Уравнения колебаний с учетом нелинейности до седьмой степени при расположении притягивающих масс на линии равновесия весов

В. М. Шахпаронов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики колебаний. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: shahp@phys.msu.ru

Статья поступила 29.01.2014, подписана в печать 31.03.2014.

Проанализирована точность расчета гравитационной постоянной G по методике, разработанной на основе численного интегрирования уравнений колебаний, а также методике, основанной на теории нелинейных колебаний. Учет более высокой седьмой степени при амплитуде 80 мрад в 47 раз уменьшил погрешность расчета момента сил притяжения. Это привело к снижению погрешности при расчете G с 15 до 0.3 ppm.

Ключевые слова: нелинейные колебания, уравнение колебаний, асимптотические методы, гравитационная постоянная, крутильные весы, динамический метод, дестабилизирующие факторы.

УДК: 534.1. PACS: 06.20.Jr, 04.80.Cc, 07.10.Pz, 02.60.Lj.

Введение

Асимптотические методы решения нелинейных уравнений колебаний занимают одно из видных мест как в радиофизике, так и в теории колебаний, которая является одной из ее основных составляющих. Модель нелинейной консервативной системы часто используется в теории колебаний. Она оправданна, когда рассматриваются системы с высокой добротностью. В статье речь идет о чувствительной крутильной системе, в которой момент притяжения рабочего тела пробными телами не пропорционален углу отклонения от положения равновесия. При учете членов высокого порядка асимптотические методы обеспечивают более высокую точность расчета по сравнению с численным интегрированием уравнений колебаний в случае взаимодействующих тел шаровой формы.

В последние годы появились работы, в которых авторы претендуют на существенное снижение погрешности при определении гравитационной постоянной [1–5]. Многие из них базируются на использовании крутильных весов, работающих в режиме свободных колебаний. Отсутствие протоколов измерений и сложная форма взаимодействующих тел затрудняют анализ таких работ. Заявленная авторами погрешность уже достигла уровня 15 ppm, когда существенную роль начинает играть точность вычислений. Поэтому повышение точности расчетов при вычислении гравитационной постоянной и определение имеющейся погрешности представляют актуальную задачу.

В [1, 2] наглядно видно, что авторы учитывают проблему сложности расчетов гравитационной постоянной при наличии нелинейной зависимости момента притяжения от угла отклонения весов. Используются шаровые притягивающие массы. Амплитуда колебаний ограничена величиной порядка 2 мрад, что позволяет игнорировать наличие нелинейности. Весы при добротности 1400 имеют период колебаний порядка 535 с. Низкая чувствительность весов при неудачной форме рабочего тела привела к резкому снижению изменения периода колебаний весов при наличии притягивающих масс. Влияние дестабилизирующего фактора в виде неравновесных потоков разреженного газа практически полностью погубило данный эксперимент. Неопределенность в толщине металлического покрытия на гранях кварцевого блока привела к дополнительным проблемам. Авторы оценивают погрешность в 26.33 ppm.

В [3] авторы не упоминают о методиках расчета и проблемах, которые неизбежно возникнут при вычислениях. Применены статический и компенсационный методы измерения. Взаимодействующие тела, изготовленные из меди с добавлением 0.7% теллура, имеют цилиндрическую форму. Подвес крутильной системы, выполненный из бериллиевой бронзы с содержанием 1.8% бериллия, толщиной 30 мкм, шириной 2.5 мм и длиной 160 мм обеспечил добротность порядка 10^5. К сожалению, не приведены данные, которые позволили бы рассчитать величину моментов притяжения. Погрешность, заявленная авторами, составила 27 ppm.

В [4] проблема несколько снижается за счет использования сферических притягивающих масс. Однако она остается достаточно сложной. Причина в том, что рабочее тело изготовлено в виде позолоченной прямоугольной пластинки из пирекса.

При этом авторы претендуют на значительное уменьшение погрешности определения гравитационной постоянной G. Ротационный метод дополнительно усложняет расчеты. Авторы остановились на погрешности 13.7 ppm.

В [5] измерения проводили компенсационным методом. Рабочее тело было изготовлено в виде горизонтального медного цилиндра массой 500 г и подвешено на вольфрамовой нити сечением 17×300 мкм длиной в 1 м. Притягивающие тела из нержавеющей стали или меди массой 27 кг были выполнены в виде вертикальных цилиндров. Они стояли на вращающемся столе с центром на оси нити и располагались на противоположных от нее сторонах. Поворотный стол останавливался в четырех позициях, в которых достигался максимум гравитационных сил. Значение G рассчитывалось по напряжению, которое должно быть приложено для сбалансирования гравитационного момента. Вычисления моментов притяжения осложнены цилиндрической формой взаимодействующих тел. Их значения в работе не приводятся. На протяжении всего эксперимента изменение температуры не превысило 0.2 градуса. Обозначена погрешность 40 ppm.

В [6] авторы подготовились к проведению сложных расчетов путем многократных дискретных измерений угла отклонения весов φ, что позволило вычислить как первую, так и вторую производную φ по времени. При обработке результатов все же возникли серьезные проблемы. Оригинальная методика авторов могла бы принести успех, но ограниченные возможности вычислительной техники не позволили провести качественный анализ. Пришлось вместо имевшихся четырех позиций использовать в расчетах только две — ближнюю и дальнюю. Вычисления моментов притяжения проводились лишь при одном фиксированном значении φ. Предполагалось, что нелинейностью моментов притяжения при амплитудах 18 мрад можно пренебречь. Выполнить вычисления при большом количестве углов отклонения не представлялось в то время возможным. Да и в настоящее время, несмотря на огромное увеличение скорости быстродействия современных компьютеров, табулирование моментов притяжения в настоящей работе представляет серьезную задачу. А без проведения такой предварительной работы никаких операций по вычислению гравитационной постоянной даже при использовании наших методик осуществить невозможно.

При подготовке наших измерений сложность предстоящих расчетов учитывалась заранее. Отклонение от шаровой формы принципиально не допускалось. Это позволило приступить к созданию аналитического метода расчета гравитационной постоянной. Совершенствовалась теория нелинейных колебаний. Сначала она была доведена до учета пятой степени угла отклонения весов, что нас вполне устраивало. Со временем она была развита до седьмой, но в программе для расчета не использовалась. Считалось, что пятой степени вполне достаточно. При этом следует учитывать, что имевшиеся ранее средства вычислений могли проводить расчеты только по предельно простым формулам. Существенный прогресс в области компьютерной техники наложил свой отпечаток на методики расчетов. Появилась дополнительная методика, которая позволила проводить вычисления непосредственно по двум дифференциальным уравнениям колебаний. Несмотря на то что она появилась значительно позднее, ее следует назвать первой. Только она применима при анализе тех работ, где допущено отклонение формы взаимодействующих тел от шаровой. Она работает при больших углах отклонения весов, но требует в случае отклонения от шаровой формы проведения предварительного табулирования моментов притяжения. Даже при их наличии расчеты проводятся примерно на два порядка дольше, чем по другой методике, которую мы назвали второй. Совпадение результатов по нашим двум методикам гарантировало отсутствие ошибок при их разработке и свидетельствовало о достаточно высокой точности расчетов. Однако точно определить их погрешность было трудно. Цель настоящей работы заключается в полном использовании всех резервов теории [7] путем разложения моментов притяжения в ряд по степеням угла отклонения φ до седьмой степени, что гарантирует повышение точности расчетов. Следовало также оценить величину погрешности методики 2 как в прежнем, так и в новом варианте.

В методике 1 период ангармонических колебаний при двух позициях притягивающих шаровых масс определяется методом Рунге–Кутты при двух близких по величине значениях гравитационной постоянной G. Методом линейной интерполяции определялось значение G, позволявшее совместить разность обратных квадратов расчетных и экспериментальных значений периодов колебаний весов.

Методика 2 базировалась на теории ангармонических колебаний. Момент сил притяжения разлагался в ряд по нечетным степеням угла отклонения весов φ. Период определялся по теории нелинейных колебаний [7], что также позволяло рассчитать гравитационную постоянную при наличии двух уравнений колебаний, когда притягивающие массы располагались на разных позициях. Формулы, полученные в [7, 8], при учете членов высокой степени различались. При детальном анализе выяснилось, что кажущееся различие обусловлено тем, что в [7] использовалась амплитуда первой гармоники, а в [8] — полная амплитуда всех гармоник. После учета этого различия формулы в данных работах на примере математического маятника строго совпали. Это послужило обоснованием достоверности обеих работ. Чем более высокие степени φ использовались при определении периода, тем более высокую точность обеспечивала методика. Теория уже была разработана до седьмой степени, но методика 2 ограничивалась только пятой. В настоящей работе показано, что использование всех имеющихся в настоящее время ресурсов теории позволяет существенно снизить погрешность расчетов гравитационной постоянной.

1. Момент притяжения с учетом седьмой степени

Момент сил притяжения между шаровыми грузами массой m_1, укрепленными на концах коромысла, и двумя притягивающими массами

$$K_{1i} = 2GMm_1L_i(b_{1ai} + b_{1bi})\sin\varphi, \tag{1}$$

где $b_{1ai} = L_5/(L_5^2 + L_i^2 - 2L_5L_i\cos\varphi + h^2)^{3/2}$, $b_{1bi} = -L_5/(L_5^2+L_i^2+2L_5L_i\cos\varphi+h^2)^{3/2}$, L_5, L_i — расстояния от оси вращения до центра масс шарового груза и притягивающего шара; индекс i указывает позицию шара; M — разность масс притягивающего шара и вытесненного им воздуха; h — расстояние от центра притягивающей массы до горизонтальной плоскости, в которой расположена ось коромысла; φ — угол отклонения коромысла от положения равновесия.

Момент силы притяжения коромысла двумя массами M

$$K_{2i} = GMm_2L_i(b_{2ai} + b_{2bi})\sin\varphi, \tag{2}$$

где $b_{2ai} = (L_i^2+L_6L_i\cos\varphi+h^2)/\{L_6(L_6^2+L_i^2+2L_6L_i\cos\varphi+h^2)^{1/2}(L_i^2\sin^2\varphi+h^2)\}$, $b_{2bi} = (L_i^2 - L_6L_i\cos\varphi + h^2)/\{-L_6(L_6^2+L_i^2-2L_6L_i\cos\varphi+h^2)^{1/2}(L_i^2\sin^2\varphi+h^2)\}$, m_2 — масса коромысла, L_6 — длина плеча коромысла. Момент K_{2i} получен интегрированием (1) по длине коромысла. При этом предполагалось, что диаметр коромысла пренебрежимо мал. Коромысло рассматривается как совокупность материальных точек — материальный отрезок. Отметим, что формула (2) завышает истинное значение K_{2i}, что может привести к занижению расчетных значений G. Однако возникающая погрешность имеет незначительную величину, поскольку $K_{2i} \ll K_{1i}$, а диаметр коромысла мал по сравнению с расстояниями между взаимодействующими массами. По своей структуре момент K_{2i} существенно отличается от момента притяжения грузов коромысла K_{1i}. Он состоит из членов K_{2ai} и K_{2bi}, отличающихся знаком перед L_6. Первый из них содержит множитель b_{2ai}, а второй — b_{2bi}. Их сумма дает момент притяжения всего коромысла, однако каждый в отдельности не отражает момент притяжения его плеч. Основной недостаток (2) заключается прежде всего в наличии в знаменателе при $h=0$ множителя $\sin\varphi$, что значительно затрудняет вычисления и даже может привести к их срыву при неудачно составленной программе. При стремлении к нулю φ момент K_{2i} также приближается к нулю, но это можно наглядно показать только после представления K_{2i} в виде ряда, содержащего нечетные степени угла отклонения коромысла.

Момент K_{1i} состоит из суммы двух моментов, учитывающих взаимодействие притягивающих масс как с ближним, так и с дальним грузом коромысла:

$$K_{1i} = K_{1ai} + K_{1bi},$$

где $K_{1ai} = 2GMm_1L_ib_{1ai}\sin\varphi$, $K_{1bi} = 2GMm_1L_ib_{1bi}\sin\varphi$.

Преобразуем знаменатель члена b_{1ai}:

$$(L_5^2 + L_i^2 - 2L_5L_i\cos\varphi + h^2)^{-3/2} = \\ = [(L_5^2 + L_i^2 - 2L_5L_i + h^2)(1 + b_{3ai}y_i)]^{-3/2},$$

где $b_{3ai} = -2L_5L_i/(L_5^2 + L_i^2 - 2L_5L_i + h^2)$, $y_i = -\varphi^2/2 + \varphi^4/24 - \varphi^6/720$.

Вычислим член $(1+b_{3ai}y_i)^{-3/2}$. Поскольку $b_{3ai}y_i \ll 1$, воспользуемся биномом Ньютона, использовав члены до z^3 включительно в следующей формуле:

$$(1+z)^n = 1 + nz + n(n-1)z^2/2 + n(n-1)(n-2)z^3/6.$$

В нашем случае $z = b_{3ai}y_i$, $n = -1.5$, $n(n-1)/2 = 1.875$, $n(n-1)(n-2)/6 = -2.1875$. Введем обозначения: $b_{4ai} = 2Mm_1L_5L_i(L_5^2 + L_i^2 - 2L_5L_i + h^2)^{-3/2}$, $b_{5ai} = -1.5b_{3ai}$, $b_{6ai} = 1.875b_{3ai}^2$, $b_{7ai} = -2.1875b_{3ai}^3$, $b_{4bi} = -2Mm_1L_5L_i(L_5^2 + L_i^2 + 2L_5L_i + h^2)^{-3/2}$, $b_{5bi} = -1.5b_{3bi}$, $b_{3bi} = 2L_5L_i/(L_5^2 + L_i^2 + 2L_5L_i + h^2)$, $b_{6bi} = 1.875b_{3bi}^2$, $b_{7bi} = -2.1875b_{3bi}^3$.

При проведении дальнейших расчетов учтем, что с учетом членов седьмой степени угла отклонения весов φ

$$\sin\varphi = \varphi - \varphi^3/6 + \varphi^5/120 - \varphi^7/5040, \quad y_i^2 = \varphi^4/4 - \varphi^6/24,$$
$$y_i\sin\varphi = -\varphi^3/2 + \varphi^5/8 - \varphi^7/80.$$

Преобразуем следующие члены:

$$(1+b_{5ai}y_i)\sin\varphi = \varphi - \varphi^3(1/6+b_{5ai}/2) + \varphi^5(1/120+b_{5ai}/8) - \\ - \varphi^7(1/5040 + b_{5ai}/80),$$
$$y_i^2\sin\varphi = \varphi^5/4 - \varphi^7/12,$$
$$y_i^3 = -\varphi^6/8,$$
$$y_i^3\sin\varphi = -\varphi^7/8.$$

Используя приведенные выражения, представим момент K_{1ai} в виде ряда:

$$K_{1ai} = Gb_{4ai}\Big[\varphi - \varphi^3/6 + \varphi^5/120 - \varphi^7/5040 + \\ + b_{5ai}(-\varphi^3/2+\varphi^5/8-\varphi^7/80) + b_{6ai}(\varphi^5/4-\varphi^7/12) - b_{7ai}\varphi^7/8\Big].$$

После преобразований найдем, что

$$K_{1ai} = Gb_{4ai}\Big[\varphi - \varphi^3(1/6 + b_{5ai}/2) + \varphi^5(1/120 + \\ + b_{5ai}/8 + b_{6ai}/4) - \varphi^7(1/5040 + b_{5ai}/80 + b_{6ai}/12 + b_{7ai}/8\Big].$$

В члене K_{1bi} изменяется знак перед L_5. При использовании двух равных по величине притягивающих масс

$$K_{1i} = (b_{4ai} + b_{4bi})G\varphi - \\ - \Big[b_{4ai}(b_{5ai}/2 + 1/6) + b_{4bi}(b_{5bi}/2 + 1/6)\Big]G\varphi^3 + \\ + \Big[b_{4ai}(1/120 + b_{5ai}/8 + b_{6ai}/4) + \\ + b_{4bi}(1/120 + b_{5bi}/8 + b_{6bi}/4\Big]G\varphi^5 + \\ + \Big[b_{4ai}(1/5040 - b_{5ai}/80 - b_{6ai}/12 - b_{7ai}/8) + \\ + b_{4bi}(1/5040 - b_{5ai}/80 - b_{6ai}/12 - b_{7ai}/8\Big]G\varphi^7.$$

Гравитационная постоянная в этом случае выражается соотношением

$$G_{ij} = 4\pi^2J(T_i^{-2} - T_j^{-2})/(b_{1i} + b_{2i} - b_{1j} - b_{2j}),$$

где

$$b_{1i} = b_{4ai} + b_{4bi} + 3e_{1i}\varphi_{0i}^2/4 + \varphi_{0i}^4(3Ge_{1i}^2\omega_0^{-2}/128 + 5e_{2i}/8) + \\ + \varphi_0^6(35e_3/64 + 5e_1e_2\omega_0^{-2}/64 - 57e_1^3\omega_0^{-4}/4096)\omega_{0i}^2 = \\ = 4\pi^2/T_{0i}^2 + Gb_{4ai}/J,$$
$$e_{1i} = -b_{4ai}(b_{5ai}/2 + 1/6) - b_{4bi}(b_{5bi}/2 + 1/6),$$
$$e_{2i} = b_{4ai}(1/120 + b_{5ai}/8 + b_{6ai}/4) + \\ + b_{4bi}(1/120 + b_{5bi}/8 + b_{6bi}/4),$$
$$e_{3i} = -b_{4ai}(1/5040 + b_{5ai}/80 + b_{6a}/12 + b_{7a}/8) - \\ - b_{4bi}(1/5040 + b_{5ai}/80 + b_{6a}/12 + b_{7a}/8),$$

а член b_{2i} учитывает вклад всех участков коромысла, каждое плечо которого условно разделено на n равных отрезков массой $m_2/2n$. Отрезки коромысла рассматриваются как точечные массы. Они расположены на расстояниях $L_6(k-0.5)/n$ от оси вращения, k изменяется в пределах от 1 до n. Методика 2 не использует формулу (2), а предпочитает ценой увеличения времени вычислений рассматривать коромысло как цепочку точечных масс. Длина отрезков коромысла примерно равна его диаметру. При расчетах по методике 1 предпочтение все же отдается формуле (2), что позволяет сократить время вычислений примерно в 50 раз. В члены с индексом j вместо L_i подставляется L_j.

2. Анализ результатов

Проверку полученных результатов осуществим на примере данных массива 010216. Имя файла содержит год, месяц и дату начала измерений.Массив 010216.dat был завершен 18 января 2002 г. Накопилось 8508 строк протокола. Он имел параметры $T_0 = 1721.990$ с, $M = 14083.566$ г, $m_1 = 9.7192$ г, $m_2 = 2.9673$ г,

$L_5 = 11.8016$ см, $L_6 = 11.1636$ см, $L_1 = 21.1160$ см, $L_2 = 23.9131$ см, $L_3 = 33.7117$ см (расстояния от центров притягивающих масс до оси вращения весов на трех позициях соответственно). Притягивающие стальные массы диаметром 152.4 мм фиксировались в трех позициях. Усредненные периоды колебаний весов составляли соответственно величины 1606.646, 1660.246 и 1707.673 с. Разность периодов колебаний составила 53.600 и 47.427 с, а время измерения на каждой позиции — 0.893, 0.922 и 0.949 ч. В протоколе массива выбираем те строки, которые удобны для проведения анализа в широком диапазоне φ_{0i}. Номера строк сохраняем. Строки выбраны таким образом, что амплитуда колебаний постепенно возрастает. В основном представлены прямые циклы, когда измерения начинаются с ближней к весам позиции 1. В порядке исключения в строках 441–446 и 3562–3567 кроме прямых приведены и обратные циклы. Это позволяет увидеть рост амплитуды колебаний по ходу процесса измерений в автоматическом режиме. Данный эффект не отражается на точности расчетов, поскольку каждая строка протокола содержит две амплитуды колебаний. Он обусловлен тем, что перемещение притягивающих масс ведет к параметрической накачке энергии в крутильную систему. Чем выше добротность системы, больше момент притяжения и амплитуда колебаний, тем сильнее проявляется такой эффект. При введении задержки в начало перемещения притягивающих масс на очередную позицию можно исключить эффект изменения амплитуды колебаний весов.

В данном эксперименте использовалась нить подвеса диаметром 15 мкм из сплава молибдена и рения МР-50. Он обладает повышенной прочностью на разрыв, что позволило увеличить период колебаний весов, однако имеет большие гистерезисные потери по сравнению с вольфрамовыми нитями. После осуществления термомеханической обработки нити подвеса в вакууме под нагрузкой добротность достигла величины порядка 5000, на вольфрамовых нитях после аналогичной операции она возрастала до 20000.

Погрешность расчета моментов притяжения тела весов в позиции 1, когда расстояние от оси вращения весов до центра каждого из притягивающих шаров диаметром 152.4 мм составляет 21.1160 см, приведена в табл. 1. Во всем диапазоне углов отклонения весов φ учет седьмой степени ведет к существенному снижению погрешности. На амплитуде 80 мрад при учете пятой степени погрешность вычисления момента притяжения тела весов составляет $-1.48 \cdot 10^{-5}$. При учете седьмой степени погрешность составляет всего $3.15 \cdot 10^{-7}$. На второй позиции шаровые массы удаляются от весов, что ведет к уменьшению значения момента притяжения и снижению погрешности вычислений (табл. 2). На третьей позиции расстояние до притягивающих масс возрастает значительно, что существенно снижает моменты притяжения (табл. 3). Погрешности вычисления моментов в трех позициях в диапазоне от 50 до 100 мрад показаны на рис. 1. Они определяют в конечном итоге погрешность вычислений G_{ij}. В табл. 4 приведены периоды и амплитуды колебаний в каждой позиции, значения гравитационной постоянной при расчетах по методике 1 (столбец 8) и методике 2 (столбцы 9 и 10) с учетом пятой и седьмой степеней. Погрешность методики 1 в табл. 4 обозначена σ_1, а методики 2 с учетом пятой степени — σ_2. Погрешность методики 2 в столбце 10 можно оценить приближенно по по-

Таблица 1

Точные (K) и приближенные значения моментов притяжения тела весов с учетом пятой (K_5) и седьмой (K_7) степеней φ в позиции 1 массива 010216 при $M = 14083.566$ г, $m_1 = 9.7192$ г, $L = 21.1160$ см, $L_5 = 11.8016$ см и погрешности их определения σ_{1k} и σ_{2k}

	2	3	4	6	7	
φ, мрад	$10^{11}K$, Нм	$10^{11}K_5$, Нм	$10^{11}K_7$, Нм	$\sigma_{1k} = (K_5 - K)/K$	$\sigma_{2k} = (K - K_7)/K$	σ_{1k}/σ_{2k}
20.00	1.155971959330	1.155971963482	1.155971959322	$3.59 \cdot 10^{-9}$	$6.76 \cdot 10^{-12}$	531.746
30.00	1.730085698282	1.730085769147	1.730085698063	$4.10 \cdot 10^{-8}$	$1.27 \cdot 10^{-10}$	323.346
40.00	2.299584276962	2.299584806660	2.299584274135	$2.303 \cdot 10^{-7}$	$1.23 \cdot 10^{-9}$	187.340
50.00	2.862981373499	2.862983891872	2.862981352595	$8.80 \cdot 10^{-7}$	$7.30 \cdot 10^{-9}$	120.471
52.22	2.987081996500	2.987085407369	2.987081965629	$1.14 \cdot 10^{-6}$	$1.03 \cdot 10^{-8}$	110.487
60.00	3.418834339504	3.418843330833	3.418834232145	$2.63 \cdot 10^{-6}$	$3.14 \cdot 10^{-8}$	83.750
70.00	3.965753952895	3.965780292346	3.965753524937	$6.64 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-7}$	61.547
71.98	4.072868049376	4.072900038716	4.072867499810	$7.85 \cdot 10^{-6}$	$1.35 \cdot 10^{-7}$	58.208
78.02	4.397030468740	4.397086532648	4.397029337172	$1.28 \cdot 10^{-5}$	$2.57 \cdot 10^{-7}$	49.545
80.00	4.502413433750	4.502480180511	4.502412017312	$1.48 \cdot 10^{-5}$	$3.15 \cdot 10^{-7}$	47.123
89.82	5.018212819539	5.018362121586	5.018208825379	$2.98 \cdot 10^{-5}$	$7.96 \cdot 10^{-7}$	37.380
90.00	5.027556614017	5.027708007283	5.027552547656	$3.01 \cdot 10^{-5}$	$8.09 \cdot 10^{-7}$	37.231
100.0	5.540005170583	5.540319765014	5.539994737554	$5.68 \cdot 10^{-5}$	$1.88 \cdot 10^{-6}$	30.154
120.0	6.522530644243	6.523642180082	6.522477547927	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$8.14 \cdot 10^{-6}$	20.934
140.0	7.442330133936	7.445547129473	7.442120901126	$4.32 \cdot 10^{-4}$	$2.81 \cdot 10^{-5}$	15.375

Таблица 2

Точные (K) и приближенные значения моментов притяжения тела весов с учетом пятой (K_5) и седьмой (K_7) степеней φ в позиции 2 массива 010216 при $M = 14083.566$ г, $m_1 = 9.7192$ г, $L = 23.9131$ см, $L_5 = 11.8016$ см и погрешности их определения σ_{1k} и σ_{2k}

	2	3	4	6	7	
φ, мрад	$10^{12}K$, Нм	$10^{12}K_5$, Нм	$10^{12}K_7$, Нм	$\sigma_{1k} = (K_5 - K)/K$	$\sigma_{2k} = (K - K_7)/K$	σ_{1k}/σ_{2k}
20.00	5.902375180495	5.902375187254	5.902375180488	$1.15 \cdot 10^{-9}$	$1.03 \cdot 10^{-12}$	1112.00
30.00	8.839824869502	8.839824984864	8.839824869269	$1.31 \cdot 10^{-8}$	$2.64 \cdot 10^{-11}$	494.286
40.00	11.76086492408	11.76086578697	11.76086492098	$7.34 \cdot 10^{-8}$	$2.64 \cdot 10^{-10}$	278.027
50.00	14.66015108831	14.66015519458	14.66015106523	$2.80 \cdot 10^{-7}$	$1.57 \cdot 10^{-9}$	177.930
52.22	15.30031323510	15.30031879771	15.30031320079	$3.64 \cdot 10^{-7}$	$2.24 \cdot 10^{-9}$	162.122
60.00	17.53244521663	17.53245989372	1.753244509752	$8.37 \cdot 10^{-7}$	$6.79 \cdot 10^{-9}$	123.225
70.00	20.37263987370	20.37268292777	2.037263939887	$2.11 \cdot 10^{-6}$	$2.33 \cdot 10^{-8}$	90.673
71.98	20.93075799428	20.93081029889	20.93075738443	$2.50 \cdot 10^{-6}$	$2.91 \cdot 10^{-8}$	85.766
78.02	22.62393205764	22.62402381185	2.262393080113	$4.06 \cdot 10^{-6}$	$5.55 \cdot 10^{-8}$	73.023
80.00	23.17578169436	23.17589096746	23.17578012113	$4.71 \cdot 10^{-6}$	$6.79 \cdot 10^{-8}$	69.458
89.82	25.88778644352	25.88803128941	2.588778200061	$9.46 \cdot 10^{-6}$	$1.72 \cdot 10^{-7}$	55.109
90.00	25.93709329940	25.93734158298	25.93708877604	$9.57 \cdot 10^{-6}$	$1.74 \cdot 10^{-7}$	54.889
100.0	28.65199358512	28.65251051511	28.65198195860	$1.80 \cdot 10^{-5}$	$4.06 \cdot 10^{-7}$	44.461
120.0	33.92532628169	33.92716077339	3.392526685986	$5.41 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-6}$	30.872
140.0	38.96371101277	38.96904739120	3.896347569185	$1.37 \cdot 10^{-4}$	$6.04 \cdot 10^{-6}$	22.677

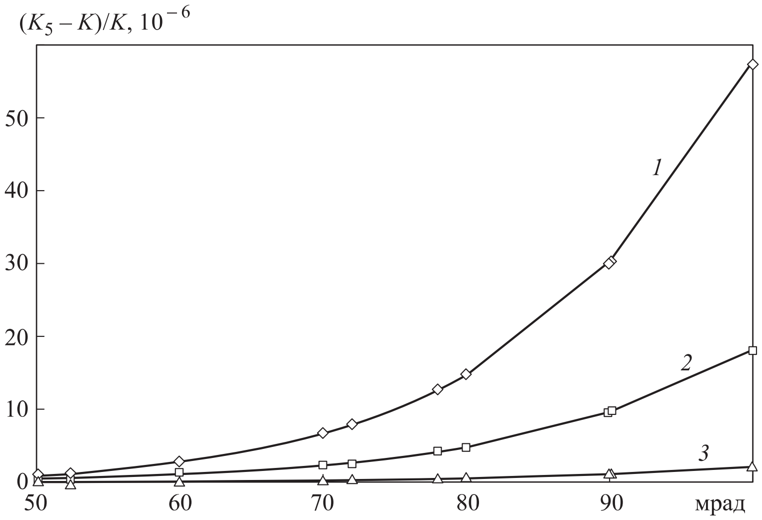

Рис. 1. Погрешность расчета момента притяжения тела весов $(K_5 - K)/K$ при учете пятой степени угла отклонения весов φ в позициях 1, 2, 3 (нижняя кривая)

грешности вычисления момента притяжения, который значительно ниже погрешности при учете только пятой степени. Столбец 10 можно использовать для оценки погрешности расчетов в столбцах 8 и 9, поскольку имеющаяся в ней погрешность сравнительно мала. В диапазоне φ_0 до 100 мрад $\sigma_2 < \sigma_1$ при дальнейшем росте φ_0 погрешность $\sigma_1 < \sigma_2$. Погрешность G_{12} превышает погрешность G_{13}. Из трех имеющихся комбинаций самую низкую погрешность имеет комбинация G_{23}. Отметим, что погрешности вычисления моментов притяжения превышают погрешности вычислений гравитационной постоянной. Например, в позиции 1 погрешность вычисления момента притяжения при $\varphi = 71.98$ и 89.82 мрад составляет соответственно $7.85 \cdot 10^{-6}$ и $2.98 \cdot 10^{-5}$, в позиции 2 — $2.50 \cdot 10^{-6}$ и $9.46 \cdot 10^{-6}$, в позиции 3 — $2.55 \cdot 10^{-7}$ и $9.65 \cdot 10^{-7}$. При тех же амплитудах колебаний погрешность G_{12} составляет $7.63 \cdot 10^{-6}$ и $2.91 \cdot 10^{-5}$, погрешность G_{13} — $5.09 \cdot 10^{-6}$ и $1.95 \cdot 10^{-5}$, погрешность G_{23} — $1.99 \cdot 10^{-6}$ и $7.63 \cdot 10^{-6}$. Следовательно, из данных табл. 1 и 2 можно сделать вывод, что погрешность расчета G_{12} при $\varphi_0 = 80$ мрад не превысит 0.3 ppm, погрешность G_{13} будет еще ниже, а погрешность G_{23} не превысит 0.06 ppm. Из табл. 3 следует, что при наличии дополнительной четвертой

Таблица 3

Точные (K) и приближенные значения моментов притяжения тела весов с учетом пятой (K_5) и седьмой (K_7) степеней φ в позиции 3 массива 010216 при $M = 14083.566$ г, $m_1 = 9.7192$ г, $L = 33.7117$ см, $L_5 = 11.8016$ см и погрешности их определения σ_{1k} и σ_{2k}

	2	3	4	6	7	
φ, мрад	$10^{12}K$, Нм	$10^{12}K_5$, Нм	$10^{12}K_7$, Нм	$\sigma_{1k} = (K_5 - K)/K$	$\sigma_{2k} = (K - K_7)/K$	σ_{1k}/σ_{2k}
20.00	1.318533207206	1.318533207361	1.318533207206	$1.17 \cdot 10^{-10}$	$4.79 \cdot 10^{-14}$	2443.78
30.00	1.976248249024	1.976248251662	1.976248249022	$1.33 \cdot 10^{-9}$	$1.22 \cdot 10^{-12}$	1092.91
40.00	2.632105263849	2.632105283597	2.632105263817	$7.50 \cdot 10^{-9}$	$1.22 \cdot 10^{-11}$	614.993
50.00	3.285491303107	3.285491397188	3.285491302868	$2.86 \cdot 10^{-8}$	$7.28 \cdot 10^{-11}$	393.599
52.22	3.430146679462	3.430146806950	3.430146679108	$3.72 \cdot 10^{-8}$	$1.03 \cdot 10^{-10}$	360.843
60.00	3.935798862421	3.935799199156	3.935798861189	$8.56 \cdot 10^{-8}$	$3.13 \cdot 10^{-10}$	273.327
70.00	4.582427197754	4.582428186979	4.582427192715	$2.16 \cdot 10^{-7}$	$1.10 \cdot 10^{-9}$	196.307
71.98	4.709971587710	4.709972789900	4.709971581257	$2.55 \cdot 10^{-7}$	$1.37 \cdot 10^{-9}$	186.296
78.02	5.097964189956	5.097966301239	5.097964176738	$4.14 \cdot 10^{-7}$	$2.59 \cdot 10^{-9}$	159.727
80.00	5.224783612098	5.224786127460	5.224783595568	$4.81 \cdot 10^{-7}$	$3.16 \cdot 10^{-9}$	152.168
89.82	5.850855960631	5.850861608202	5.850855914083	$9.65 \cdot 10^{-7}$	$7.96 \cdot 10^{-9}$	121.328
90.00	5.862284707292	5.862290434381	5.862284659902	$9.77 \cdot 10^{-7}$	$8.08 \cdot 10^{-9}$	120.850
100.0	6.494357595791	6.494369546986	6.494357473986	$1.84 \cdot 10^{-6}$	$1.88 \cdot 10^{-8}$	98.117
120.0	7.739986707149	7.740029342237	7.739986082493	$5.51 \cdot 10^{-6}$	$8.07 \cdot 10^{-8}$	68.254
140.0	8.957341127132	8.957465905639	8.957338639909	$1.39 \cdot 10^{-5}$	$2.78 \cdot 10^{-7}$	50.168

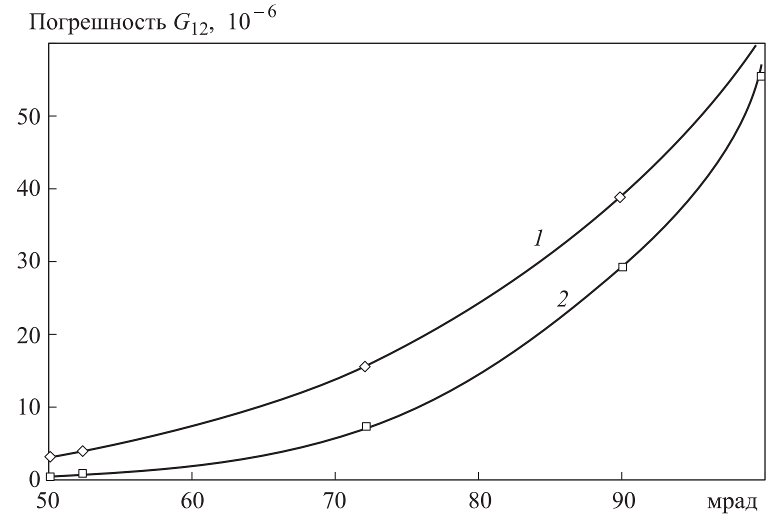

Рис. 2. Погрешность вычисления значения гравитационной постоянной G_{12} по методикам 1 и 2 (нижняя кривая) при учете четвертой степени амплитуды колебаний весов

позиции, в которой притягивающие массы отсутствуют, погрешность расчета G_{34} окажется не более 0.003 ppm. Погрешность определения G_{12} в диапазоне φ_0 от 50 до 100 мрад иллюстрирует рис. 2.

Учет нелинейности представляет одну из основных проблем при расчете гравитационной постоянной. В позиции 1 при $\varphi = 20$ мрад отклонение от линейного закона в моменте притяжения достигает 1786 ppm, что почти совпадает с подобным отклонением в той же позиции 1 в [6], где φ достигает 18 мрад. С ростом φ нелинейность быстро нарастает. Так, при $\varphi = 50$ мрад отклонение достигает 11205 ppm, а при $\varphi = 100$ мрад — уже 45 096 ppm. В позиции 2 при тех же значениях φ отклонение составляет соответственно 1218, 7638 и 30687‘ppm, что примерно соответствует позиции 3 в [6]. В позиции 3 при тех же φ отклонение составит 563, 3526 и 14135 ppm.

Заключение

Учет членов до седьмой степени φ привел к радикальному снижению погрешности при вычислении как моментов сил притяжения, так и значений гравитационной постоянной во всех комбинациях позиций притягивающих шаровых масс [9]. При этом более

Таблица 4

Значения гравитационной постоянной при расчете по методике 1 (столбец 8) и методике 2 с учетом членов при φ_0^4 (столбец 9) и φ_0^6 (столбец 10). Погрешность расчетов по методике 1 дается величиной σ_1, по методике 2 — по столбцу 9 — σ_2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	n_i	n_j	T_i, с	T_j, с	φ_{0i}, мрад	φ_{0j}, мрад	$G_{ij}\cdot 10^{11}$ Нм^2/кг^2			σ_1	σ_2
0441	1	2	1607.347	1660.962	46.98	47.78	6.6747326	6.6747468	6.6747506	$2.70\cdot10^{-6}$	$5.69\cdot10^{-7}$
0442	2	3	1660.962	1708.410	47.78	48.19	6.6726179	6.6726255	6.6726265	$1.29\cdot10^{-6}$	$1.50\cdot10^{-7}$
0443	1	3	1607.347	1708.410	46.98	48.19	6.6737890	6.6737995	6.6738022	$1.98\cdot10^{-6}$	$4.05\cdot10^{-7}$
0444	3	2	1708.410	1660.953	48.19	47.95	6.6742030	6.6742102	6.6742113	$1.24\cdot10^{-6}$	$1.65\cdot10^{-7}$
0445	2	1	1660.953	1607.327	47.95	47.11	6.6766578	6.6766706	6.6766746	$2.52\cdot10^{-6}$	$5.99\cdot10^{-7}$
0446	3	1	1708.410	1607.327	48.19	47.11	6.6755616	6.6755725	6.6755751	$2.02\cdot10^{-6}$	$3.89\cdot10^{-7}$
0674	1	2	1607.611	1661.108	52.22	53.12	6.6726337	6.6726533	6.6726606	$4.03\cdot10^{-6}$	$1.09\cdot10^{-6}$
0675	2	3	1661.108	1708.490	53.12	53.58	6.6715742	6.6715829	6.6715848	$1.59\cdot10^{-6}$	$2.85\cdot10^{-7}$
0676	1	3	1607.611	1708.490	52.22	53.58	6.6721607	6.6721756	6.6721805	$2.97\cdot10^{-6}$	$7.34\cdot10^{-7}$
2836	1	2	1608.279	1661.267	71.98	73.27	6.6745053	6.6745611	6.6746120	$1.60\cdot10^{-5}$	$7.63\cdot10^{-6}$
2837	2	3	1661.267	1708.351	73.27	73.94	6.6744077	6.6744203	6.6744336	$3.88\cdot10^{-6}$	$1.99\cdot10^{-6}$
2838	1	3	1608.279	1708.351	71.98	73.94	6.6744630	6.6744997	6.6745337	$1.06\cdot10^{-5}$	$5.09\cdot10^{-6}$
2956	1	2	1608.565	1661.372	78.02	79.41	6.6752060	6.6752867	6.6753706	$2.47\cdot10^{-5}$	$1.26\cdot10^{-5}$
2957	2	3	1661.372	1708.340	79.41	80.14	6.6740354	6.6740537	6.6740753	$5.98\cdot10^{-6}$	$3.24\cdot10^{-6}$
2958	1	3	1608.565	1708.340	78.02	80.14	6.6746839	6.6747357	6.6747917	$1.62\cdot10^{-5}$	$8.39\cdot10^{-6}$
3121	1	2	1609.285	1661.679	89.82	91.50	6.6728554	6.6729201	6.6731144	$3.88\cdot10^{-5}$	$2.91\cdot10^{-5}$
3122	2	3	1661.679	1708.409	91.50	92.39	6.6742756	6.6742820	6.6743329	$8.59\cdot10^{-6}$	$7.63\cdot10^{-6}$
3123	1	3	1609.285	1708.409	89.82	92.39	6.6734939	6.6735344	6.6736643	$2.55\cdot10^{-5}$	$1.95\cdot10^{-5}$
3221	1	2	1609.718	1661.732	99.76	101.60	6.6746631	6.6746968	6.6750647	$6.02\cdot10^{-5}$	$5.51\cdot10^{-5}$
3222	2	3	1661.732	1708.228	101.60	102.57	6.6759000	6.6758918	6.6759877	$1.31\cdot10^{-5}$	$1.44\cdot10^{-5}$
3223	1	3	1609.718	1708.228	99.76	102.57	6.6752222	6.6752377	6.6754832	$3.91\cdot10^{-5}$	$3.68\cdot10^{-5}$
3427	1	2	1611.562	1662.558	123.32	125.56	6.6740600	6.6736591	6.6750021	$1.41\cdot10^{-4}$	$2.01\cdot10^{-4}$
3428	2	3	1662.558	1708.422	125.56	126.74	6.6735300	6.6733883	6.6737345	$3.06\cdot10^{-5}$	$5.19\cdot10^{-5}$
3429	1	3	1611.562	1708.422	123.32	126.74	6.6738264	6.6735418	6.6744344	$9.11\cdot10^{-5}$	$1.34\cdot10^{-4}$

совершенный вариант методики 2 позволил определить фактическую погрешность как методики 2, в которой еще не использовались члены при φ_0^6, так и методики 1. Погрешность достигла величины 0.3 ppm, которая в 45 раз ниже уровня 13.7 ppm [4]. Следовательно, наши методики расчета не внесут погрешность в определение гравитационной постоянной даже в тех работах, где заявлены наиболее низкие погрешности. Использование формы взаимодействующих тел, отличающейся от шаровой, не только исключает применение более простой и надежной методики 2, но и существенно осложняет использование методики 1. Она в этом случае может быть реализована только после предварительного вычисления моментов притяжения.

Методика 2 практически сохранила прежнее время вычислений, которое примерно на два порядка меньше времени вычислений по методике 1. При этом появилась возможность увеличить диапазон значений φ_{0i}, в котором гарантируется низкая погрешность расчетов. Однако существенный рост нелинейности при увеличении амплитуды колебаний ограничивает верхний предел примерно на прежнем уровне порядка 80 мрад. При дальнейшем росте амплитуды значительно повышаются требования к точности ее измерения.

Во всех выполненных экспериментах в файле констант вместо величины $\varphi_0 = 80$ мрад, задающей верхнюю границу расчетов по методике 2, было установлено более высокое значение $\varphi_0 = 100$ мрад. Специальный ключ программы автоматически осуществляет переход с методики 2 на методику 1 при превышении φ_0 заданного уровня. При заявленной погрешности 75 ppm [9] увеличение φ_0 в большинстве имеющихся массивов измерений существенно не снизило точность определения G. Однако в некоторых массивах, содержащих большие значения φ_0, при учете более высокой нелинейности наблюдалось уточнение G. При изменении любой величины в файле констант новые расчеты массивов, содержащих почти 100000 строк протокола, при использовании данного ключа проводятся в течение нескольких часов.

Автор выражает свою глубокую признательность заведующему кафедрой физики колебаний, физического факультета МГУ доктору физ.-мат. наук, профессору С. П. Вятчанину за ряд очень ценных замечаний и доктору техн. наук О. В. Карагиозу за поддержку и обсуждение рукописи.

Список литературы

1. *Luo J., Liu Q., Tu L.C., Shao C.G.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. **102**, N 24. 240801-4.
2. *Tu L.C., Li Q., Wang Q.L.* et al. // Phys. Rev. D. 2010. **82**, № 2. 022001-36.
3. *Quinn T.J., Parks H.V., Speake C.C., Davis R.S.* // Phys. Rev. Lett. 2013. **111**, N 10. 101102-5.
4. *Gundlach J.H., Merkowitz S.M.* // Phys. Rev. Lett. 2000. **85**, N 14. P. 2869.
5. *Armstrong T.R., Fitzgerald M.P.* // Phys. Rev. Lett. 2003. **91**, N 20. 201101-4.
6. *Сагитов М.У., Милюков В.К., Монахов Е.А.* и др. // Доклады АН СССР. 1979. **245**. № 3. С. 567.
7. *Кузнецов А.И., Карагиоз О.В., Измайлов В.П.* // Измерительная техника. 2005. № 9. С. 11.
8. *Колосницын Н.И.* // Метрология. 1990. № 11. С. 3.
9. *Карагиоз О.В., Измайлов В.П.* // Измерительная техника. 1996. № 10. С. 3.

An equation of oscillations for the arrangement of attracting solids on the equilibrium line of a balance with account for nonlinearity of up to the seventh power

V. M. Shakhparonov

Department of Physics of Oscillations, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: shahp@phys.msu.ru.

The accuracy of calculating the gravitational constant, G, using a method based on the numerical integration of an equation of oscillations and a method based on the nonlinear oscillation theory is analyzed. Taking account of a higher (the seventh) power at an amplitude of 80 mrad reduces the error of calculating the moment of attraction forces by 47 times. This reduces the error of calculating G from 15 to 0.3 ppm.

Keywords: nonlinear oscillations, equation of oscillations, asymptotic methods, gravitational constant, torsion balance, time-of-swing method, destabilizing factors.
PACS: 06.20.Jr, 04.80.Cc, 07.10.Pz, 02.60.Lj.
Received 29 January 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2014).

Сведения об авторе

Шахпаронов Владмимир Михайлович — ведущий электроник; тел.: (495) 939-21-46, e-mail: shahp@phys.msu.ru.