

ФИЗИКА ЗЕМЛИ, АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

Ортогональные функции турбулентных флуктуаций в атмосфере Земли

В. П. Юшков, Е. В. Юшков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра физики атмосферы. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: yushkov@phys.msu.ru

Статья поступила 29.10.2013, подписана в печать 20.12.2013.

Предложена система ортогональных функций, позволяющая статистически оптимально описывать турбулентные флуктуации пространственной плотности функции распределения одинаковых лагранжевых воздушных частиц.

Ключевые слова: атмосфера, турбулентность, ортогональные функции.
УДК: 551.551.5:551.511.61. PACS: 47.27.Ak.

Введение

Хорошо известно, что сферические гармоники, являющиеся собственными функциями оператора Лапласа на сфере, представляют удобный ортонормированный базис для многих задач метеорологии и климатологии. А. М. Обухова обосновал их применимость и для описания метеорологических полей, рассматриваемых как случайные [1]. Однако для описания трехмерной картины турбулентного и синоптического (макротурбулентного) перемешивания в толщине атмосферы единой системы ортогональных функций до сих пор не предложено. После работы Обухова [2] широкое распространение получили эмпирические ортогональные функции, однако их выбор не обоснован какими-либо уравнениями и зависит от выбора исследуемой характеристики. В настоящей работе для статистически оптимального описания турбулентных флуктуаций в атмосфере Земли предлагается система функций, являющихся решением специальной задачи Штурма–Лиувилля. Будет показано, что для турбулентных флуктуаций в поле силы тяжести с потенциалом вида $-\mathfrak{G}/r$ эти функции могут быть эффективно вычислены и использованы для решения широкого спектра геофизических задач, связанных с вероятностным представлением метеорологических полей в атмосфере.

1. Постановка задачи

Задачу Штурма–Лиувилля для ортогональных собственных функций (СФ) в атмосфере сформулируем следующим образом: требуется найти СФ, являющиеся решением уравнения

$$-\frac{\gamma^2}{2}\Delta\psi - \frac{\mathfrak{G}}{r}\psi = \mathcal{E}\psi, \quad (1)$$

ограниченные и квадратично интегрируемые вне сферы радиуса a и удовлетворяющие на границе условию Неймана

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функции ψ_i будут статистически оптимально в смысле, данном Обуховым в [2], описывать вариации плотности и неопределенность

(ошибку измерения) плотности функции распределения одинаковых лагранжевых воздушных частиц. Параметр γ в (1) определяет скорость диссипации флуктуаций потенциальной плотности (плотности воздуха, адиабатически приводимой к средней температуре), которая функционально связана с термодинамической энтропией этих частиц и с тепловой энергией турбулентных флуктуаций [3]. Потенциальная плотность после статистического осреднения или осреднения по времени сходится к пространственной плотности функции распределения одинаковых лагранжевых частиц. Отклонение измеряемой потенциальной плотности от плотности вероятности и описывается первыми СФ задачи (1), (2). Эти СФ пока не учитывают вращения Земли и спиральности атмосферных движений, а потому являются лишь первым приближением к системе оптимальных ортогональных функций разложения флуктуаций метеорологических полей.

Параметр γ определяет характерные времена и пространственные масштабы выравнивания турбулентных неоднородностей энтропии лагранжевых воздушных частиц через взаимодействие с адиабатическими, т.е. быстрыми и сжимаемыми, хотя и малыми по амплитуде движениями в атмосфере. Такой механизм переноса энергии турбулентных флуктуаций по спектру за счет генерации и взаимодействия с быстрыми адиабатическими движениями был предложен в работе [4]. В этой работе была высказана гипотеза, что энергия этих флуктуаций передается по спектру не «каскадно», за счет гипотетического «разрушения» больших вихрей, а «резонансно», путем нелинейного взаимодействия несжимаемых и адиабатических движений в атмосфере. Адиабатические движения в консервативном приближении не нуждаются во внешнем источнике энергии, являются более быстрыми в смысле пространственной корреляции и статистически описывают нелокальное взаимодействие несжимаемых турбулентных флуктуаций. Механизм такого взаимодействия хорошо известен как взаимодействие звука и турбулентности и для атмосферы детально описан Обуховым, Мониным и Татарским [5]. Идею взаимодействия несжимаемых синоптических и сжимаемых адиабатических движений можно найти и в известной работе Обухова и Монины

об адаптации метеорологических полей [6]. На важную роль взаимодействия волновой и несжимаемой (колмогоровской) турбулентности в атмосфере указывают работы В. Е. Захарова с соавторами [7, 8]. Резонансный перенос энергии не является строго каскадным, от больших масштабов к меньшим, а лишь «в среднем» направлен в сторону больших волновых чисел [3].

2. Формальное решение

В принципиальном плане задача (1), (2) была решена еще в начале прошлого века, как обобщение решения уравнения Шрёдингера. При $\mathcal{E} < 0$ эта задача имеет дискретный спектр решений, квадратично интегрируемых вне сферы. Однако общее решение (1), (2) выражается через гипергеометрические функции, поведение которых, а также спектр собственных значений (СЗ) зависят от параметров γ , \mathcal{G} , a . Параметр γ для атмосферы Земли пока может быть лишь предварительно оценен из физических соображений, остальные параметры хорошо известны: $a \approx 6.37 \cdot 10^6$ м, $\mathcal{G} = ga^2$, $g \approx 9.81$ м/с². Ниже будет показано, что собственные функции задачи (1), (2) при таких значениях параметров могут быть эффективно аппроксимированы. Натурные наблюдения и статистическая обработка метеорологических данных позволят в дальнейшем уточнить значение параметра γ и подобрать его так, чтобы синоптические флуктуации энтропии или плотности функции распределения воздушных частиц в атмосфере Земли описывались этим рядом собственных функций статистически наиболее эффективно.

Приведем задачу (1), (2) к безразмерному виду, используя масштаб l_0 , значение которого можно выбрать исходя из размерных масштабов задачи и соображений удобства численного анализа. Пусть $x = r/l_0$, $x_0 = a/l_0$, тогда

$$\Delta\psi + \frac{G}{x}\psi = E\psi, \quad (3)$$

где $E = -2\mathcal{E}l_0^2/\gamma^2$, а $G = 2ga^2l_0/\gamma^2$. Граничное условие:

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (4)$$

Постоянная G больше нуля, как и собственные значения E дискретного спектра этой задачи. С точностью до нормирующего множителя интегрируемые решения задачи (3), (4) — линейные комбинации СФ: $\psi_{njm} = Y_j^m(\theta, \phi)R_{nj}(x)$, где Y_j^m — сферические функции, которые выражаются через присоединенные полиномы Лежандра от $\cos\theta$ и гармонические функции ϕ . Уравнение для радиальной компоненты $R(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \frac{j(j+1)}{x^2} R + \frac{G}{x} R - ER = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Решения этого уравнения (см., например, [9]):

$$R(x) = x^{-1-j} e^{-\sqrt{E}x} F \left(-j - \frac{G}{2\sqrt{E}}, -2j; 2\sqrt{E}x \right), \quad (6)$$

где $F(\alpha, \beta; y)$ — решения вырожденного гипергеометрического уравнения

$$yu'' + (\beta - y)u' - \alpha u = 0.$$

Собственные значения E_{nj} определяются граничным условием при $x = x_0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F \left(-j - \frac{G}{2\sqrt{E}}, -2j; 2\sqrt{E}x \right) - \frac{\sqrt{E}x + j + 1}{2\sqrt{E}x} F \left(-j - \frac{G}{2\sqrt{E}}, -2j; 2\sqrt{E}x \right) = 0. \quad (7)$$

3. Параметр скорости диссипации γ и спектр СЗ

Формальное решение (6) не позволяет представить, как выглядит энергетический спектр СЗ, определяемых (7), и какой характерный масштаб имеют первые СФ, описывающие поведение флуктуаций в атмосфере Земли. Мы покажем на примере сферически-симметричных СФ ($j = 0$), что спектр СЗ и поведение СФ $R(x)$ можно эффективно аппроксимировать хорошо известными специальными функциями.

Пока неизвестным параметром такой аппроксимации является значение параметра γ . Если выравнивание пространственных неоднородностей энтропии или плотности вероятности происходит за счет малых адиабатических (акустических) движений в атмосфере, а не за счет вязкости, то и параметр γ , характеризующий скорость выравнивания флуктуаций энтропии, может значительно превышать коэффициент затухания адиабатических флуктуаций в идеальном газе $\eta = (4\nu/3 + \zeta) + (C_p/C_v - 1)\chi$ (ν — коэффициент кинематической вязкости, ζ — вторая вязкость, χ — температуропроводность) [10]. А уже адиабатические колебания на малых масштабах будут затухать за счет вязкости и теплопроводности. Самые короткие адиабатические флуктуации, длина волны которых сопоставима с их амплитудой, уже будут нелинейны, и их спектр описывается теорией волновой турбулентности [8]. Если предположить, что переход от несжимаемых движений к адиабатическим происходит в инерционном интервале турбулентности [3], то можно оценить параметр γ как $\eta H_0/\lambda_0$, где $\eta \approx 0.26$ см²/с, $H_0 \sim 8 \cdot 10^3$ м — приведенная высота атмосферы, а $\lambda_0 \sim 10^{-1}$ м — масштаб, характеризующий связь турбулентной кинетической и доступной потенциальной энергии $g\lambda_0$. Тогда $\gamma \sim 2$ м²/с. Более точно оценить параметр γ можно в дальнейшем по корреляционной функции флуктуаций энтропии или потенциальной плотности. Для принципиальной оценки поведения спектра и СФ задачи (1), (2) точное значение γ не столь существенно.

Поскольку СЗ задачи (3), (4) вычисляются из условия на границе $x = x_0$, удобно выбрать l_0 таким образом, чтобы $G = x_0$. Тогда $G = x_0 = a/l_0 = 2ga^2l_0/\gamma^2$, или $G^2 = 2ga^3/\gamma^2 \sim 10^{21}$. При столь больших значениях G вместо использования формального решения (6) можно воспользоваться предлагаемой ниже асимптотикой гипергеометрических функций.

Переобозначим $x = G\xi$, так что на границе $\xi_0 = 1$. Подстановка $y = x\sqrt{E} = G\xi\sqrt{E}$ и замена $R = u/x$ сводит уравнение (5) в случае $j = 0$ к форме

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(y - \frac{G}{\sqrt{E}} \right) u, \quad (8)$$

исследованной Бейтманом в работе [11]. Решения (8), стремящиеся к нулю на бесконечности, имеют вид

$$u(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \left(y \operatorname{tg} \theta - \frac{G}{\sqrt{E}} \theta \right) d\theta.$$

Переходя обратно к радиальной функции R , получаем

$$R|_{j=0} = \frac{2}{\pi G \xi} \int_0^{\pi/2} \cos \left(G \left[\xi \sqrt{E} \operatorname{tg} \theta - \frac{\theta}{\sqrt{E}} \right] \right) d\theta. \quad (9)$$

Граничное условие:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0. \quad (10)$$

При $G \gg 1$ основной вклад в интеграл дают $\theta \ll 1$. Раскладывая $\operatorname{tg} \theta$ в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами, получаем аппроксимацию точного решения

$$R^A = \frac{2}{\pi G \xi} \int_0^{\pi/2} \cos \left(G \left[\left(\xi \sqrt{E} - \frac{1}{\sqrt{E}} \right) \theta + \xi \sqrt{E} \frac{\theta^3}{3} \right] \right) d\theta. \quad (11)$$

Если теперь сделать замену $t = (G \xi \sqrt{E})^{1/3} \theta$, то

$$R^A = \frac{2}{\pi G^{4/3} \xi^{4/3} E^{1/6}} \int_0^{\pi/2(G \xi \sqrt{E})^{1/3}} \cos \left(\frac{t^3}{3} + tz \right) dt, \quad (12)$$

где

$$z = \frac{G^{2/3} (\xi E - 1)}{\xi^{1/3} E^{2/3}}. \quad (13)$$

Для $G \gg 1$ и ξ и E близких к 1, т.е. для «тонкой» атмосферы и первых СФ, верхний предел интегрирования может быть заменен на ∞ , что приведет интеграл к функции Эйри $\operatorname{Ai}(z)$. Эта функция хорошо исследована, может быть выражена через модифицированную функцию Макдональда, и она затабулирована в численных пакетах, таких как Mathematica (рисунок, а). Таким образом,

$$R_{j=0} = \frac{2 \operatorname{Ai}(z)}{\pi G^{4/3} \xi^{4/3} E^{1/6}}, \quad (14)$$

где $z = z(\xi)$ определяется соотношением (13).

Дифференцируя (14) по ξ , для нахождения СЗ получаем условие (при $\xi = 1$)

$$\frac{\operatorname{Ai}_z(z_0)}{\operatorname{Ai}(z_0)} = \frac{4(E/G)^{2/3}}{2E + 1}, \quad (15)$$

где Ai_z — производная функции Эйри, а $z_0 = (G/E)^{2/3}(E-1) < 0$ — значение аргумента z при $\xi = 1$, т.е. на границе.

На рисунке, б показано поведение отношения $\operatorname{Ai}_z / \operatorname{Ai}(z)$. При $G \sim 10^{10}$ решения уравнения (15) близки к нулям производной функции Эйри, а их последовательность z_{0n} позволяет аппроксимировать спектр СЗ. Другими словами, E_n приближенно определяются из условия $(G/E_n)^{2/3}(E_n - 1) = z_{0n}$ или

$$(E_n - 1) \approx z_{0n} (G)^{-2/3}, \quad (16)$$

т.е. для первых СФ $E_n \approx 1$. Для больших значений ($-z_{0n}$) для вычисления СЗ можно воспользоваться асимптотикой

$$\operatorname{Ai}(-z) = \frac{\sin \left(\frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad (17)$$

при $z \rightarrow \infty$ [12]. В этом случае СЗ можно найти из решения уравнения

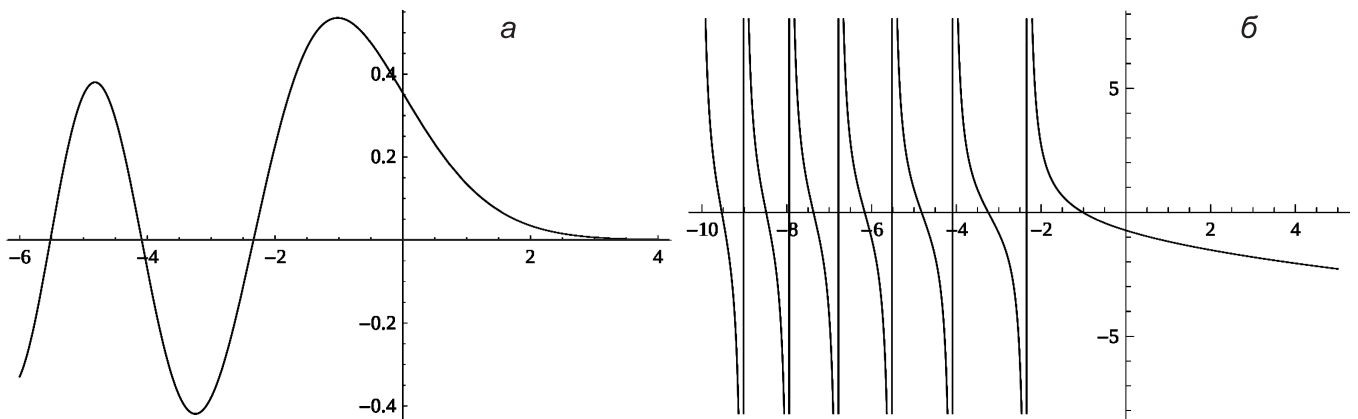
$$\operatorname{ctg} \left(\frac{2G}{3E} (1 - E)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4G} \frac{E(6E - 5)}{(1 - E)^{3/2} (1 + 2E)}. \quad (18)$$

Если, например, $-z_{0n} \sim 10^3$ и $(1 - E_n) \sim 10^{-3}$, то $\operatorname{ctg} \left(\frac{2G}{3E} (1 - E)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \approx 10^{-5}$ и СЗ образуют «эквили-стантный» спектр:

$$(1 - E_n)^{3/2} \approx \frac{3}{2G} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right). \quad (19)$$

4. Переход к размерным величинам. Масштаб корреляции L_0

Физический смысл имеют размерные величины СЗ и характерный масштаб первых СФ, которые раскрывают физический смысл задачи (1), (2), а также параметра γ . Нетрудно видеть (см. рисунок), что $z_{00} \approx -1$. Поэтому из (13) $E_0 - 1 \approx -G^{-2/3}$, или $(1 - E_0) \approx 10^{-6}$. Поскольку $\mathcal{E}_0 = -E_0 \gamma^2 / 2l_0^2 = -gaE_0$, специальный интерес представляет величина $\delta \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 + ga = ga(1 - E_0)$, которая показывает превышение энергии турбулентных флуктуаций над потенциальной энергией воздушной



Функция Эйри (а) и поведение $\operatorname{Ai}_z / \operatorname{Ai}$ (б)

частицы на поверхности. Следующее СЗ E_1 определяется из условия $z_{01} \approx -3.25$, или $(1 - E_1) \approx 3.25 G^{-2/3}$, поэтому $\mathcal{E}_1 + ga = \delta\mathcal{E}_1 \approx 3.35 \delta\mathcal{E}_0$, а $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 = 2.25 \delta\mathcal{E}_0$. Последующие значения можно уточнить с помощью какого-нибудь пакета численного анализа.

Энергия $\delta\mathcal{E}_0$ примерно соответствует средней удвоенной кинетической энергии макротурбулентного движения атмосферы. Эту энергию можно выразить и в форме энергии тепловых флуктуаций или флуктуаций скорости звука [4]. Средняя внутренняя энергия атмосферы (на единицу массы) $C_p T$ или сумма внутренней и потенциальной энергии $C_p T$ значительно превосходит $\delta\mathcal{E}_0$, но значительно меньше значения ga , поэтому атмосфера всегда остается тонкой пленкой в том смысле, что все энергетически значимые СФ интегрируемы на масштабах $\xi - 1 \ll 1$.

При $\xi \approx 1$ интегральный масштаб СФ R_0 определяется формой функции Эйри (см. (14) и рисунок, а). Поэтому размерный масштаб L_0 , или характерный масштаб корреляции флуктуаций потенциальной плотности, можно определить соотношением $z(\xi) = 0$ или $\xi E_0 = 1$ (см. (13)). Тогда $x = r/l_0 = G\xi = (a + L_0)/l_0 = G/E_0$, или

$$L_0 = l_0 \left(\frac{G}{E_0} - x_0 \right) = l_0 G \left(\frac{1}{E_0} - 1 \right) \approx l_0 G^{1/3} = \frac{a}{G^{2/3}},$$

или $L_0^3 = \gamma^2/2g$. (20)

Обозначая $1/L_0 = k_0$, получаем еще одно соотношение: $gL_0 = (\gamma k_0)^2/2$, связывающее потенциальную и внутреннюю энергию турбулентных флуктуаций.

Заключение

Масштаб $L_0 \sim 1$ м значительно меньше приведенной высоты атмосферы H_0 . Это обстоятельство можно рассматривать как ключевой момент в понимании физического смысла СФ задачи (1), (2). Первые ортогональные функции ψ_i , и в частности ψ_0 , описывают не распределение плотности вероятности лагранжевых частиц, а неопределенность измерения этой плотности вероятности, т. е. характерные временные и пространственные масштабы, на которых динамическое описание движения лагранжевых частиц переходит в вероятностное и которые выражают энергетику турбулентного перемешивания [3]. Это понимание согласуется с представлением, данным Обуховым эмпирическим ортогональным

функциям [2], которые описывают лишь флуктуации, но не среднее поле.

На масштабах $\Delta z < L_0$ пространственные изменения плотности вероятности малы, так что турбулентное движение можно рассматривать как локально-изотропное. На масштабах $\Delta z > L_0$ турбулентность уже нельзя рассматривать как локально-однородную и изотропную. Вариации потенциальной плотности или энтропии в поле силы тяжести могут быть эффективно разложены по системе ортогональных функций без необходимости использования универсальных эмпирических функций теории подобия.

Плотность функции распределения одинаковых лагранжевых воздушных частиц является базовой вероятностной характеристикой случайного поля синоптических флуктуаций. Она может медленно изменяться в пространстве и во времени. Для оценки этого изменения необходимо знать характерные временной и пространственный масштабы, на которых осреднение гидродинамических флуктуаций на основе гипотезы о локальной стационарности и изотропности позволяет судить о распределении плотности вероятности и ее изменениях.

Список литературы

1. Обухов А.М. // Успехи матем. наук. 1947. **2**, № 2(18). С. 196.
2. Обухов А.М. // Изв. АН СССР. Сер. Геофиз. 1960. № 3. С. 432.
3. Юшков В.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 4. С. 65.
4. Юшков В.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 4. С. 65.
5. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
6. Монин А.С., Обухов А.М. // Изв. АН СССР. Сер. Геофиз. 1958. № 11. С. 1360.
7. Zakharov V.E., L'vov V.S., Falkovich G. Kolmogorov spectra of turbulence. I. Wave turbulence. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, 1992.
8. L'vov V.S., L'vov Yu., Newell A.C., Zakharov V. // Phys. Rev. E. 1997. **56**, N 1. P. 390.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1988.
11. Bateman H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1931. **33**. P. 817.
12. Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. М., 1987.

Orthogonal functions of turbulent fluctuations in the Earth's atmosphere

V. P. Yushkov, E. V. Yushkov

Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: yushkov@phys.msu.ru.

A system of orthogonal functions is suggested, which allows a statistically optimal description of turbulent fluctuations of the spatial density of the distribution function of identical Lagrangian air particles.

Keywords: atmosphere, turbulence, orthogonal functions.

PACS: 47.27.Ak.

Received 29 October 2013.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2014).

Сведения об авторах

1. Юшков Владислав Пролетарьевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-15-41, e-mail: yushkov@phys.msu.ru.
2. Юшков Егор Владиславович — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: yushkov.msu@mail.ru.