Алгебраический и геометрический подходы к неэрмитовой $\mathcal{PT}$-симметричной релятивистской квантовой механике с максимальной массой

В. Н. Родионов[1,a], Г. А. Кравцова[2,b]

[1] *Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, кафедра вычислительных систем и телекоммуникаций. Россия, 117997, Москва, Стремянный пер., д. 36.*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
E-mail: [a] vnrodionov@mtu-net.ru, [b] gakr@chtc.ru

Статья поступила 26.11.2013, подписана в печать 24.02.2014.

Рассматривается неэрмитова фермионная модель, содержащая γ_5-матрицу в массовом члене $m \to m_1 + \gamma_5 m_2$. Предложено новое уточненное условие ненарушенности $\mathcal{PT}$-симметрии теории, содержащее указание о разделении исходной области ненарушенности на подобласти, отвечающие описанию обычных и экзотических частиц. Установлена связь рассматриваемой теории с КТП с максимальной массой M, развиваемой на основе геометрического подхода. В явном виде вычислен оператор $\mathcal{C}$, необходимый для построения нового скалярного произведения в данной теории с неэрмитовым гамильтонианом.

Ключевые слова: квантовая теория, максимальная масса, неэрмитов гамильтониан.
УДК: 530.145: 539.12.01. PACS: 02.30.Jr, 03.65.-w, 03.65.Ge, 12.10.-g, 12.20.-m.

Введение

В 1965 г. М.А.Марков [1, 2] выдвинул гипотезу, согласно которой спектр масс частиц должен быть ограничен «планковской массой» $m_{\text{Planck}} = 10^{19}$ ГэВ:

$$m \leqslant m_{\text{Planck}}. \tag{1}$$

Частицы с предельной массой $m = m_{\text{Planck}}$ были названы автором «максимонами». Однако первоначально условие (1) было чисто феноменологическим, и до недавнего времени казалось, что Стандартная модель (СМ) может быть адекватно применима вплоть до планковских масс. Но в нынешней ситуации накапливается все больше данных в пользу того, что ряд физических принципов должен быть пересмотрен. В частности, это подтверждается многочисленными указаниями на существование темной материи и адсорбацией ею значительной части плотности энергии во Вселенной.

В конце 70-х годов был предложен новый радикальный подход [3, 4], в котором марковская идея о существовании максимальной массы частиц принималась как новый фундаментальный физический принцип квантовой теории поля (КТП). Как известно, масса частиц m в СМ может принимать значения в интервале $0 \leqslant m < \infty$. В новой теории постулируется условие конечности спектра масс в виде

$$m \leqslant M, \tag{2}$$

где параметр максимальной массы M, называемый фундаментальной массой, является новой физической константой. Величина M рассматривается как радиус кривизны 5-мерного гиперболоида, поверхность которого представляет собой реализацию искривленного импульсного 4-пространства, или пространства анти-де Ситтера ($\hbar = c = 1$)

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_5^2 = M^2. \tag{3}$$

Объекты с массой больше M не могут рассматриваться как элементарные частицы, так как им не соответствуют никакие локальные поля.

Для свободной частицы $p_0^2 - \overrightarrow{p}^2 = m^2$, условие (2) автоматически выполняется на поверхности (3). В приближении

$$|p_0|,\ |\overrightarrow{p}| \ll M, \quad p_5 \cong M \tag{4}$$

геометрия анти-де Ситтера переходит в геометрию Минковского в 4-мерном псевдоевклидовом p-пространстве («плоский предел»).

При рассмотрении фермионного сектора было выяснено [5, 6], что если в обычном формализме свободный оператор Дирака имеет вид

$$D(p) = p_\nu \gamma^\nu - m, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{5}$$

и может рассматриваться как результат факторизации оператора Клейна–Гордона

$$p_\nu^2 - m^2 = (p_\nu \gamma^\nu + m)(p_\nu \gamma^\nu - m), \tag{6}$$

то в КТП с максимальной массой вместо (5), (6) возникает следующее соотношение:

$$\begin{aligned} 2M(p_5 - M\cos\mu) &= \\ = \left[\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma p} + \varepsilon_1 \gamma^5 (p_5 - M) + \varepsilon_2 2M \sin\mu/2\right] &\times \\ \times \left[-\gamma^0 p_0 + \boldsymbol{\gamma p} - \varepsilon_1 \gamma^5 (p_5 - M) + \varepsilon_2 2M \sin\mu/2\right], & \end{aligned} \tag{7}$$

где $\cos\mu = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}$ и $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Откуда, в частности, следует, что в модифицированной КТП роль оператора Клейна–Гордона играет $2M(p_5 - M\cos\mu)$, а новое выражение для оператора Дирака имеет вид

$$D(p, M) = p_\nu \gamma^\nu + (p_5 - M)\gamma^5 - 2M\sin(\mu/2). \tag{8}$$

Легко проверить, что в «плоском пределе» (см. (4)) выражения (5) и (8) совпадают, т. е. (8) переходит в обычный оператор Дирака.

Весьма важно, что новый оператор Клейна–Гордона $2M(p_5 - M\cos\mu)$ может быть разложен на матричные множители и иным, совершенно независимым от (7) способом:

$$2M(p_5 - M\cos\mu) = \\ = \left[\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma p} + \varepsilon_1\gamma^5(p_5 + M) + \varepsilon_2 2M\cos\mu/2\right] \times \\ \times \left[\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma p} + \varepsilon_1\gamma^5(p_5 + M) - \varepsilon_2 2M\cos\mu/2\right], \quad (9)$$

где по-прежнему $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$.

Таким образом, в развиваемом подходе мы встречаемся с неким не имеющим аналога в обычной теории «экзотическим» фермионным полем, ассоциированным с оператором

$$D_{\text{exotic}}(p, M) = p_\nu\gamma^\nu + (p_5 + M)\gamma^5 - 2M\cos(\mu/2). \quad (10)$$

Главное отличие оператора $D_{\text{exotic}}(p, M)$ от оператора (8) состоит в том, что он не имеет плоского предела (см. (4)), т. е. для него отсутствует переход к эрмитовому выражению при $M \to \infty$.

Теперь рассмотрим (8),(10) в конфигурационном пространстве (x_μ, x_5). Используя 5-мерное преобразование Фурье (см. [5]) и вводя обозначение $p_\mu = i\partial_\mu$, а также

$$m_1 = 2M\sin\mu/2, \quad m_2 = 2M\sin^2\mu/2, \\ m_3 = 2M\cos\mu/2, \quad m_4 = 2M\cos^2\mu/2, \quad (11)$$

имеем

$$\left(p_0 - \widehat{\alpha}\boldsymbol{p} - \widehat{\beta}m_1 - \widehat{\beta}\gamma^5 m_2\right)\Psi(x, t, x_5) = 0, \quad (12)$$

$$\left(p_0 - \widehat{\alpha}\boldsymbol{p} - \widehat{\beta}m_3 - \widehat{\beta}\gamma^5 m_4\right)\Psi^{ex}(x, t, x_5) = 0. \quad (13)$$

В этих модифицированных уравнениях Дирака матрицы $\widehat{\beta} = \gamma_0$, $\widehat{\alpha}^i = \widehat{\beta}\gamma^i$. Важно заметить, что на массовой поверхности $p_5 = M\cos\mu$ не существует операторов, которые действуют на координату x_5, и этот параметр без потери общности может быть выбран равным нулю [5, 6]. Таким образом, гамильтонианы, отвечающие уравнениям (12), (13), можно представить в виде

$$\widehat{H} = \overrightarrow{\widehat{\alpha}}\,\overrightarrow{p} + \widehat{\beta}(m_1 + m_2\gamma_5), \quad (14)$$

$$\widehat{H}_{\text{ex}} = \overrightarrow{\widehat{\alpha}}\,\overrightarrow{p} + \widehat{\beta}(m_3 + m_4\gamma_5). \quad (15)$$

Очевидно, выражения (14), (15) оказываются неэрмитовыми из-за появления в них γ_5-массовых слагаемых ($H \neq H^\dagger$, $H_{\text{ex}} \neq {H_{\text{ex}}}^\dagger$). Таким образом, можно сделать вывод, что ограничение спектра масс (2), которое было положено в основу геометрического подхода при разработке модифицированной КТП с максимальной массой [3, 4], приводит к появлению неэрмитовых вкладов в гамильтонианы в фермионном секторе.

Новый геометрический подход к изучению квантованных полей в рамках модифицированной СМ, базирующейся на включении в качестве дополнительного постулата соотношения (2), получил дальнейшее развитие в работах [7–15]. Таким образом, новая теория, построенная на основе чисто геометрического принципа, претендует на роль адекватного обобщения СМ в области высоких энергий $E \geqslant M$ [5, 6].

В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [15], и показываем связь теории с максимальной массой с недавно появившейся и бурно развивающейся неэрмитовой квантовой механикой. В рамках последней расматриваются теории с неэрмитовыми $\mathcal{PT}$-инвариантными гамильтониами [16–24]. Действительность их спектра является следствием именно $\mathcal{PT}$-инвариантности теории, т. е. комбинированной пространственной и временной четности гамильтониана: $[H, PT]\psi = 0$. Спектр перестает быть действительным, когда $\mathcal{PT}$-симметрия оказывается нарушенной. Собственные вектора $\mathcal{PT}$-симметричного неэрмитового гамильтониана, отвечающие действительным собственным значениям, обладают отрицательной нормой в обычном скалярном произведении. Эта проблема решается использованием новой симметрии, определяемой оператором $\mathcal{C}$, аналогичным оператору зарядового сопряжения. Построение оператора $\mathcal{C}$ позволяет ввести новую структуру скалярного произведения, ассоциированную с $\mathcal{CPT}$-сопряжением, для которого нормы квантовых состояний положительно определены, и имеют место обычные соотношения полноты [24].

Кроме того, известен и альтернативный формализм рассмотрения систем, определяемых неэрмитовыми гамильтонианами [25–33], согласно которому действительность спектра неэрмитовой системы имеет место благодаря так называемым псевдоэрмитовым свойствам гамильтониана. Гамильтониан называется η_0-псевдоэрмитовым, если он удовлетворяет условию

$$\eta_0 H \eta_0^{-1} = H^\dagger, \quad (16)$$

где η_0 — линейный эрмитов оператор. В настоящей работе на основе вычисления оператора η_0 мы проводим и явное непертурбативное вычисление оператора $\mathcal{C}$, используемого для построения нового скалярного произведения.

Далее в настоящей работе развит алгебраический подход к изучению неэрмитовой релятивистской квантовой механики с $\mathcal{PT}$-симметричным гамильтонианом (14), содержащим γ_5-массовое слагаемое. Найдены важные соотношения между массовыми параметрами. Предложена реализация физического подхода в алгебраической теории. В рамках многочастичной фермионной модели указано на конечность спектра масс, при этом показана связь алгебраического и геометрического подходов в теории с максимальной массой. Построены операторы η_0 и $\mathcal{C}$. В заключении приведены выводы, следующие из результатов работы.

Неэрмитова релятивистская квантовая механика с γ_5-массовым слагаемым

Рассмотрим выражения (14), (15) с точки зрения алгебраического подхода, развиваемого в работах по изучению неэрмитовой квантовой теории [16–33]. Гамильтонианы (14), (15) являются неэрмитовыми, но $\mathcal{PT}$-симметричными. Как уже отмечалось, H неэрмитов из-за слагаемого с m_2, меняющего знак при эрмитовом сопряжении гамильтониана $\left(H \neq H^\dagger\right)$. Нетрудно убедиться, что H также неинвариантен при $\mathcal{P}$- или $\mathcal{T}$-преобразованиях по отдельности, потому что слагаемое с m_2 меняет знак при воздействии любого их этих преобразований. Однако H инвариантен относительно совместного $\mathcal{PT}$-преобразования: $H^{\mathcal{PT}} = \mathcal{PT}H\mathcal{PT} = H$. Подобная модель была рассмотрена в работе [24], где изучалась $\mathcal{PT}$-симметричная массивная модель Тирринга в $(1+1)$ измерении с гамильтоновой плотностью

$$\mathcal{H}(x,t)=\overline{\psi}(x,t)\left(-i\overrightarrow{\partial}\overrightarrow{\gamma}+m_1+\gamma_5 m_2\right)\psi(x,t). \tag{17}$$

Уравнение движения, ассоциированное с (17), можно записать в $(3+1)$ измерении:

$$\left(i\partial_\mu\gamma^\mu-m_1-\gamma_5 m_2\right)\psi(x,t)=0, \tag{18}$$

что по сути совпадает с уравнением (12). В этой связи возникает предположение о связи данной модели и теории с ограниченной массой и вызывает интерес изучение ограничений на параметры модели.

Уравнение (18) может быть преобразовано в уравнение второго порядка, и в результате имеем уравнение Клейна–Гордона:

$$\left(\partial^2+m^2\right)\psi(x,t)=0, \tag{19}$$

где

$$m^2=m_1^2-m_2^2. \tag{20}$$

Легко видеть, что физическая масса m, появляющаяся в данном уравнении, действительна, когда выполняется неравенство

$$m_1\geqslant m_2. \tag{21}$$

Это неравенство является базовым требованием, определяющим область ненарушенной $\mathcal{PT}$-симметрии рассматриваемого гамильтониана. Однако m_1 и m_2 не являются физическими массами, а используются лишь как удобные вспомогательные параметры. Поэтому мы запишем условие на физическую массу m, которое, как увидим позже, является более существенным.

Действительно, используя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел, имеем

$$\frac{m^2+{m_2}^2}{2}\geqslant\sqrt{m^2{m_2}^2}, \tag{22}$$

откуда следует неравенство

$$m\leqslant\frac{{m_1}^2}{2m_2}\equiv m_{\max}, \tag{23}$$

где введен новый массовый параметр $m_{\max}$. Напомним, что мы исследуем вопрос о существовании в данной теории ограничений на массовые параметры. Предположим, что существует ограничение на параметр m. Тогда в силу (22) это ограничение должно выглядеть как (23). При этом, как будет показано в дальнейшем, есть основания полагать, что существует связь между $m_{\max}$ и M из геометрической теории с ограниченной массой.

Очевидно, что при заданных m_1 и m_2, фиксированных в рассматриваемом гамильтониане, неравенство (23) всегда имеет место. Таким образом, соотношение (23) является следствием введения в гамильтонианы (14) и (15) γ_5-массового слагаемого, приводящего к неэрмитовости гамильтониана.

В пределе $m_2\to 0$ из (23) имеем

$$m_{\max}\to\infty. \tag{24}$$

Нетрудно видеть,что это соответствует переходу к стандартной дираковской теории, в которой, как известно, отсутствует какое бы ни было ограничение на массы фермионов. Следовательно, предел (24) не только корректен, но и означает, что рассматриваемая модель удовлетворяет принципу соответствия, т. е. в указанном пределе она переходит в дираковскую теорию.

Заметим, что здесь ограничение (23) является формальным, так как значение $m_{\max}$ определяется параметрами теории m_1 и m_2. Ниже мы увидим, каким образом в теории появляется физическое ограничение на массу. Однако сначала рассмотрим, какие следствия можно извлечь из введения параметра $m_{\max}$ и нахождения соотношения (23).

Условия (20), (21) и (23) выполняются автоматически, если мы введем следующую параметризацию:

$$m_1=m\,\mathrm{ch}\,\alpha,\quad m_2=m\,\mathrm{sh}\,\alpha. \tag{25}$$

Из (23) и (25) мы можем определить

$$m=2m_{\max}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}^2\,\alpha},\quad m_1=2m_{\max}\,\mathrm{th}\,\alpha,\quad m_2=2m_{\max}\,\mathrm{th}^2\,\alpha. \tag{26}$$

Здесь области изменения физической массы m, а также m_1 и m_2 таковы:

$$0\leqslant m\leqslant m_{\max},\quad m\leqslant m_1\leqslant 2m_{\max},\quad 0\leqslant m_2\leqslant 2m_{\max}. \tag{27}$$

Первое соотношение из (26) может быть представлено также в виде

$$\frac{\nu}{2}=\mathrm{th}\,\alpha\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,\alpha}, \tag{28}$$

где $\nu=m/m_{\max}$ — приведенная масса. Разрешая (28) относительно $\mathrm{th}\,\alpha$, легко получить

$$\mathrm{th}\,\alpha=\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-\nu^2}}{2}}. \tag{29}$$

Вводя аналогично нормированные значения $\nu_1=m_1/m_{\max}$ и $\nu_2=m_2/m_{\max}$, имеем из (26) и (29)

$$\nu_1^{\mp}=\sqrt{2}\sqrt{1\mp\sqrt{1-\nu^2}}, \tag{30}$$

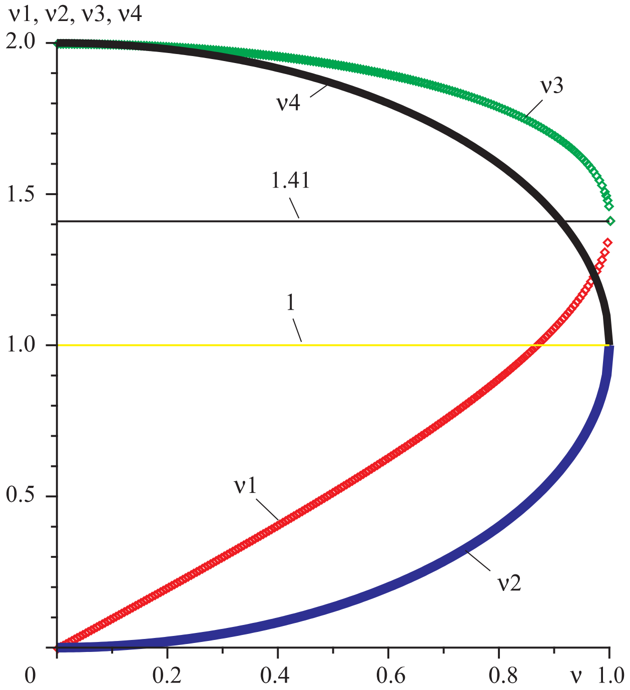
$$\nu_2^{\mp}=1\mp\sqrt{1-\nu^2}. \tag{31}$$

Очевидно,что два знака корня в (29) могут быть интерпретированы как две ветви значений $\nu_1^{\mp}$ и $\nu_2^{\mp}$, являющихся многозначными функциями нормированной физической массы ν.

Рисунок наглядно демонстрирует зависимость параметров $\nu_1^{\mp}$, $\nu_2^{\mp}$ от величины ν. Область существования $\mathcal{PT}$-симметрии $0\leqslant\nu\leqslant 1$. Для этих значений параметров ν_1 и ν_2 модифицированное уравнение Дирака с максимальной массой описывает распространение частиц, имеющих действительные массы. Новые уравнения Дирака описывают обычные частицы с массами ν_1^-, ν_2^- (нижние ветви графиков) и экзотические частицы с массами ν_1^+ и ν_2^+ (верхние ветви). Специальный случай эрмитовости находится на линии $m=m_{\max}$, т. е. $\nu=1$ (случай максимона), которая является границей области $\mathcal{PT}$-симметрии. В этой точке графика имеем $\nu_1^-=\nu_1^+=\sqrt{2}$ и $\nu_2^-=\nu_2^+=1$.

Используя (30), (31), можно восстановить выражения для массовых параметров m_1, m_2, которые, однако, теперь становятся двузначными:

$$m_1^{\mp}=\sqrt{2}m_{\max}\sqrt{1\mp\sqrt{1-\frac{m^2}{m_{\max}^2}}}, \tag{32}$$



Значения параметров $\nu_1^{\mp}$, $\nu_2^{\mp}$ как функций ν

$$m_2^{\mp} = m_{\max}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{m^2}{m_{\max}^2}}\right). \qquad (33)$$

Легко видеть, что область ненарушенности $\mathcal{PT}$-симметрии модели теперь определяется неравенством $m \leqslant m_{\max}$, так как лишь в этом случае параметры $m_1^{\mp}$, $m_2^{\mp}$ будут действительны. Очевидно, что это более информативное условие, чем $m_1^2 \geqslant m_2^2$, так как благодаря ему явно выделяются области обычных и экзотических частиц (см. рис. 1 и пояснения к нему).

Нетрудно видеть также, что в пределе $m_{\max} \to \infty$ формула (32) дает $m_1 = m$, а из (33) следует $m_2 \to 0$, что согласуется с общими положениями принципа соответствия. Кроме того, используя обозначения $m/m_{\max} = \sin\mu$, видим, что (32), (33) в случае верхних знаков переходят в выражения $m_1 = 2m_{\max}\sin\mu/2$ и $m_2 = 2m_{\max}\sin^2\mu/2$, а в случае нижних знаков — в $m_3 = 2m_{\max}\cos\mu/2$ и $m_4 = 2m_{\max}\cos^2\mu/2$, что полностью согласуется с (11). Как уже отмечалось, при идентификации параметра $m_{\max}$ и параметра максимальной массы M, который использовался в геометрическом походе (см., например, [5, 6])

$$\frac{m_1^2}{2m_2} = \frac{m_3^2}{2m_4} = M \longleftrightarrow \frac{m_1^{\mp 2}}{2m_2^{\mp}} = m_{\max},$$

можно получить полное соответствие используемых параметров в гамильтонианах и уравнениях движения рассматриваемых моделей. Кроме того, при $M \to \infty$ можно видеть, что геометрия анти-де Ситтера не отличается от геометрии Минковского в псевдоевклидовом p-пространстве. Этот вывод также согласуется с трактовкой принципа соответствия при $m_{\max} \to \infty$.

Выражения (32), (33) позволяют в данной алгебраической модели рассматривать «физический» подход, т. е. ответить на вопрос: как с помощью гамильтониана (14) описать конкретную частицу. Иначе говоря, как по известной физической массе данной частицы m найти параметры m_1, m_2 для ее описания. Очевидно, что с помощью одного лишь условия (20) невозможно однозначно ответить на этот вопрос. Однако если ввести $m_{\max}$, то ответ следует из формул (32), (33). Фактически совершается переход от двухпараметрической задачи, задаваемой гамильтонианом (14) с параметрами m_1, m_2, к двухпараметрической задаче с параметрами m, $m_{\max}$. Это еще раз доказывает, что выражение (21) не может рассматриваться как единственное ограничение и необходимо введение параметра $m_{\max}$, а также учет (23).

Рассмотрим в данном контексте алгебраическую модель, описывающую весь спектр фермионов. В этом случае возникает вопрос о единственности $m_{\max}$ для всех частиц. Из физических соображений мы можем предположить, что модель, в которой $m_{\max}$ единственна для всех частиц, более предпочтительна. Тогда логично сделать вывод, что эта единственная $m_{\max}$ является массой максимона и должна соответствовать M в геометрическом подходе. Это оказывается возможным, потому что, как уже указывалось, гамильтонианы и уравнения эволюции в этих двух моделях совпадают вплоть до обозначений. Иными словами, в теории, описывающей спектр масс элементарных частиц, необходимо принять из физических соображений предположение равенства $m_{\max}$ и M.

Таким образом, нами еще раз устанавливается связь данного алгебраического подхода с квантовой теорией с максимальной массой, развиваемой В. Г. Кадышевским и др. на основе геометрического подхода [3–14].

Так как рассматриваемый гамильтониан неэрмитов (псевдоэрмитов, см. (16)), то необходимо ввести новое скалярное произведение, определяемое оператором $\mathcal{C}$, связанным с $\mathcal{CPT}$-симметрией гамильтониана [24]. Для этого перепишем массовый член гамильтониана в виде

$$\widehat{\beta}(m_1 + m_2\gamma_5) = \widehat{\beta}m(\operatorname{ch}\alpha + \gamma_5\operatorname{sh}\alpha) = \widehat{\beta}m\exp(\gamma_5\alpha). \qquad (34)$$

Теперь можно записать исходный гамильтониан следующим образом:

$$H = \widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \widehat{\beta}m\exp(\gamma_5\alpha), \qquad (35)$$

а эрмитово-сопряженный гамильтониан представить в виде

$$H^{\dagger} = \widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \widehat{\beta}m\exp(-\gamma_5\alpha). \qquad (36)$$

Используя правила коммутации матриц γ_5, $\widehat{\vec{\alpha}}$ и $\widehat{\beta}$, нетрудно показать, что

$$e^{\alpha\gamma_5/2}\widehat{H} = \left(\widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \widehat{\beta}m\right)e^{\alpha\gamma_5/2} = \widehat{H}_0 e^{\alpha\gamma_5/2} = \widehat{H}_0\eta, \qquad (37)$$

где введено обозначение

$$\widehat{H}_0 = \widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \widehat{\beta}m,$$

соответствующее обычному дираковскому гамильтониану, и

$$\eta = e^{\alpha\gamma_5/2}. \qquad (38)$$

Для гамильтониана $\widehat{H^{\dagger}}$ мы можем также записать

$$e^{-\alpha\gamma_5/2}\widehat{H^{\dagger}} = \left(\widehat{\vec{\alpha}}\vec{p} + \widehat{\beta}m\right)e^{-\alpha\gamma_5/2} = \widehat{H}_0 e^{-\alpha\gamma_5/2} = \widehat{H}_0\eta^{-1}. \qquad (39)$$

Из (37), (39) легко видеть, что эрмитов гамильтониан $\widehat{H}_0$ и гамильтонианы $\widehat{H}$, $\widehat{H}^{\dagger}$ связаны неунитарным преобразованием η:

$$\widehat{H}_0 = \eta\widehat{H}\eta^{-1}, \quad \widehat{H}_0 = \eta^{-1}\widehat{H^{\dagger}}\eta. \qquad (40)$$

Интересно сравнить этот результат с [9], где исследовался геометрический подход к изучению уравнений движения для скалярного и спинорного полей в искривленном импульсном пространстве де Ситтера, характеризуемом отрицательной кривизной:

$$\vec{p}^{\,2} - p_5^2 = -M^2. \qquad (41)$$

В частности, в работе [9] были получены преобразования, которые связывают упомянутые уравнения в пространстве де Ситтера и соответствующие уравнения в дираковкой теории. Однако нетрудно установить, что, в отличие от (38), эти преобразования являются унитарными. Этот результат выглядит совершенно естественно. Действительно, гамильтониан, описывающий фермионный сектор теории с ограниченной массой в пространстве де Ситтера, является эрмитовым и имеет вид

$$\widehat{H} = \vec{\widehat{\alpha}}\vec{p} + \widehat{\beta}(m_1 + im_2\gamma_5), \qquad (42)$$

где $m_1 = 2M\,\mathrm{sh}(\mu/2)$, $m_2 = 2M\,\mathrm{sh}^2(\mu/2)$, и по-прежнему выполняется соотношение $m_1^2 = 2Mm_2$. Физическая масса m определяется в этом случае как $m^2 = m_1^2 + m_2^2$. Очевидно, в алгебраической теории в этом случае не будет иметь место неравенство типа (23). Что касается геометрического подхода, развиваемого в пространстве де Ситтера, то нетрудно видеть, что гамильтониан (42) и стандартный дираковский гамильтониан связаны унитарным преобразованием $\widetilde{\eta} = e^{\frac{i\alpha\gamma_5}{2}}$. Мы же рассматриваем алгебраическую теорию, инициируемую геометрической теорией в пространстве анти-де Ситтера и определяемую неэрмитовым гамильтонианом. В изучаемом случае имеет место ограничение масс как в геометрическом подходе, так и в предлагаемой алгебраической модели.

Из (40) следует:

$$\eta_0\widehat{H}\eta_0{}^{-1} = \widehat{H}^{\dagger}, \qquad (43)$$

где оператор $\eta_0 = e^{\alpha\gamma_5}$ определяет псевдоэрмитовы свойства гамильтониана. Следуя [24, 25], можно определить оператор $\mathcal{C} = \eta_0{}^{-1}\mathcal{P}$. В рассматриваемом случае его явный вид дается простой формулой

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & I\,\frac{m_1^{\mp} - m_2^{\mp}}{m} \\ I\,\frac{m_1^{\mp} + m_2^{\mp}}{m} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (44)$$

где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что скалярное произведение, построенное с помощью $\mathcal{C}$-оператора (44) стандартным способом [16, 17], положительно определено. Заметим, что оператор $\mathcal{C}$ в записи (44) имеет более простой вид и более удобен для использования, чем соответствующее выражение в работе [24], так как здесь он получен в явном виде, в то время как в [24] данный оператор был построен методом итераций и записан в интегральном представлении.

Заключение

Подводя итог вышеизложенному, выделим наиболее существенные аспекты рассматриваемой теории. В одночастичной алгебраической модели с неэрмитовым гамильтонианом (14) можно записать ограничивающее условие на параметр m, называемый физической массой, в виде (23). Фактически это новое (уточненное) условие ненарушенности $\mathcal{PT}$-симметрии теории, которое оказывается более информативным, чем (20), так как оно содержит указание о разделении исходной области ненарушенности $\mathcal{PT}$-симметрии на подобласти, отвечающие описанию обычных и экзотических частиц. Однако в такой чисто математической теории отсутствует указание на конкретное значение $m_{\max}$. При рассмотрении соответствующей модели, описывающей различные фермионы, делается выбор в пользу теории, в которой имеется единственный для всех частиц ограничивающий параметр $m_{\max}$. Фактически из физических соображений выдвигается постулат о единственности $m_{\max}$ и равенстве его значения M в геометрической теории с максимальной массой. Так как значение M должно определяться из эксперимента (это масса максимона), то теперь и (23) можно рассматривать как физическое ограничение на спектр масс частиц, описываемых алгебрической моделью (14). Кроме того, благодаря введению параметра $m_{\max}$ становится возможен физический подход в алгебраической модели: исходя из физической массы частицы по формулам (32), (33) можно найти параметры $m_1^{\mp}$ и $m_2^{\mp}$ для описания конкретной частицы с помощью гамильтониана (14) или (15). Таким образом, алгебраическая теория из абстрактной математической модели становится физической теорией, способной описывать реальные частицы.

В настоящей работе, кроме того, вычислен оператор $\mathcal{C}$ в явном виде для построения нового скалярного произведения в данной теории с неэрмитовым гамильтонианом.

Проведен анализ многозначности определения m_1 и m_2, проявляющейся явно благодаря введению $m_{\max}$. Отмечено, что данная теория описывает не только обычные, но и «экзотические» частицы, до сих пор появлявшиеся только в геометрической теории с максимальной массой.

Отмечено совпадение гамильтонианов, уравнений движения, а также соответствие обозначений алгебраической и геометрической теорий. На основании вышеизложенного сделан вывод о соответствии в указанном смысле неэрмитовой алгебраической фермионной модели с γ_5-массовым слагаемым и фермионного сектора геометрической теории с ограниченной массой.

Авторы искренне благодарны профессору В. Г. Кадышевскому за многолетнее плодотворное сотрудничество и ценные обсуждения ряда ключевых вопросов, затрагиваемых в статье.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ–4612.2012.1.).

Список литературы

1. *Markov M.A.* // Prog. Theor Phys. Suppl., Commemoration Issue for the Thirtieth Anniversary of Meson Theory and Dr. H. Yukawa. 1965. P. 85.
2. *Марков М.А.* // ЖЭТФ. 1966. **51**. С. 878; *Markov M.A.* // Sov. Phys. JETP. 1967. **24**. P. 584.

3. *Kadyshevsky V.G.* // Nucl. Phys. 1978. **B141**. P. 477.
4. *Kadyshevsky V.G.* // Phys. Elem. Chast. Atom. Yadra. 1980. **11**. P. 5.
5. *Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Rodionov V.N., Sorin A.S.* Towards a aximal mass model. CERN TH/2007-150; hep-ph/0708.4205.
6. *Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Rodionov V.N., Sorin A.S.* // Dokl. Phys. 2006. **51**. P. 287; hep-ph/0512332.
7. *Kadyshevsky V.G.* // Phys. Part. Nucl. 1998. **29**. P. 227.
8. *Kadyshevsky V.G., Mateev M.D.* // Phys. Lett. 1981. **B106**. P. 139.
9. *Волобуев И.П., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов М.Р.* // ТМФ. 1979. **40**. С. 363.
10. *Kadyshevsky V.G., Mateev M.D.* // Nuovo Cimento. 1985. **A87**. P. 324.
11. *Chizhov M.V., Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D.* // Nuovo Cimento. 1985. **A87**. P. 350; P. 373.
12. *Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G.* Preprint JINR-P2-86-835. 1986.
13. *Kadyshevsky V.G., Fursaev D.V.* // Sov. Phys. Dokl. 1989. **34**. P. 534.
14. *Kadyshevsky V.G., Rodionov V.N.* // Phys. Part. Nucl. 2005. **36**, N 1. S. 34.
15. *Rodionov V.N.* // PT-symmetric pseudo-Hermitian relativistic quantum mechanics with maximal mass. hep-th/1207.5463.
16. *Bender C.M., Boettcher S.* // Phys. Rev. Lett. 1998. **80**. P. 5243.
17. *Bender C.M., Boettcher S., Meisinger P.N.* // J. Math. Phys. 1999. **40**. P. 2210.
18. *Khare A., Mandal B.P.* // Phys. Lett. 2000. **A 272**. P. 53.
19. *Znojil M., Levai G.* // Mod. Phys. Lett. 2001. **A 16**. P. 2273.
20. *Mostafazadeh A.* // J. Phys. 2005. **A 38**. P. 6657; Erratum-ibid. 2005. **A 38**. P. 8185.
21. *Bender C.M., Brody D.C., Chen J.* et al. // Phys. Rev. 2006. **D 74**. P. 025016, and see refs therein.
22. *Khare A., Mandal B.P.* // Spl. Issue Pramana J. Phys. 2009. **73**. P. 387.
23. *Dorey P., Dunning C., Tateo R.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2001. **34**. P. 5679.
24. *Bender C.M., Jones H.F., Rivers R.J.* // Phys. Lett. 2005. **B 625**. P. 333.
25. *Mostafazadeh A.* // arXiv: 0810.5643. 2008.
26. *Mostafazadeh A.* // J. Math. Phys. 2002. **43**. P. 205; P. 2814; P. 3944.
27. *Mostafazadeh A.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2003. **36**. P. 7081.
28. *Mostafazadeh A.* // Class. Q. Grav. 2003. **20**. P. 155.
29. *Mostafazadeh A.* // Ann. Phys. 2004. **309**. P. 1.
30. *Mostafazadeh A., Batal A.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2004. **37**. P. 11645.
31. *Mostafazadeh A.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2006. **21**, N 12. P. 2553.
32. *Mostafazadeh A., Zamani F.* // Ann. Phys. 2006. **321**. P. 2183; P. 2210.
33. *Mostafazadeh A., Zamani F.* // J. Math. Phys. 2009. **50**. 052302.

The algebraic and geometric approaches to $\mathcal{PT}$-symmetric non-Hermitian relativistic quantum mechanics with maximal mass

V. N. Rodionov[1,a], **G. A. Kravtsova**[2,b]

[1] *Department of Computer Systems and Telecommunications, G. V. Plekhanov Russian University of Economics, Moscow 117997, Russia.*
[2] *Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *vnrodionov@mtu-net.ru,* [b] *gakr@chtc.ru.*

A non-Hermitian fermion model containing a γ_5-matrix in the mass term $m \to m_1 + \gamma_5 m_2$ is considered. A new refined condition of the unbroken $\mathcal{PT}$-symmetry of the theory is proposed that comprises an indication that the initial domain of unbroken $\mathcal{PT}$-symmetry is divided into subdomains corresponding to the description of ordinary and exotic particles. A relationship is established between the theory under study and the quantum field theory with maximal mass M developed on the basis of the geometric approach. The operator $\mathcal{C}$ is calculated explicitly, which is required for the construction of a new scalar product in the theory with a non-Hermitian Hamiltonian.

Keywords: quantum theory, maximal mass, non-Hermitian Hamiltonian.
PACS: 02.30.Jr, 03.65.–w, 03.65.Ge, 12.10.–g, 12.20.–m.
Received 26 November 2013.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2014).

Сведения об авторах

1. Родионов Василий Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 322-19-53, e-mail: vnrodionov@mtu-net.ru.
2. Кравцова Галина Альбертовна — канд. физ.-мат. наук, доцент, ассистент; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: gakr@chtc.ru.