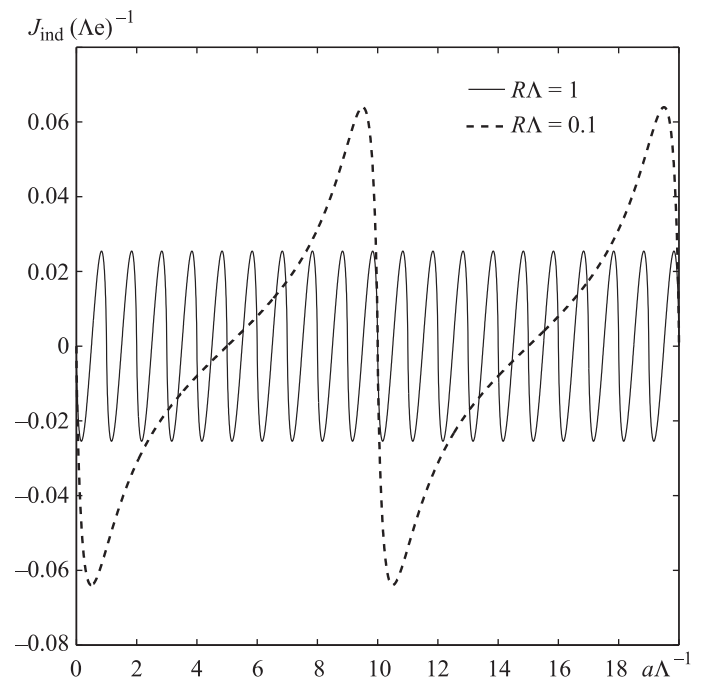
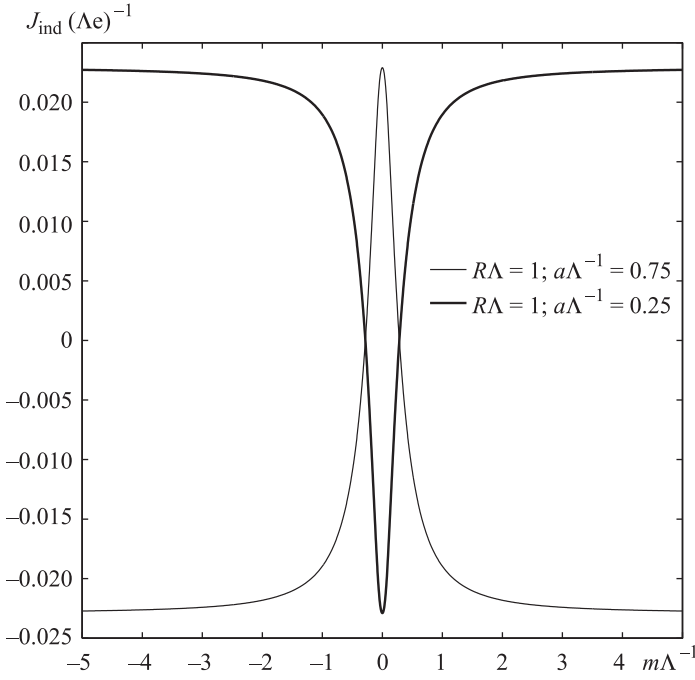
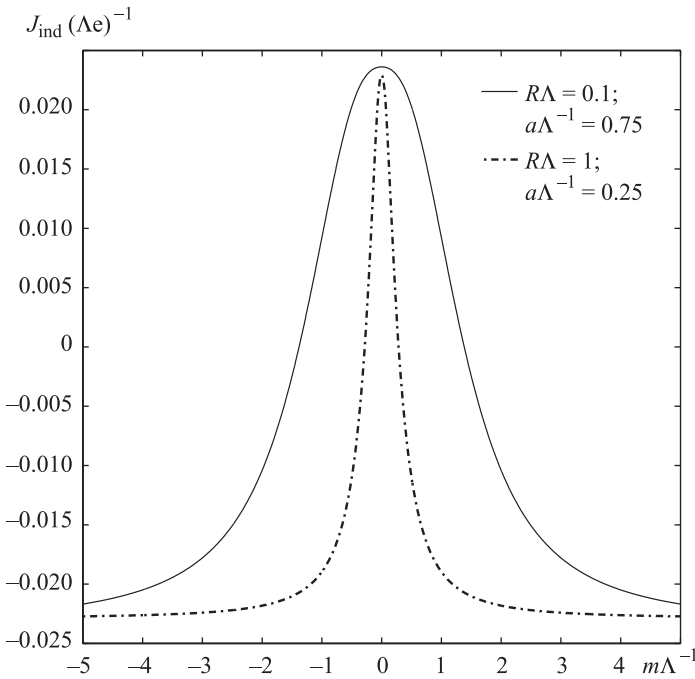


Рис. 1. Зависимость индуцированного тока от a в критической точке $m = 0$ при разных значениях радиуса компактификации R . Индуцированный ток обращается в нуль при $aR = n/2$

Графики зависимости индуцированного тока J_{ind} от величины m показаны на рис. 2 и 3, где тоже введено обезразмеривание переменных. На рис. 2 показана


 Рис. 2. Зависимость индуцированного тока от m

 Рис. 3. Зависимость индуцированного тока от m для одного значения ν при разных радиусах компактификации

зависимость тока J_{ind} от величины m при разных значениях $\nu = aR$ при одном и том же значении радиуса компактификации $R\Lambda = 1$. Значения поля $a\Lambda^{-1} = 0.25$ и 0.75 выбраны с разных сторон от экстремума потенциала (4) $\nu = n/2$ (в данном случае $\nu = 0.5$), чтобы производная от потенциала имела разные знаки, а значит, ток $J_{\text{ind}} = \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial A_3}$ имел разное поведение. На рис. 3 показана зависимость тока J_{ind} от величины m при разных значениях радиуса компактификации $R\Lambda$, но при одинаковом значении $\nu = aR$.

При тех значениях $\nu = eA_3R$, при которых величина $\tilde{\nu}$ ($\tilde{\nu} = \nu - n$ при $\nu > 0$ и $\tilde{\nu} = \nu + n$ при $\nu < 0$, где n — максимальное целое число меньшее $|\nu|$), принимает малые значения (эти точки соответствуют максимумам потенциала), ток будет равен

$$J_{\text{ind}}(\sigma = 0, a) \approx \frac{e\tilde{\nu}}{4\pi R} \ln \tilde{\nu}^2.$$

При тех значениях $\nu = eA_3R$, при которых величина $\tilde{\nu} = \nu - (2n + 1)/2$ при $\nu > 0$ и $\tilde{\nu} = \nu + (2n + 1)/2$ при $\nu < 0$, где n — максимальное целое число меньшее $|\nu|$, принимает малые значения (эти точки соответствуют минимумам потенциала), ток будет равен

$$J_{\text{ind}}(\sigma = 0, a) \approx \frac{e\tilde{\nu}}{2\pi R} \ln 2,$$

что соответствует поведению кривой тока, приведенной на графике рис. 1.

4. Коэффициент прохождения

В этом разделе мы рассмотрим двухфермионную систему, не накладывая условия периодичности, т. е. предполагая возможность распространения фермионов по всей плоскости (x, y) , однако на прямой y мы располагаем препятствие в виде δ -образного потенциала. Нашей задачей будет вычислить вероятность прохождения фермионов через этот δ -образный барьер. Подобная задача, правда для однофермионной системы, уже решалась нами в приложении к модели графена [42].

Воспользуемся лагранжианом (1), который мы запишем в двух вариантах для моделей с δ -потенциалами — $\sigma_2\delta$ -потенциалом и $\sigma_1\delta$ -потенциалом.

4.1. $\sigma_2\delta$ -Потенциал

Лагранжиан модели запишем следующим образом:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma_0\partial_t - i\gamma_1\partial_x - i\gamma_2\partial_y)\Psi + \left[\bar{L}(i\gamma_0\partial_t - i\gamma_1\partial_x)L - (i\bar{\Psi}\gamma_2\Delta L + i\bar{L}\gamma_2\Delta\Psi) \right] \delta(y).$$

Здесь Δ — константа, представляющая собой высоту барьера, играющая роль массы фермионов, возникающая, аналогично предыдущему разделу, из-за четырехфермионного взаимодействия, а γ -матрицы выбраны в виде (σ_i -матрицы Паули)

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1,$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2.$$

Уравнения Лагранжа для данной модели выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} [i\gamma_0\partial_t - i\gamma_1\partial_x - i\gamma_2\partial_y]\Psi - i\gamma_2\Delta\delta(y)L = 0, \\ ((i\gamma_0\partial_t - i\gamma_1\partial_x)L - i\gamma_2\Delta\Psi)\delta(y) = 0. \end{cases}$$

Домножив оба уравнения на γ_0 и учитывая, что $\gamma_0^2 = 1$, $\gamma_0\gamma_1 = -\sigma_2$, $\gamma_0\gamma_2 = \sigma_1$, получим

$$\begin{cases} [i\partial_t + i\sigma_2\partial_x - i\sigma_1\partial_y]\Psi - i\sigma_1\Delta\delta(y)L = 0, \\ ((i\partial_t + i\sigma_2\partial_x)L - i\sigma_1\Delta\Psi)\delta(y) = 0. \end{cases}$$

Для соответствия обозначениям предыдущей главы, где рассматривалась модель с той же дефектной линией и с похожим лагранжианом, но с учетом компактификации, произведем замену $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$, $\sigma_1 \rightarrow -\sigma_2$ и $\Delta \rightarrow -\Delta$, с тем чтобы дефектная линия в обоих случаях описывалась соответствующими матрицами Паули.

Рассмотрим стационарные состояния, заменяя $i\partial/\partial t \rightarrow E$ и $\hat{p}_x \rightarrow p_x$, после чего получим систему уравнений

$$\begin{cases} (E - \sigma\mathbf{p})\psi - i\sigma_2 L \Delta \delta(y) = 0, \\ ((E - \sigma_1 p_x)L - i\sigma_2 \Delta \Psi)\delta(y) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Можно переписать систему уравнений в терминах двумерных спиноров $\psi^T = (\psi_1, \psi_2)$, $L^T = (l_1, l_2)$:

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x - i\hat{p}_y)\psi_2 &= E\psi_1 - \Delta\delta(y)l_2, \\ (\hat{p}_x + i\hat{p}_y)\psi_1 &= E\psi_2 + \Delta\delta(y)l_1, \\ \hat{p}_x l_2 &= El_1 - \Delta\psi_2|_{y=0}, \\ \hat{p}_x l_1 &= El_2 + \Delta\psi_1|_{y=0}. \end{aligned}$$

После небольшого преобразования можно получить

$$\begin{aligned} \hat{p}_x(\psi_2 \pm \psi_1) - i\hat{p}_y(\psi_2 \mp \psi_1) &= E(\psi_1 \pm \psi_2) - \Delta\delta(y)(l_2 \mp l_1), \\ \hat{p}_x(l_2 \pm l_1) &= E(l_1 \pm l_2) - \Delta(\psi_2 \mp \psi_1)|_{y=0}. \end{aligned}$$

Исключим из уравнений компоненты l_i , тогда для $\psi_1 \pm \psi_2$ получим

$$(p_x \mp E)(\psi_2 \pm \psi_1) - i\hat{p}_y(\psi_2 \mp \psi_1) = \pm \Delta^2 \delta(y) \frac{\psi_2 \pm \psi_1}{E \pm p_x},$$

или

$$\begin{aligned} (p_x^2 - E^2)(\psi_2 + \psi_1) - i\hat{p}_y(\psi_2 - \psi_1)(E + p_x) &= \Delta^2 \delta(y)(\psi_2 + \psi_1), \\ (p_x^2 - E^2)(\psi_2 - \psi_1) - i\hat{p}_y(\psi_2 + \psi_1)(-E + p_x) &= \Delta^2 \delta(y)(\psi_2 - \psi_1). \end{aligned}$$

Сначала домножим первое уравнение на $\psi_2 - \psi_1$, а второе на $\psi_2 + \psi_1$, после чего вычтем одно из другого, чтобы исключить δ -функцию. Проинтегрируем получившееся выражение вблизи $y = 0$, после чего получим

$$(\chi^2 - \varphi^2)|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0, \quad (7)$$

где

$$\varphi = (\psi_1 + \psi_2)\sqrt{E - p_x}, \quad i\chi = (\psi_2 - \psi_1)\sqrt{E + p_x}.$$

Это первое граничное условие.

Вернемся к системе уравнений и теперь домножим первое на $(\psi_2 + \psi_1)(p_x - E)$, а второе на $(\psi_2 - \psi_1) \times (E + p_x)$ и вычтем одно из другого, после чего получим

$$\begin{aligned} 1 + \frac{(\psi_1 + \psi_2)(-i\hat{p}_y)(\psi_2 - \psi_1) - (\psi_2 - \psi_1)(-i\hat{p}_y)(\psi_2 + \psi_1)}{(\psi_2 + \psi_1)^2(p_x - E) - (\psi_2 - \psi_1)^2(p_x + E)} &= \\ = -\frac{\Delta^2 \delta(y)}{E^2 - p_x^2}. \end{aligned}$$

Учитывая первое граничное условие (7), можно проинтегрировать получившееся выражение вблизи $y = 0$, используя замену переменных

$$\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right)' = \frac{\psi_1' \psi_2 - \psi_2' \psi_1}{\psi_2^2}.$$

В результате получим

$$i \ln(\varphi + \chi)|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = -\frac{\Delta^2}{\sqrt{E^2 - p_x^2}}.$$

Это второе граничное условие. Оба граничных условия можно записать в виде

$$\frac{(\chi + \varphi)_{\varepsilon}}{(\chi + \varphi)_{-\varepsilon}} = e^{iV_0}, \quad (8)$$

$$\frac{(\chi - \varphi)_{\varepsilon}}{(\chi - \varphi)_{-\varepsilon}} = e^{-iV_0}, \quad (9)$$

где $V_0 = \frac{\Delta^2}{\sqrt{E^2 - p_x^2}}$.

Решение для свободного уравнения Дирака для $y > 0$ и $y < 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{<} &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_{<} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix} e^{ip_x x + ip_y y} + B \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\phi} \end{pmatrix} e^{ip_x x - ip_y y}, \\ \psi_{>} &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_{>} = C \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix} e^{ip_x x + ip_y y}. \end{aligned}$$

Здесь $p_x = p \cos \phi$, $p_y = p \sin \phi$, откуда $\sqrt{E + p_x} = p\sqrt{2} \cos \frac{\phi}{2}$, $\sqrt{E - p_x} = p\sqrt{2} \sin \frac{\phi}{2}$. После подстановки этих решений в граничные условия (8), (9) получим

$$C = e^{iV_0},$$

откуда следует, что коэффициент прохождения в этом случае равен единице ($T = 1$).

4.2. $\sigma_1 \delta$ -Потенциал

Заменяем матрицу $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ в потенциале взаимодействия, после чего получим систему уравнений Лагранжа, аналогичную (6)

$$\begin{cases} (E - \sigma\mathbf{p})\psi - i\sigma_1 L \Delta \delta(y) = 0, \\ ((E - \sigma_1 p_x)L - i\sigma_1 \Delta \Psi)\delta(y) = 0. \end{cases}$$

После вычислений, аналогичных вычислениям в предыдущем разделе, получим первое граничное условие

$$(\chi^2 - \varphi^2)|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0,$$

где

$$\varphi = (\psi_1 + \psi_2)\sqrt{E + p_x}, \quad i\chi = (\psi_2 - \psi_1)\sqrt{E - p_x}, \quad (10)$$

и второе граничное условие

$$\frac{\varphi \hat{p}_y \chi - \chi \hat{p}_y \varphi}{\varphi^2 - \chi^2} = \frac{\Delta^2 \delta(y)}{\sqrt{E^2 - p_x^2}}.$$

Это уравнение похоже на уравнение из первой части этого раздела, откуда, учитывая новые обозначения (10), получим

$$C e^{i\phi/2} e^{-iV_0} = e^{i\phi/2} + B e^{-i\phi/2} \cos \phi,$$

$$C e^{i\phi/2} e^{iV_0} \cos \phi = e^{i\phi/2} \cos \phi + B e^{-i\phi/2}.$$

Решение этих уравнений выглядит так:

$$C = \frac{\sin^2 \phi}{e^{-iV_0} - \cos^2 \phi e^{iV_0}},$$

откуда можно получить значение коэффициента прохождения

$$T = |C|^2 = \frac{\sin^4 \phi}{1 + \cos^4 \phi - 2 \cos^2 \phi \cos 2V_0}$$

Заключение

Таким образом, в настоящей статье мы рассмотрели возможность генерации индуцированного тока в 2+1-мерной модели в дополнительном измерении. Мы показали, что именно эффект вакуумной поляризации приводит к возможности образования индуцированного тока. Заметим роль нетривиальной топологии, которая через посредство вакуумных эффектов проявляется в возникновении вакуумного тока.

В заключительной части нашей работы мы получили коэффициент прохождения фермионов через линейный барьер в плоской 2+1-мерной модели в отсутствие калибровочного поля. Такой эффективный барьер может создаваться фермионным конденсатом за счет четырехфермионного взаимодействия. В рамках данной задачи мы рассмотрели два варианта такого барьера, формируемого $\sigma_1\delta$ - и $\sigma_2\delta$ -потенциалами. Из полученного результата следует, что $\sigma_2\delta$ -потенциал не создает препятствия для прохождения фермионов через такой эффективный линейный барьер, а в случае $\sigma_1\delta$ -потенциала коэффициент прохождения равен единице только при $\phi = \pi/2$.

Авторы выражают благодарность Д. Эберту, А. В. Борисову и А. Е. Лобанову за ценные замечания и участие в плодотворной дискуссии при проведении нашего исследования.

Список литературы

1. Kaluza Th. // d. Preuss. Akad. d. Wiss. Sitzungaber. 1921. P. 966.
2. Klein O. // Zeitsch. f. Phys. 1926. **37**. P. 895.
3. Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.R. // Phys. Lett. 1998. **B429**. P. 263.
4. Randall L., Sundrum R. // Phys. Rev. Lett. 1990. **83**. P. 3370.
5. Abe H., Miguchi H., Muta T. // Mod. Phys. Lett. 2000. **A15**. P. 445.
6. Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Tyukov A.V. // Mod. Phys. Lett. 2010. **A25**. P. 2933.
7. Hosotani Y. // Phys. Lett. 1983. **B126**. P. 309.
8. Sundrum R. // arXiv: hep-th/0508134v2.

9. Zhukovsky K.V., Eminov P.A. // Phys. Lett. 1995. **B359**. P. 155.
10. Жуковский К.В., Эминов П.А. // Ядерная физика. 1996. **59**. P. 1265.
11. Жуковский В.Ч., Разумовский А.С., Жуковский К.В. // Изв. вузов (Поволжский регион). 2003. **2**. С. 80.
12. Semenoff G.W. // Phys. Rev. Lett. 1984. **53**. P. 2449.
13. Su W.P., Schrieffer J.R., Heeger A.J. // Phys. Rev. Lett. 1979. **42**. P. 1698.
14. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et al. // Science. 2004. **306**. P. 666.
15. Katsnelson M.I. // Mater. Today. 2007. **10**. P. 20.
16. Geim A.K. // Science. 2009. **324**. P. 1530.
17. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et al. // Nature. 2005. **438**. P. 197.
18. Castro Neto A.H., Guinea F., Peres N.M.R. et al. // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**. P. 109.
19. Wallace P.R. // Phys. Rev. 1947. **71**. P. 622.
20. Gusynin V.P., Sharapov S.G., Carbotte J.P. // Int. J. Mod. Phys. 2007. **B21**. P. 4611.
21. Castro Neto A.H. // arXiv: 1004.3682 [cond-mat.mtrl-sci].
22. Gross D., Neveu A. // Phys. Rev. 1974. **D10**. P. 3235.
23. Nambu Y., Jona-Lasinio G. // Phys. Rev. 1961. **122**. P. 345.
24. Klimenko K.G. // Z. Phys. 1988. **C37**. P. 457.
25. Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H. // Phys. Rev. 1989. **D39**. P. 3088.
26. Caldas H., Rudnei O. Ramos // Phys. Rev. 2009. **B80**. 115428.
27. Joaquin E. Drut, Dam Thanh Son // Phys. Rev. 2008. **B77**. 075115.
28. Caldas H. // arXiv: 0809.0722v2 [cond-mat.str-el].
29. Fernando de Juan, Cortijo A., Vozmediano M.A.H. // Phys. Rev. 2007. **B76**. 165409.
30. Gonzalez J., Guinea F., Vozmediano M.A.H. // Nucl. Phys. 1993. **B406**. P. 771.
31. Gamayun A.V., Gorbar E.V. // arXiv: hep-ph/0411157v2.
32. Efrain J. Ferrer, Vivian de la Incera // arXiv: hep-ph/0408229v1.
33. Song D.Y. // Phys. Rev. 1993. **D48**. P. 3925.
34. Sitenko Yu.A. // Phys. Rev. 1999. **D60**. 125017.
35. Aharonov Y., Bohm D. // Phys. Rev. 1959. **115**. P. 485.
36. Zhukovsky V.Ch., Stepanov E.A. // Phys. Lett. 2012. **B718**. P. 597.
37. Jackiw R., Milstein A.I., Pi S.Y. et al. // arXiv: 0904.2046v3 [cond-mat.mes-hall].
38. Han T., Lykken J.D., Zhang R.-J. // Phys. Rev. 1999. **D59**. 105006.
39. Zhao L., He R. et al. // Science. 2011. **333**. P. 999.
40. Nair R.R., Sepioni M. et al. // Nature Physics. 2012. **8**. P. 199.
41. Ribeiro R.M., Peres N.M.R., Coutinho J. et al. // Phys. Rev. 2008. **B78**. 075442.
42. Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Stepanov E.A. // arXiv: 1307.5422v3 [cond-mat.mes-hall].

Induced current and transmission through the barrier in the four-fermion model in 2+1 dimensions

V. Ch. Zhukovsky^a, E. A. Stepanov

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^azhukovsk@phys.msu.ru.

A three-dimensional theoretical model with compactification of the third dimension in the presence of a four-fermion interaction under the A_3 external gauge field, where the mass was generated in a two-dimensional brane, has been considered. In the framework of this model the appearance of an induced current was predicted. The induced current

was obtained as the function of the flux of Aharonov–Bohm field. The resulting expression oscillates with frequency, depending on the value of the flux. In the absence of compactification, the transmission coefficient through the delta-shaped barrier that was formed by the four-fermion interaction was obtained.

Keywords: Kaluza–Klein model, compactification, four-fermion interaction, low-dimensional models, graphene.

PACS: 11.30.Qc, 11.30.Rd, 12.38.Mh, 12.39.–x, 21.65.–f.

Received 9 November 2013.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2014).

Сведения об авторах

1. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
2. Степанов Евгений Андреевич — аспирант; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: stepanov@physics.msu.ru.