Индекс мерцаний гауссовских пучков в среде с сильной турбулентностью

Т. И. Арсеньян, Н. А. Сухарева[a], А. П. Сухоруков, А. А. Чугунов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра фотоники и физики микроволн. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] suhareva@phys.msu.ru

Статья поступила 12.01.2014, подписана в печать 31.03.2014.

Представлены результаты экспериментального и теоретического анализа локальных статистических характеристик гауссовских пучков, прошедших область сильной турбулентности. Установлено существенное ограничение применимости значения индекса мерцаний для оценки качества работы открытых оптических каналов передачи данных. На основе экспериментальных данных, полученных в различных условиях распростанения пучка через турбулентную среду, выявлены особенности пространственных локализованных распределений интенсивности и индекса мерцаний.

Ключевые слова: открытый оптический канал, индекс мерцаний, лазерный пучок, турбулентность.
УДК: 537.876.23, 537.877, 621.3.09. PACS: 42.25.Dd, 42.68.Bz.

Введение

Современные открытые оптические каналы передачи данных получили импульс развития после интеграции пространственно-временных кодовых структур и низкоплотностных методов помехоустойчивого кодирования передаваемых потоков данных. Однако основная часть кодовых структур разрабатывается в предположении относительно коротких серий помех, зачастую нарушаемом в режиме высоких скоростей модуляции и мультиплексировании подканалов.

Существенным фактором, ограничивающим скоростные характеристики открытых оптических каналов, остается турбулентное возмущение среды, гарантированно переходящее в режим сильных возмущений при рабочей длине трассы в несколько километров и более. Отсутствие строгих математических алгоритмов прогнозирования флуктуаций в режиме сильной турбулентности приводит к избыточному резервированию ресурсов канала, увеличению времени обработки блоков данных, снижению энергетической эффективности приемо-передающей системы.

Общепринятой характеристикой неустойчивости для открытых оптических каналов служит «индекс мерцаний», введенный впервые для астрономических наблюдений и характеризующий относительные флуктуации интенсивности при узкоракурсном приеме сигнала [1]. Детальное экспериментальное исследование локального профиля индекса мерцаний, регистрируемого в зоне покрытия сигнального пучка, выявило сильную зависимость данного параметра от местоположения и профиля контрольной апертуры. В работе последовательно обсуждаются результаты экспериментальных работ, выполненных авторами на реальной и модельной трассах, частично описанных ранее в [2, 3].

1. Мультигауссовский пучок в турбулентной среде

Рассмотрим общий случай распространения пучка, составленного из нескольких гауссовских компонент, в турбулентной атмосфере. Практическая значимость подобной задачи определяется развитием технологии многоканальных оптических систем, работающих на битовых скоростях свыше 10 Гб/с. Пучки сложного пространственного профиля позволяют не только эффективно применять методы пространственно-частотного кодирования, но и значительно снижать энергетические потери, неизбежные при использовании широких пучков высокой мощности [4]. Гауссовский профиль пучка можно использовать как базисный при создании различных пространственных структур, анализируя сложный пучок как суперпозицию нескольких гауссовских. Например, cosh-гауссовский пучок может быть получен путем наложения четырех децентрированных гауссовских пучков одинаковой ширины [5].

Пусть мультигауссовский пучок, источники которого имеют совпадающие частоты, когерентны, расположены в одной плоскости, распространяется вдоль оси z, перпендикулярной плоскости размещения источников (близкий к излагаемому подход используется в работе [6]). Соответствующее пучку возмущение в точках с $z=0$, принадлежащих плоскости размещения источников, запишем следующим образом:

$$u(x,y,0)=\sum_{i}^{N} u_i(x,y,0), \tag{1}$$

где $u_i(x,y,0)$ — i-я гауссовская компонента.

Для каждой гауссовской компоненты единичной амплитуды определим ширину пучка w_0 и координаты центра излучателя $(a_i,b_i,0)$:

$$u_i(x,y,0)=\exp\left[-\frac{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}{w_0^2}\right]. \tag{2}$$

Используя расширенный принцип Гюйгенса–Френеля [7], выразим среднюю интенсивность в плоскости приемника, расположенного на расстоянии $(z=L)$ от излучателя, как

$$\langle I(p,q,L)\rangle=\frac{k^2}{(2\pi L)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,y,0)u^*(\xi,\eta,0)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{ik}{2L}\left[(p-x)^2+(q-y)^2-(p-\xi)^2-(q-\eta)^2\right]\right\}\times$$
$$\times\langle\exp[\psi(x,y,p,q)+\psi^*(\xi,\eta,p,q)]\rangle\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta, \tag{3}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, (p, q) — поперечные координаты в плоскости приемника, угловые скобки означают среднее по ансамблю.

Если использовать модель Колмогорова–Обухова, приближение замороженной турбулентности и структурную фунцию в форме Рытова [8], среднее по ансамблю от экспоненты разности случайных фазовых набегов может быть представлено так:

$$\langle \exp[\psi(x,y,p,q) + \psi^*(\xi,\eta,p,q)]\rangle = \exp(-D_w/2) = \\ = \exp\left\{-[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{5/6}/\rho_0^{5/3}\right\}, \quad (4)$$

где D_w — волновая структурная функция для сферической волны, $\psi(x,y,p,q)$ — случайная компонента комплексной фазы сферической волны, распространяющейся от точки источника к точке приемника, ρ_0 — длина когерентности сферической волны, которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\rho_0 = (0.545\overline{C_n^2}k^2L)^{-3/5}.$$

Здесь $\overline{C_n^2}$ определяет среднюю структурную характеристику [10].

Определим парциальные функции когерентности и взаимной когерентности для каждой пары компонент мультигауссовского пучка [10]. Используя ранее введенные в (1), (2) и (3) обозначения, запишем:

$$\Gamma_{ij}^{1,1}(p,q,L) = \frac{k^2}{(2\pi L)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_i(x_i,y_i,0)u_j^*(x_j,y_j,0)\times \\ \times \exp\{\frac{ik}{2L}[(p-x_i)^2 + (q-y_i)^2 - (p-x_j)^2 - (q-y_j)^2]\}\times \\ \times \langle \exp[\psi(x_i,y_i,p,q) + \psi^*(x_j,y_j,p,q)]\rangle\, dx_i\, dy_i\, dx_j\, dy_j. \quad (5)$$

Средняя интенсивность мультигауссовского пучка в плоскости приема может быть выражена через сумму парциальных функций когерентности второго порядка следующим образом:

$$\langle I(p,q,L)\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{ij}^{1,1}(p,q,L). \quad (6)$$

Радиус компоненты мультигауссовского пучка на произвольном расстоянии от плоскости источников определим в аддитивной аппроксимации как

$$\omega = \omega_0(1+\tau_1+\tau_2)^{1/2}, \quad (7)$$

где $\tau_1 = 4L^2/(k^2\omega_0^4)$, $\tau_2 = 8L^2/(k^2\omega_0^2\rho_0^2)$. Грубо можно полагать, что τ_1 характеризует собственное дифракционное расплывание пучка, а τ_2 описывает дисторсию пучка в условиях турбулентности.

Выполнив интегрирование в правой части (5) с учетом аддитивного представления (7), получим

$$\Gamma_{ij}^{1,1}(p,q,L) = \\ = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\exp\left\{-\frac{2}{\omega^2}\left[\left(p-\frac{a_i+a_j}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{b_i+b_j}{2}\right)^2\right]\right\}\times \\ \times\exp\left\{\frac{ik\omega_0^2\tau_1}{2\omega^2L}[(a_i-a_j)(a_i+a_j-2p)+(b_i-b_j)(b_i+b_j-2q)]\right\}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{\tau_2}{2\omega^2}\left[(a_i-a_j)^2(b_i-b_j)^2\right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\omega^2}\left[\left(\frac{a_i-a_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_i-b_j}{2}\right)^2\right]\right\}. \quad (8)$$

При вычислении интеграла и выводе уравнения (8) был использован предложенный в [12] метод замены дробных степеней на целые значения.

2. Профили интенсивности и индекса мерцаний гауссовских пучков на реальной трассе

Усредненная по ансамблю интенсивность мультигауссовского пучка может быть представлена следующим образом:

$$\langle I(p,q,L)\rangle = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_{ii}^{1,1}(p,q,L) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\mathrm{Re}[\Gamma_{ij}^{1,1}(p,q,L)]. \quad (9)$$

Здесь разделены собственные вклады отдельных компонент и суперпозиционные вклады, стационарность которых определяется не только пространственной, но и временнóй когерентностью базисных пучков.

Пусть N=1, $a_1 = b_1 = 0$, средняя интенсивность уединенной компоненты составит

$$\langle I(p,q,L)\rangle = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\exp\left[-\frac{2(p^2+q^2)}{\omega^2}\right], \quad (10)$$

где ширина пучка определяется выражением (7). Записанное выше представление совпадает с результатами, полученными ранее в работе [13].

Полученные в эксперименте на реальной трассе типичные профили мгновенных и усредненных распределений интенсивности уединенных гауссовских пучков представлены на рис. 1. Верхняя группа рисунков отображает типичный мгновенный профиль и результат усреднения по 1000 отсчетам для пучка с исходным радиусом 1.75 см, нижняя группа — для пучка исходного радиуса 5 см, длина локационной трассы в одном направлении составляла 300 м, длина волны излучения 0.628 мкм. Следует отметить сильные возмущения мгновенного распределения интенсивности исходного пучка радиусом 5 см, анизотропию и срезанную вершину соответствующего усредненного распределения.

Рассмотрим случай распространения бинарного гауссовского пучка, состоящего из компонент совпадающей исходной ширины и расположеных симметрично относительно начала координат в плоскости источников $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 = -b_2 = b$. Соответствующая бинарному пучку средняя интенсивность имеет вид

$$\langle I(p,q,L)\rangle = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\exp\left\{-\frac{2[p^2+(q+b)^2]}{\omega^2}\right\}\times \\ \times\left\{1+\exp\left(\frac{8b}{\omega^2}q\right) + 2\exp\left[\frac{2b}{\omega^2}(2q-b\tau_2)\right]\cos\left[\frac{2bk\tau_1\omega_0^2}{\omega^2L}q\right]\right\}. \quad (11)$$

Мгновенный и усредненный по выборке в 2000 отсчетов профили бинарного пучка для случая расщепления исходного пучка на две компоненты различного радиуса представлены на рис. 2. Полученные компоненты обладают исходно высокой степенью временной и пространственной когерентности.

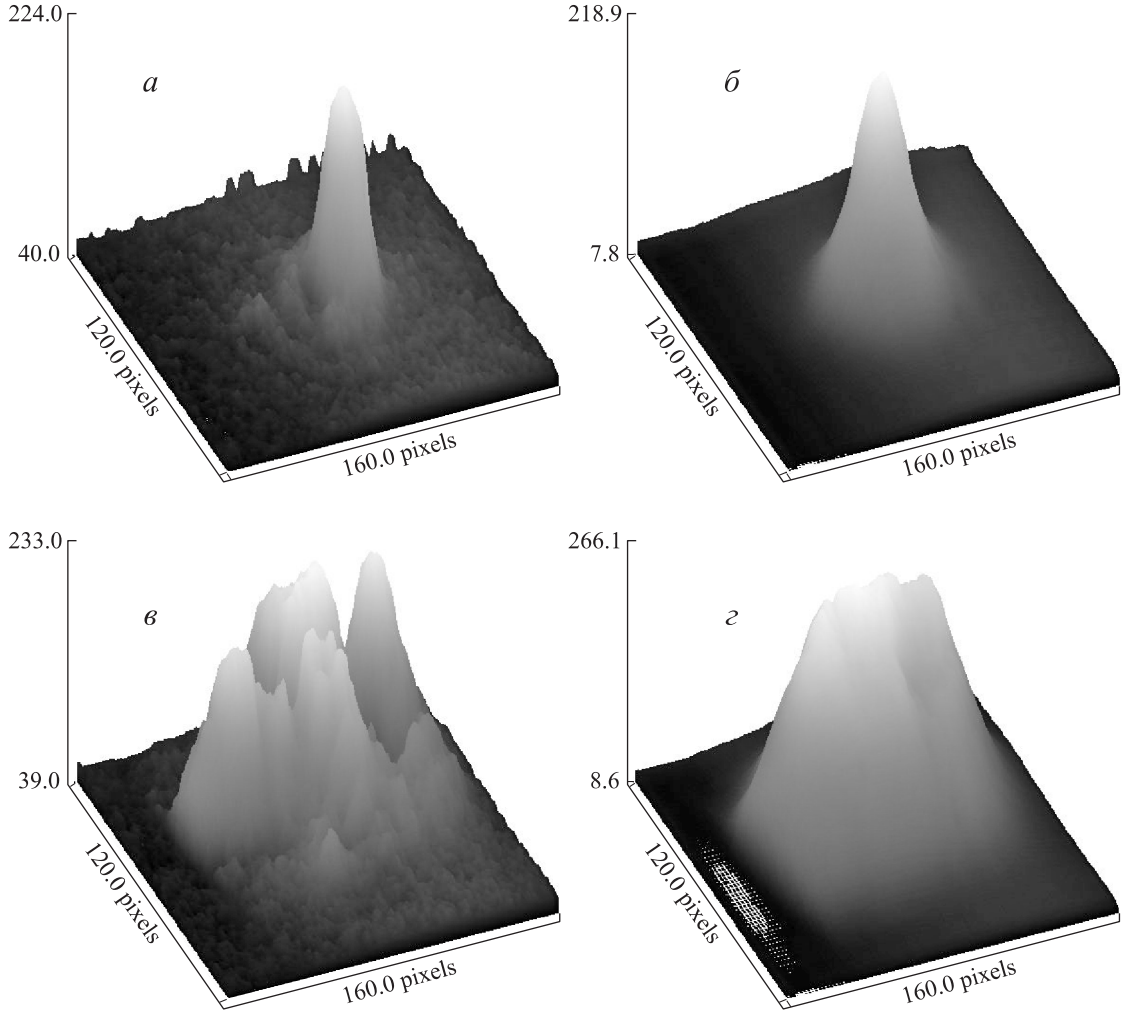

Рис. 1. Мгновенные значения (левый столбец) и усредненные по ансамблю реализаций (правый столбец) распределения интенсивности в плоскости регистрации пучка на реальной трассе. Верхняя строка: $\omega_0 = 1.75$ см, нижняя строка: $\omega_0 = 5.0$ см

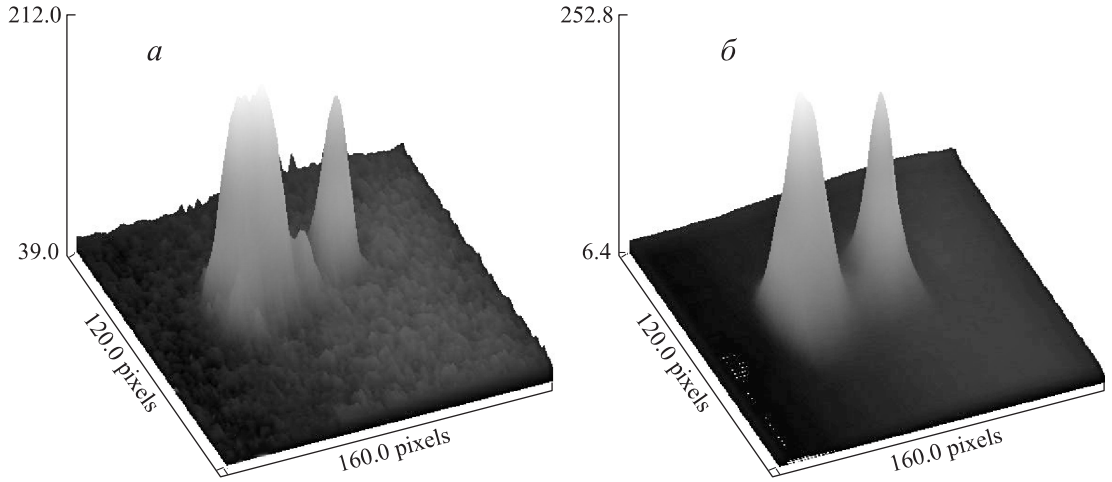

Рис. 2. Мгновенное значение (слева) и усредненное по ансамблю реализаций (справа) распределения интенсивности бинарного гауссовского пучка в плоскости регистрации на реальной трассе

Наблюдаемый на левом фрагменте рис. 2 интерференционный всплеск между исходными позициями гауссовских компонент может быть связан либо с сохранением высокой степени взаимной когерентности парциальных пучков, либо с аберрационными искажениями. Различие радиусов парциальных пучков в 2.4 раза (0.5 см и 1.2 см соответственно) было исходно заложено в постановке эксперимента для упрощения контроля за компонентами бинарного пучка.

Регистрируемые на выходе реальной трассы профи-

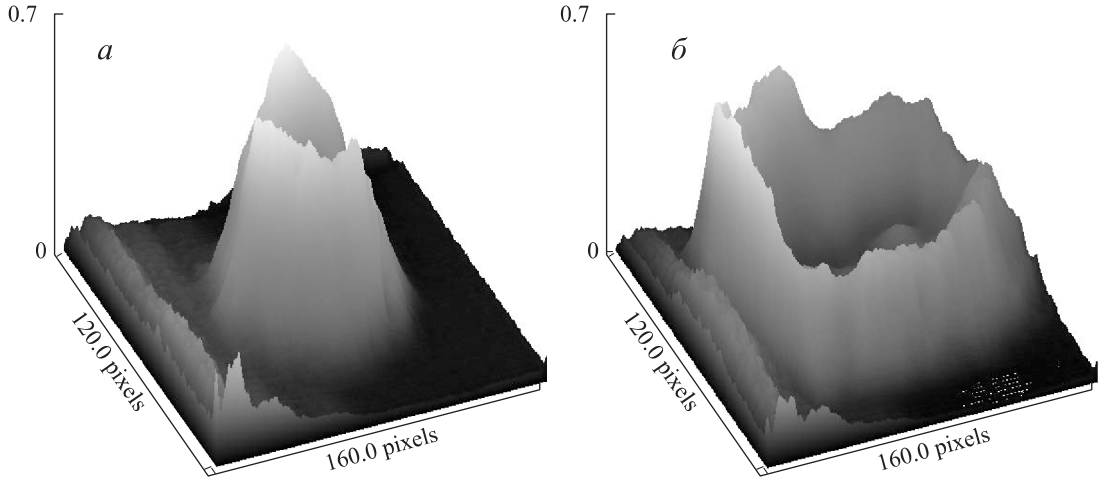

Рис. 3. Профили локальных индексов мерцаний для уединенных гауссовских пучков: $\omega_0 = 1.75$ см (*а*) и $\omega_0 = 5$ см (*б*)

ли усредненной интенсивности при более детальном анализе отличаются от исходных гауссовских распределений, прежде всего в области высоких значений интенсивности. Практически во всех рассмотренных случаях вершина распределения заострена (сколота), имеет разрывную производную. Еще сильнее выражены аномалии распределений в профиле локальных индексов мерцания (рис. 3). Здесь и далее под локальным понимается индекс мерцаний, вычисляемый в пределе одиночного пиксела регистрируемого изображения. Для пучков всех исследованных радиусов пространственное распределение индекса мерцаний имеет резкую и сильно выраженную периферийную область значений и несглаживаемые флуктуации меньшего уровня в параксиальных областях. Подобное поведение второго момента интенсивности типично для фрактальных структур, развивающихся в областях сильных турбулентных возмущений пучка.

Индекс мерцаний, определяемый следующим образом:

$$\sigma_I^2(\boldsymbol{r}, L) = \frac{\langle I^2(\boldsymbol{r}, L)\rangle}{\langle I(\boldsymbol{r}, L)\rangle^2} - 1, \tag{12}$$

представим через функции когерентности второго и четвертого порядков. Общий вид парциальной функции взаимной когерентности четвертого порядка многокомпонентного пучка на расстоянии L от плоскости источника определим следующим образом:

$$\Gamma^{2,2}_{ijnm}(\boldsymbol{r}, L) = u_i(\boldsymbol{r}_1, L) u_j^*(\boldsymbol{r}_2, L) u_n(\boldsymbol{r}_3, L) u_m^*(\boldsymbol{r}_4, L) \times \\ \times \langle \exp[\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}, L) + \psi^*(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}, L) + \psi(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}, L) + \psi^*(\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{r}, L)\rangle. \tag{13}$$

При анализе уединенного пучка функция когерентности четвертого порядка (13) соответствует второму моменту распределения интенсивности в плоскости регистрации и может быть представлена через функции когерентности второго порядка и усредненное по ансамблю значение флуктуаций фазы во втором и третьем борновских приближениях [10]:

$$\langle I^2(\boldsymbol{r}, L)\rangle = \Gamma^{2,2}(\boldsymbol{r}, L) = \\ = \langle I(\boldsymbol{r}, L)\rangle^2 \exp\{2\,\mathrm{Re}[E_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}) + E_3(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r})]\}, \tag{14}$$

где Re определяет действительную часть аргумента, E_2 и E_3 — статистические моменты второго порядка флуктуаций фазы, определяемые так:

$$E_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}) = \langle \psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}, L)\psi^*(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}, L)\rangle, \\ E_3(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}) = \langle \psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}, L)\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}, L)\rangle. \tag{15}$$

Индекс мерцаний может быть грубо расщеплен на продольную и поперечную компоненты:

$$\sigma_I^2(\boldsymbol{r}, L) = \sigma_{I,r}^2(\boldsymbol{r}, L) + \sigma_{I,L}^2(\boldsymbol{0}, L). \tag{16}$$

Разделение индекса мерцаний на продольную и поперечную (относительно направления распространения пучка) компоненты выполнено исключительно для удобства обсуждения экспериментальных характеристик. Подобное разделение детально рассматривается в работе [9] для гауссовских пучков и различных моделей турбулентной среды. Например, для модели турбулентной атмосферы Колмогорова поперечная компонента индекса мерцаний может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\sigma_{I,r}^2(\boldsymbol{r}, L) \sim \frac{r^2}{w^2}. \tag{17}$$

Здесь w — эффективный радиус парциального пучка на расстоянии L от источника.

Для всех применяемых моделей турбулентной атмосферы (Колмогорова, Кармана или расширенной модели Эндрюса) в режимах как слабой, так и сильной турбулентности предсказанные квадратичные зависимости поперечной составляющей индекса мерцаний уединенного гауссовского пучка не согласуются с наблюдаемыми резкими периферийными возрастаниями флуктуаций интенсивности на реальной трассе. Сводная таблица зависимости индекса мерцаний от параметров среды и структуры трассы приведена в [10].

3. Профили интенсивности и индекса мерцаний уединенного пучка на модельной трассе

Пространственные распределения интенсивности и индекса мерцаний в дальней зоне при распространении пучка в среде с регулируемыми турбулентными возмущениями исследовались для термически нестационарных сред. Подобный режим создания турбулентных потоков имеет высокую степень повторяемости и не

порождает паразитных течений вне зоны модельной трассы, как это характерно для возбуждения турбулентности при ветровой нагрузке.

Серия экспериментов выполнена на модельной горизонтальной трассе, оснащенной снизу нагревательным элементом. Длина трассы определяется углами наклона «гоняющих» плоских зеркал и составляет 7 м. Создаваемые на модельной трассе условия обеспечивают режим сильных флуктуаций. Для исключения неконтролируемых температурных и аэродинамических воздействий рабочая зона заключена в цилиндрическую трубу диаметром 0.2 м со щелевыми окнами по торцам. Источником излучения служит твердотельный лазер, работающий на второй гармонике и создающий гауссовский пучок на длине волны 0.48 мкм с радиусом 0.5 см.

Динамика распределения интенсивности на выходе трассы регистрировалась высокоскоростной камерой PULNiX-1300, позволяющей при разрешении рабочего поля 320×240 точек и 10-битном кодировании интенсивности выполнять видеофиксацию с частотой кадров 400 Гц и выше без дополнительного сжатия и фильтрации. Длительность отдельной выборки составляла не менее 20 с, шаг дискретизации 2.5 мкс, рабочий размер кадра 320×240 пикс. при 8-битной оцифровке локальной интенсивности, что соответствует 8000 кадров для одной выборки.

На начальном этапе проведения экспериментов на модельной трассе авторами работы [11] выполнялись оценки статистических характеристик флуктуаций пучка в аналогичных экспериментальных условиях, на

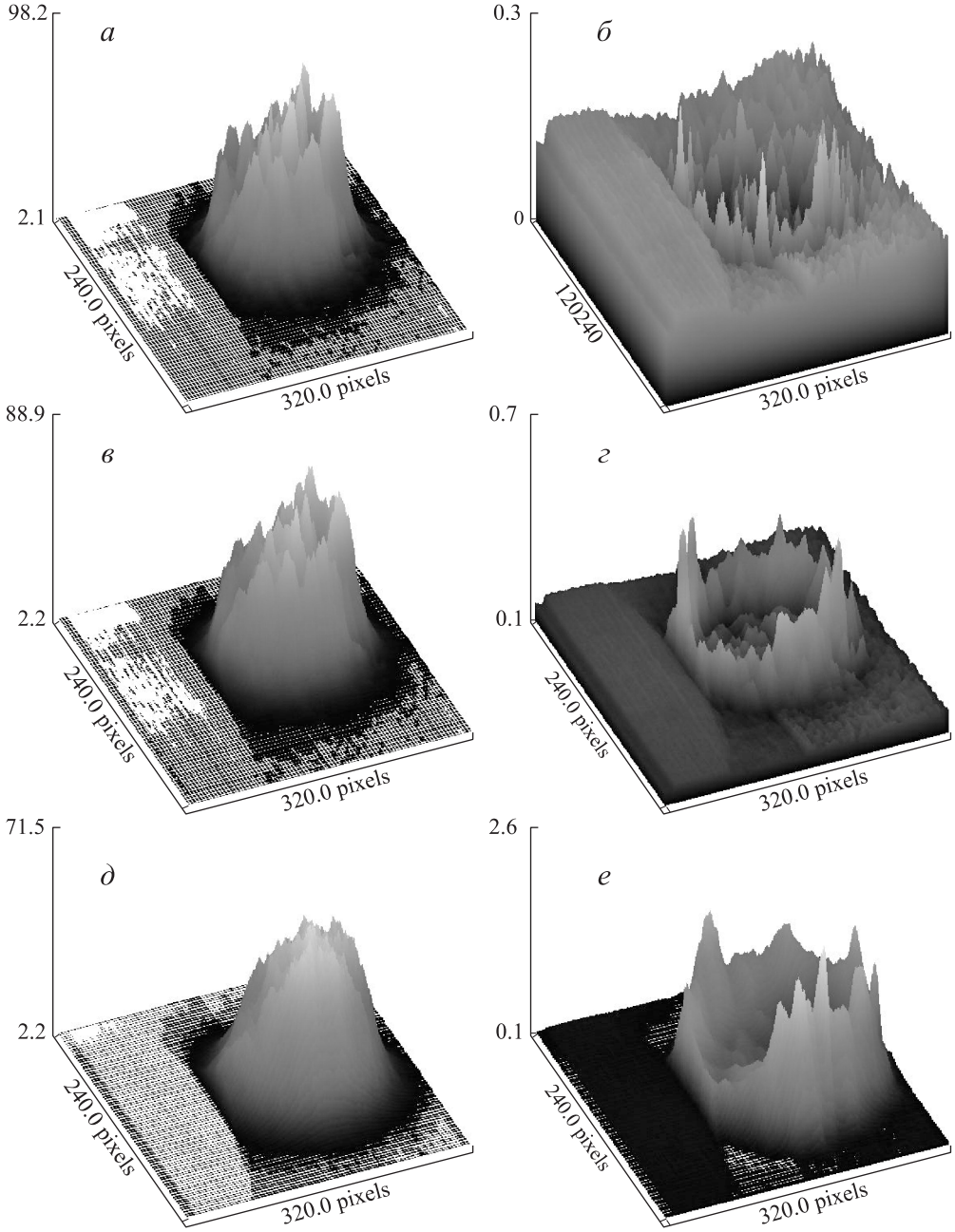

Рис. 4. Профили распределения усредненной интенсивности (*а, в, д*) и индекса мерцаний (*б, г, е*) для различных градиентов температуры (500 град/м (*а, б*), 700 град/м (*в, г*), 1500 град/м (*д, е*))

основе которых были вычислены структурные характеристики, соответствующие различной степени развития сильной турбулентности. Для используемых ниже условий на модельной трассе порядки значений структурных характеристик следующие:

$C_n^2 \sim 10^{-10}$ см$^{-2/3}$, градиент температуры менее 350 град/м;

$C_n^2 \sim 10^{-9}$ см$^{-2/3}$, градиент температуры лежит в диапазоне значений от 500 до 750 град/м;

$C_n^2 \sim 10^{-8}$ см$^{-2/3}$, градиент температуры более 1000 град/м.

Далее при описании режимов регистрации указываются только значения градиентов темпаратуры.

Последовательность кадров распределения интенсивности рассматривалась как статистический ансамбль, для каждого из пикселей которого вычислялись первый и второй моменты функции распределения интенсивности. Фактически такие значения соответствуют переходу к предельно малым значениям апертур. На рис. 4 представлены профили интенсивности и индекса мерцаний для трех режимов нагрева нижней плоскости модельной трассы — для градиента температур 500 град/м (верхний ряд), 750 град/м (средний ряд) и 1500 град/м (нижний ряд). Высокий периферийный уровень индекса мерцаний верхнего правого фрагмента рис. 4 соответствует флуктуациям фонового сигнала регистрирующей матрицы. Практически полное отсутствие фона на левых профилях распределений связано с процедурой исключения минимального фонового значения затененной периферии.

Следует отметить высокую степень пространственной неоднородности первого и второго моментов, что делает их практически непригодными для оценки качества открытого оптического канала передачи данных в условиях сильной турбулентности. Особенность представленных профилей индекса мерцаний — хорошо выраженная «корона» высокого уровня флуктуаций. Наблюдаемая корона существенно отличается по высоте (относительно центральной части), крутизне и ширине по сравнению с описанным в [14] явлением возрастания индекса мерцаний в области высокого градиента интенсивности. Формирование резко выраженной короны для гауссовского профиля пучка в исследованных экспериментальных режимах может быть связано с расходимостью соответствующих корреляционных интегралов, типичной при формирования каустик [15] или для модуляции фазы фрактального типа.

Представленные на рис. 5 сечения центральных областей профилей интенсивности и индекса мерцаний (без захвата области короны) подтверждают высказанную ранее гипотезу о малой информативности регистрируемых в экспериментах значений индекса мерцаний, поскольку результирующая величина сильно зависит от апертуры регистратора и его положения относительно центра формируемого пятна. Наглядные фрактальные свойства экспериментально регистрируемых профилей интенсивности и ее второго момента исключают применение прямых корреляционных методов для исследования подобных распределений. Единственным корректным шагом в сложившейся ситуации может стать анализ статистического ансамбля фрактальных распределений интенсивности методами неравновесной статистики и подбор адекватных физическому процессу макроскопических параметров, однозначно характеризующих состояние ансамбля.

4. Профили распределения интенсивности и индекса мерцаний дифракталов

Исходно дифракталы определяются как волны, прошедшие или отразившиеся от фрактальной структуры [16]. Взаимодействие с фрактальной структурой «от-

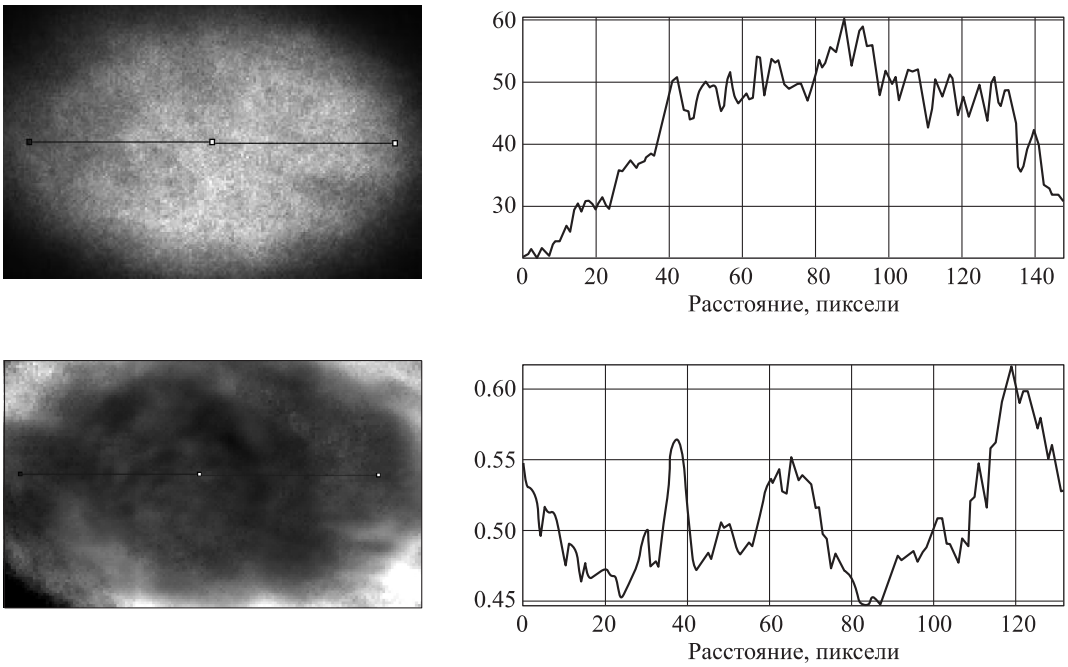

Рис. 5. Усредненные по ансамблю в 8000 кадров распределения интенсивности (верхний ряд) и индекса мерцаний (нижний ряд) и соответствующие им центральные горизонтальные сечения

печатывается» на амплитудной или фазовой модуляции исходной волны на всем диапазоне допустимых масштабов. Особенность дифрактальной модуляции полностью исключает применение приближений геометрической оптики на любых масштабах анализа задач распространения. Зачастую дифрактальный режим выделяют как особый в задачах распространения или рассеяния, допуская разрывы поверхности волнового фронта.

Для исключения краевых эффектов, кривизны волнового фронта падающей волны и влияния модуляции амплитуды исходного пучка рассмотрим прохождение плоской волны через фазомодулирующий экран с одномерной фрактальной пространственной модуляцией оптической плотности $h(x)$. Волну, распространяющуюся вдоль направления z, зададим в виде

$$u(x,z) = e^{ikz}(z<0). \tag{18}$$

На выходе фазового экрана волна имеет вид

$$u(x,0^+) = e^{ikh(x)+i\varphi_0}. \tag{19}$$

После фазовой пластинки $(z>0)$ волна распространяется свободно, и соответствующая функция $u(x,z)$ может быть вычислена стандартными методами теории дифракции. Соответственно могут быть определены функции когерентности второго и четвертого порядков прошедшей волны в дальней зоне дифракции, первый и второй моменты распределения интенсивности, индекс мерцаний:

$$I(x,z) \equiv |u(x,z)|^2, \quad I_2(x,z) \equiv \langle |u(x,z)|^4\rangle. \tag{20}$$

Пусть профиль модуляции волнового фронта $h(x)$ при $z=0^+$ представляет собой случайную гауссовскую функцию аргумента x [17]. Это предположение необходимо для упрощения аналитических преобразований на первом этапе оценок моментов распределений интенсивности и использования для вычислений линейных функционалов G от $h(x)$ соотношений вида

$$\langle e^{iG(h(x))}\rangle = e^{i\langle G\rangle} e^{-(\langle G^2\rangle - \langle G\rangle^2)/2}. \tag{21}$$

Для определения $\langle G\rangle$ и $\langle G^2\rangle$ в типичных ситуациях требовалось бы нахождение средних $\langle h\rangle$ и корреляции $\langle h(x_1)h(x_2)\rangle$. Но $h(x)$, рассматриваемая здесь как фрактальная функция, имеет бесконечно большие значения корреляции и ковариации $\langle h^2\rangle$.

Для описания $h(x)$ используем пространственный спектр $\overline{H}(\phi)$, вводя степенную модель аппроксимации пространственной спектральной плотности, типичную для фрактальных функций:

$$\overline{H}(\phi) = T/|\phi|^\alpha \quad (1<\alpha<3), \tag{22}$$

где T — топотеза, $\alpha = 5-2D$, D — фрактальная размерность функции $h(x)$.

Как следует из (22), в общем случае автокорреляционная функция $h(x)$, связанная с фурье-отображением $\overline{H}(\phi)$ соотношением Винера–Хинчина, в частности $\langle h^2\rangle$, бесконечна в силу степенной аппроксимации спектральной плотности. Однако статистические свойства флуктуаций поля дифрактальных структур могут быть получены из ряда вариативных интегральных характеристик. Используя соотношение (21), получим для среднеквадратичного значения вариации фазы волны на выходе фрактального экрана

$$\langle (h(x+\varepsilon)-h(x))^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, \overline{H}(\varphi)(e^{i\varphi\varepsilon}-1) = \\ = \frac{2T}{\alpha-1}\sin\frac{\pi}{2}(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)|\varepsilon|^{\alpha-1}. \tag{23}$$

Согласно свойствам топотезы фрактальной функции [18], должно выпоняться условие

$$\langle (h(x+T)-h(x))^2\rangle/T^2 \equiv 1. \tag{24}$$

При относительно малых значениях аргумента тригонометрической функции в (23) справедливо соотношение, которое будет использовано в дальнейшем при вычислении функций когерентности второго и четвертого порядков для изучаемых дифракталов:

$$\langle (h(x+\varepsilon)-h(x))^2\rangle = T^{2(D-1)}|\varepsilon|^{4-2D}. \tag{25}$$

Формальная простота постановки задачи о распространении фазово-фрактально модулированной волны не имеет простого продолжения в стандартной форме использования принципа Гюйгенса–Френеля и вычисления пространственного фурье-отображения. Расколотый волновой фронт, приводящий к расхождению интегралов, можно частично склеить, используя параксиальную аппроксимацию. Параксиальное приближение справедливо в ограниченной области значений градиента вариации оптической плотности, и в таких условиях возможна запись поля волны за модулирующим экраном:

$$u(x,L) = e^{i(kL-\pi/4)}\left(\frac{k}{2\pi L}\right)^{1/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik\left[h(\xi)+(x-\xi)^2/2L\right]\right) d\xi, \tag{26}$$

где L — расстояние от фазового экрана до плоскости регистрации распределения интенсивности.

Функцию когерентности второго порядка получим в результате интегрирования

$$\langle u(x,L)u^*(x+\varepsilon,L)\rangle = \frac{k}{2\pi L} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle \exp\left[h(x_1)-h(x_2)\right]\rangle\, e^{ik[(x-x_1)^2-(x+\varepsilon-x_2)^2]/2L}\, dx_1\, dx_2 = \\ = \exp\left[\frac{-k^2T^{2(D-1)}|\varepsilon|^{2(2-D)}}{2}\right]. \tag{27}$$

Результат интегрирования (27) не зависит от расстояния до модулирующего экрана и на оси составляет $\langle |\psi|^2\rangle = \langle I\rangle = 1$, что согласуется с законом сохранения энергии.

Угловой спектр функции когерентности второго порядка можно получить в результате фурье-отображения (27):

$$P_I(\phi) = \frac{1}{2\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(kT)^{2(D-1)}|\varepsilon|^{2(2-D)}}{2}\right] e^{i\phi\varepsilon/k}\, d\varepsilon. \tag{28}$$

В пределах малых и больших углов отклонения справедливы аппроксимации [19]

$$kP_I(\phi) \to \begin{cases} \dfrac{2^{1/[2(2-D)]}\Gamma\left[1+\frac{1}{2(2-D)}\right]}{\pi(kT)^{(D-1)/(2-D)}} \\ \qquad (|\phi| \to 0), \\ (kT)^{2(D-1)}\sin[\pi(2-D)]\Gamma\left[\dfrac{5-2D}{2\pi|\phi/k|^{5-2D}}\right] \\ \qquad (|\phi| \to \infty). \end{cases} \tag{29}$$

Отметим, что полученный угловой спектр имеет острую вершину в направлении распространения волны, что зафиксировано экспериментально для пучков на реальных и модельных трассах. Форма зависимости спектра флуктуаций интенсивности при малых углах позволяет ввести характерный масштаб пространственной частоты дифрагировавших волн

$$Q = \left[\frac{2\pi T}{\lambda}\right]^{(D-1)/(2-D)}. \tag{30}$$

Для определения функции когерентности четвертого порядка по полю или второго порядка по интенсивности требуется вычисление среднего по ансамблю значения разнесенных фазовых набегов следующего вида, выполняемое с использованием ранее сформулированного условия (21) и соотношений для структурной фазовой функции дифрактала:

$$\begin{aligned} &\langle (h(x_1)+h(x_2)-h(x_3)-h(x_4))^2\rangle = \\ &= T^{2(D-1)}\big(|x_1-x_3|^{4-2D}+|x_2-x_4|^{4-2D}+|x_2-x_3|^{4-2D}+ \\ &\quad +|x_1-x_4|^{4-2D}-|x_1-x_2|^{4-2D}-|x_3-x_4|^{4-2D}\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Введем безразмерный параметр

$$\zeta \equiv \frac{kL(kT)^{(D-1)/(2-D)}}{2^{1/(4-2D)}} = \frac{kLQ}{2^{1/(4-2D)}}. \tag{32}$$

После подстановки усредненного по ансамблю фазового набега в соответствующий корреляционный интеграл получим в ближней и дальней зонах распростанения дифрактала:

$$\begin{aligned} &I_2^{\text{near}}(\zeta) = 1 + \frac{2^{5-2D}}{\sqrt{\pi}}\zeta^{2-D}\Gamma\left[\frac{5-2D}{2}\right] + O\big(\zeta^{4-2D}\big), \quad \zeta \to 0, \\ &I_2^{\text{far}}(\zeta) \to 2 - \frac{A(D)}{\zeta}, \quad \zeta \to \infty, \quad D > 1.5, \end{aligned} \tag{33}$$

Зависящий от фрактальной размерности модулирующей функции множитель $A(D)$ может быть аналитически выражен в исключительных случаях, например при $D = 1.5$. Предельные значения функции когерентности четвертого порядка для поля дифрактала составляют в ближней и дальней зонах соответственно:

$$I_2(\zeta) = \begin{cases} 1 & (\zeta \to 0), \\ 2 & (\zeta \to \infty). \end{cases} \tag{34}$$

Интересен вопрос о монотонности функции когерентности четвертого порядка, прежде всего для объяснения области короны в пространственном профиле индекса мерцаний. Для диапазона значений $D < 1.5$ возможно формирование максимума значения флуктуаций интенсивности в области промежуточных значений ζ. Однако этот режим не следует смешивать с процессами динамической фокусировки, поскольку фрактальный волновой фронт, не будучи дифференцируемым, не имеет нормали.

Индекс мерцаний в рассмотренном монофрактальном приближении составляет $I_2(\zeta) - 1$, минимален в приосевой области независимо от расстояния между фазовым экраном и плоскостью приемника, при отклонении от оси возрастает. Характер изменений индекса мерцаний будет зависеть от значения фрактальной размерности модулирующей функции, исходной кривизны волнового фронта, профиля амплитудной модуляции реального пучка.

Фрактальное описание физических свойств среды получило за последнее десятиление широкое распространение в задачах радиофизики и оптики. Интерес к фрактальным и мультифрактальным процессам связан в первую очередь с неоднократно наблюдавшимся в экспериментах «переносом» значения фрактальной размерности пространственно-временных структур неоднородной среды на фрактальные свойства флуктуаций интенсивности пучка.

Заключение

Представленные результаты экспериментального исследования локализованных пространственных профилей первого и второго моментов распределения интенсивности гауссовских пучков на реальной и модельной трассах позволяют говорить о недостаточной корректности использования локального и среднего по произвольно расположенным апертурам значения индекса мерцаний для оценки качества открытого оптического канала передачи данных.

Противоречия между традиционной теоретической моделью, оперирующей понятием неразрывного волнового фронта, и экспериментальными результатами на реальной и модельной оптических трассах в описании структуры пространственных искажений гауссовских и мультигауссовских пучков в условиях сильной турбулентности могут быть сняты при допущении сильной локальной модуляции оптической плотности, приводящей к разрыву волнового фронта.

Экспериментально наблюдаемое резкое пространственное разделение профиля индекса мерцаний, регистрируемого как на модельной, так и на реальной трассе, на высокоуровневую корону, окружающую область засветки, и кратер внутри области с несглаживаемыми пространственными модуляциями значений свидетельствуют о развитой фрактальной или мультифрактальной структуре искажений фазы пучка при распространении в сильно турбулизованной среде [20]. Простейшая модель статистики дифрактала подтверждает наблюдаемые особенности в приосевой и периферийной областях пучка.

Рассмотренная теоретическая модель ограничена монофрактальным искажением волнового фронта. В условиях развитой турбулентности принято использовать мультифрактальные модели, в которых представленные выше методы могут быть использованы лишь для грубых оценок флуктуационных характерстик поля излучения. При интерпретации результатов следует

учитывать еще один значимый источник фрактальных искажений волнового фронта в открытых оптических каналах передачи данных — исходный профиль пучка, формируемый в нестабильных режимах генерации [21].

Перенос фрактальных и мультифрактальных характеристик с неравновесно-статистических свойств среды распространения на пространственно-временные статистические характеристики распространяющегося пучка позволяет использовать для описания флуктуационных процессов неэкстенсивные характеристики, такие как энтропия Реньи и Тсаллиса, что существенно дополняет аналитический аппарат задач распространения излучения в сильно неравновесных средах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-02-00461).

Список литературы

1. *Andrews L.C., Phillips R.L., Hopen C.Y.* Laser Beam Scintillation with Applications. SPIE Press, 2001.
2. *Арсеньян Т.И., Бабанина М.И., Сухарева Н.А., Сухоруков А.П.* // Журн. радиоэлектроники. 2013. № 7.
3. *Арсеньян Т.И., Сухарева Н.А., Сухоруков А.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2014. № 1. С. 51 (*Arsenyan T.I., Suhareva N.A., Sukhorukov A.P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2011. **69**, N 1. P. 55).
4. *Wallace J., Itzkan I., Camm J.* // J. Opt. Soc. Am. 1974. **64**. P. 1123.
5. *Zhang Y., Song Y., Chen Z.* et al. // Opt. Lett. 2007, **32**. P. 292.
6. *Xiuxiang Chu, Zejin Liu, Yi Wu.* // JOSA A. 2008 **25**, N 1. P. 74.
7. *Кравцов Ю.А., Фейзулин З.И.* // Изв. вузов. Сер. Радиофиз. 1967. **10**, № 1. С. 886.
8. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М., 1978.
9. *Miller W.B., Ricklin J.C., Andrews L.C.* // J. Opt. Soc. Am. 1994. **A 11**. P. 2719.
10. *Andrews L.C., Phillips R.L.* Laser Beam Propagation through Random Media. SPIE Press, 2005.
11. *Арсеньян Т.И.* и др. // Радиотехника. 2005. № 1. С. 30.
12. *Yura H.T., Hanson S.G.* // JOSA A. 1987. **4**, N 10. P. 1931.
13. *Eyyuboglu H.T., Baykal Y.* // Optics Express. 2004. **12**, N 20. P. 4659.
14. *Зуев В.Е.* и др. Оптика турбулентной атмосферы. Л., 1988.
15. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980.
16. *Berry M.V.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1979. **12**. P. 781.
17. *Rice S.O.* // Bell. Syst. Tech. J. 1945. **24**. P. 46.
18. *Berry M.V., Hannay J.H.* // Nature. 1978. **273**. P. 573.
19. *Berry M.V.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1977 **10**, N 12. P. 2061.
20. *Арсеньян Т.И.* и др. // Оптика атмосферы и океана. 2006. **19**, № 12. С. 1013.
21. *Berry M.V.* // Optics Communications. 2001. **200**. P. 321.

Scintillation index of the Gaussian beams propagated through the paths with strong turbulence

T. I. Arsenyan, N. A. Suhareva[a], A. P. Sukhorukov, A. A. Chugunov

Department of Photonics and Physics of Microwaves, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] suhareva@phys.msu.ru.

Theoretical and experimental studies of the local statistical characteristics of Gaussian beams propagated through the paths with strong turbulence were carried out and their results are presented. It is ascertained that the applicability of the scintillation index meanings are substantially limited for the assessment of the performance quality of the optical data transmitting channels. On the basis of the experimental data got under different propagation conditions the peculiarities of the localized intensity distributions and those of the scintillation index are revealed.

Keywords: open optical channel, scintillation index, laser beam, turbulence.
PACS: 42.25.Dd, 42.68.Bz.
Received 12 January 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2014).

Сведения об авторах

1. Арсеньян Татьяна Ишхановна — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-15-86, e-mail: arsenyan@mail.ru.
2. Сухарева Наталия Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-11-14, e-mail: suhareva@phys.msu.ru.
3. Сухоруков Анатолий Петрович — доктор физ.-мат. наук, профессор.
4. Чугунов Александр Аркадьевич — студент; тел.: (495) 939-46-01, e-mail: chugunov@physics.msu.ru.