

## РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

**Аналитическое решение, описывающее распространение гауссова пучка в неоднородном газе**О. А. Николаева<sup>а</sup>, Ф. В. Шугаев<sup>б</sup>*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: <sup>а</sup>o.anikolaeva@yandex.ru, <sup>б</sup>shugaev@phys.msu.ru*

Статья поступила 17.04.2014, подписана в печать 21.06.2014.

Получено аналитическое решение параболического уравнения, которое описывает распространение гауссова пучка в неоднородной атмосфере.

*Ключевые слова:* гауссов пучок, метод параболического уравнения, неоднородный газ.

УДК: 535.135. PACS: 42.25 Dd, 42.68 Ay, 42.68 Vz.

**Введение**

Анализ распространения гауссова пучка в неоднородной атмосфере находит применение в задачах связи со спутниками Земли и в других вопросах. Среди существующих методов наиболее точным является метод параболического уравнения. Численные расчеты на основе этого метода были выполнены ранее. Представляет интерес получение соответствующего решения в аналитическом виде, которое, насколько нам известно, отсутствует в литературе.

**1. Постановка задачи**

Распространение волн в неоднородной среде и, в частности, в турбулентной атмосфере рассмотрено в [1, 2]. Особый интерес представляют лазерные пучки. Для описания лазерных пучков обычно используется парааксиальное приближение. Как показано в [3, 4], простые выражения для параметров гауссова пучка могут быть получены в предположении, что векторный потенциал  $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_z\}$  электромагнитного поля линейно поляризован. Пусть гауссов пучок распространяется в вакууме вдоль оси  $z$ . Опуская множитель  $\exp(i\omega t)$ , имеем

$$A_2 = A_z = 0, \quad A_1 = A(\mathbf{r}) = e^{-ikz} \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, z\},$$

где  $\phi(\mathbf{r})$  — медленно меняющаяся функция.

Введем малый параметр  $\varepsilon = \lambda/\omega_0$ , где  $\lambda$  — длина волны,  $\omega_0$  — диаметр перетяжки пучка. Разлагая функцию  $\phi(\mathbf{r})$  в ряд по малому параметру  $\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \varepsilon^2 \phi_1(\mathbf{r}) + \dots$ , получим для первого члена следующее уравнение [4]:

$$\Delta_2 \phi_0 = 2ik \frac{\partial \phi_0}{\partial z}, \quad E_1 = -ike^{-ikz} \phi_0,$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2},$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $E_1$  — компонента электрического поля.

Пусть гауссов пучок распространяется в неоднородной атмосфере. Наиболее точным среди существующих методов расчета является метод параболического

уравнения [5, 6]. Основное используемое предположение состоит в том, что длина волны пучка много меньше характерного масштаба неоднородности. Для напряженности  $E$  электрического поля можно записать

$$E(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r}) \exp(i\omega t), \quad v(\mathbf{r}) = u(\mathbf{x}) \exp(-ikz),$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}.$$

При этом выполняется следующее условие:

$$\left| k \frac{\partial u}{\partial z} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|.$$

В результате переходим к следующему линейному параболическому уравнению [5, 6]:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_2 u + ikn_1 u, \quad n_1(\mathbf{x}, z) = n(\mathbf{x}, z) - 1, \quad (1)$$

где  $n$  — показатель преломления.

Анализ линейно поляризованных пучков, а также пучков с круговой поляризацией и их распространения в неоднородном газе дан в работах [7–16]. Применение лазерного пучка для исследования структуры ударной волны в воздухе описано в [17].

Цель настоящей работы состоит в получении аналитического решения уравнения (1). Линейные параболические системы, коэффициенты в которых зависят от координат и времени, исследованы в работах [18, 19]. Задача сводится к решению интегрального уравнения типа Вольтерра. Предварительно найдется приближенное решение (параметрикс). Наше исследование опирается на результаты этих работ.

**2. Построение решения**

Понятие «параметрикса» было введено в работах Э.Э. Леви и Д. Гильберта [20]. Параметрикс есть первое приближение, которое не удовлетворяет данному уравнению, но позволяет построить фундаментальное решение. В случае уравнения (1) параметрикс выражается следующим образом:

$$Y(\mathbf{x}, z; \boldsymbol{\xi}, \zeta) = -\frac{ik}{2\pi(z-\zeta)} \exp\left[\frac{ik}{2(z-\zeta)} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2\right],$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2\}.$$

Фундаментальное решение  $\Gamma$  ищем в виде

$$\Gamma(\mathbf{x}, z; \boldsymbol{\xi}, \zeta) = Y(\mathbf{x}, z; \boldsymbol{\xi}, \zeta) + \int_{\zeta}^z d\sigma \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta} Y(\mathbf{x}, z; \boldsymbol{\eta}, \sigma) \Phi(\boldsymbol{\eta}, \sigma; \boldsymbol{\xi}, \zeta). \quad (2)$$

Из уравнения (2) и условия

$$L\Gamma(\mathbf{x}, z; \boldsymbol{\xi}, \zeta) = 0, \quad L = \frac{i}{2k} \Delta_2 + ikn_1(x_1, x_2, z) - \frac{\partial}{\partial z}$$

находим

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}, \sigma; \boldsymbol{\xi}, \zeta) = LY(\boldsymbol{\eta}, \sigma; \boldsymbol{\xi}, \zeta) + \int_{\zeta}^{\sigma} d\varepsilon \int_{R^2} d\mathbf{y} LY(\boldsymbol{\eta}, \sigma; \mathbf{y}, \varepsilon) \Phi(\mathbf{y}, \varepsilon; \boldsymbol{\xi}, \zeta), \quad \mathbf{y} = \{y_1, y_2\}. \quad (3)$$

Формула (3) представляет собой уравнение Вольтерра, ядром которого служит выражение  $LY(\boldsymbol{\eta}, \sigma; \mathbf{y}, \varepsilon)$ . Мы можем записать формальное решение уравнения (3), меняя при этом обозначения, в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1; \boldsymbol{\xi}, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (LY)_n(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1; \boldsymbol{\xi}, \zeta), \quad (4) \\ (LY)_1 &= LY, \\ (LY)_{n+1}(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1; \boldsymbol{\xi}, \zeta) &= \int_{\zeta}^{\sigma_1} d\varepsilon \int_{R^2} d\mathbf{y} LY(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1; \mathbf{y}, \varepsilon) (LY)_n(\mathbf{y}, \varepsilon; \boldsymbol{\xi}, \zeta). \end{aligned}$$

Согласно результатам работы [18], фундаментальное решение уравнения (1) может быть построено, если коэффициент при неизвестной функции непрерывен и в рассматриваемой области выполняется условие

$$|n_1(\mathbf{x}, z) - n_1(\mathbf{x}_0, z)| \leq B|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{\beta}, \quad 0 < \beta < 1, \quad B = \text{const}.$$

Решение задачи с начальными данными на плоскости  $z = 0$  таково:

$$u(\mathbf{x}, z) = \int_{R^2} \Gamma(\mathbf{x}, z; \boldsymbol{\xi}, 0) \varphi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}). \quad (5)$$

С учетом формул (2), (3) функция  $\Phi(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1; \boldsymbol{\xi}, 0)$  представима в виде ряда

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1; \boldsymbol{\xi}, 0) &= \frac{f}{\sigma_1} n_1(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1) \exp\left(\frac{ik}{2} \alpha_1\right) + \\ &+ f^2 n_1(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1) \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta}_2 \frac{n_1(\boldsymbol{\eta}_2, \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)\sigma_2} \exp\left(\frac{ik}{2} \alpha_2\right) + \dots + \\ &+ f^n n_1(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1) \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} d\sigma_n \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta}_2 \dots \times \\ &\times \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta}_n \frac{n_1(\boldsymbol{\eta}_2, \sigma_2) \dots n_1(\boldsymbol{\eta}_n, \sigma_n)}{(\sigma_1 - \sigma_2) \dots (\sigma_{n-1} - \sigma_n)\sigma_n} \exp\left(\frac{ik}{2} \alpha_n\right) + \dots, \\ f &= \frac{k^2}{2\pi}, \quad \alpha_1 = \frac{|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\xi}|^2}{\sigma_1}, \quad \alpha_2 = \frac{|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^2}{\sigma_1 - \sigma_2} + \frac{|\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\xi}|^2}{\sigma_2}, \end{aligned}$$

$$\dots, \quad \alpha_n = \frac{|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^2}{\sigma_1 - \sigma_2} + \dots + \frac{|\boldsymbol{\eta}_{n-1} - \boldsymbol{\eta}_n|^2}{\sigma_{n-1} - \sigma_n} + \frac{|\boldsymbol{\eta}_n - \boldsymbol{\xi}|^2}{\sigma_n}. \quad (6)$$

Принимая во внимание (2), (6), получаем выражение для фундаментального решения уравнения (1)

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}, z; \boldsymbol{\xi}, 0) &= -\frac{ik}{2\pi z} \exp\left(\frac{ik}{2} b\right) - \\ &- i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \int_0^z d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} d\sigma_n \times \\ &\times \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta}_1 \dots \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta}_n a_n \exp\left(\frac{ik}{2} \beta_n\right), \\ a_n &= \frac{n_1(\boldsymbol{\eta}_1, \sigma_1) n_1(\boldsymbol{\eta}_2, \sigma_2) \dots n_1(\boldsymbol{\eta}_n, \sigma_n)}{(z - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2) \dots (\sigma_{n-1} - \sigma_n)\sigma_n}, \\ \beta_n &= \alpha_n + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_1|^2}{z - \sigma_1}, \quad b = \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2}{z}. \quad (7) \end{aligned}$$

Пусть функция  $n_1(\mathbf{x}, z)$  ограничена:  $|n_1(\mathbf{x}, z)| \leq M$ ,  $M > 0$ . Докажем сходимость ряда (7). Используя вышеприведенное неравенство, найдем, что для  $n$ -го члена  $b_n$  ряда справедлива оценка

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \frac{k^{2n+1}}{(2\pi)^{n+1}} M^n |I_n|, \\ I_n &= \int_0^z d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} d\sigma_n \times \\ &\times \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta}_1 \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta}_2 \dots \int_{R^2} d\boldsymbol{\eta}_n \exp\left(\frac{ik}{2} \beta_n\right) / S, \\ S &= (z - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2) \dots (\sigma_{n-1} - \sigma_n)\sigma_n. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование сначала по  $\eta_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , а затем по  $\sigma_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ , будем иметь

$$|b_n| \leq \frac{k}{2\pi z} \frac{(kMz)^n}{n!}.$$

Таким образом, ряд (7) сходится. Поскольку фундаментальное решение известно, мы можем определить интенсивность пучка в произвольной плоскости  $z = \text{const}$  исходя из формул (5), (7). Функция  $\varphi(\boldsymbol{\xi})$  для гауссова пучка такова:

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha_0 L_0)^2}} \times \\ &\times \exp\left\{ -\frac{0.5\alpha_0 k (\xi_1^2 + \xi_2^2) (1 - i\alpha_0 L_0)}{1 + (\alpha_0 L_0)^2} - i\psi_0 \right\}, \\ \alpha_0 &= 2/(k\omega_0^2), \quad \psi_0 = \arctg(\alpha_0 L_0). \end{aligned}$$

Здесь  $L_0$  — расстояние от перетяжки до границы неоднородности. Ниже приведено выражение для интенсивности пучка в простейшем случае, когда в выражении для  $v$  сохранен лишь первый член, содержащий  $n_1(\mathbf{x}, z)$ :

$$I = \nu\nu^* = \frac{1}{q_0} \exp(-q_6) + \frac{k^2}{\pi} \sqrt{\frac{q_3}{q_0}} \exp(-q_6/2) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^z d\sigma \int_{R^2} d\eta \frac{n_1(\eta, \sigma)}{q_2(z-\sigma)} \exp(-q_4) \sin \varphi_1 + \\ & + \frac{k^4 q_3}{(2\pi)^2} \left\{ \left( \int_0^z d\sigma \int_{R^2} d\eta \frac{n_1(\eta, \sigma)}{q_2(z-\sigma)} \exp(-q_4) \cos \varphi_2 \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \int_0^z d\sigma \int_{R^2} d\eta \frac{n_1(\eta, \sigma)}{q_2(z-\sigma)} \exp(-q_4) \sin \varphi_2 \right)^2 \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$z_1 = z + L_0, \quad L_1 = \sigma + L_0,$$

$$q_0 = 1 + (\alpha_0 z_1)^2, \quad q_1 = 1 + \alpha_0^2 L_0 L_1,$$

$$q_2 = \{(\alpha_0 \sigma)^2 + q_1^2\}^{1/2}, \quad q_3 = 1 + (\alpha_0 L_0)^2,$$

$$q_4 = \frac{k\alpha_0 q_3}{2q_2^2} |\eta|^2, \quad q_5 = \frac{k\alpha_0^2 z_1 (x_1^2 + x_2^2)}{2q_0},$$

$$q_6 = \frac{k\alpha_0 (x_1^2 + x_2^2)}{q_0},$$

$$\varphi_0 = \frac{k}{2} \left\{ \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^2}{z - \sigma} + \frac{\alpha_0^2 L_1 q_3 |\eta|^2}{q_2^2} \right\}, \quad \psi_1 = \arctg(q_1 / (\alpha_0 \sigma)),$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \psi_1 - q_5, \quad \varphi_2 = \varphi_0 + \psi_1.$$

Знак \* означает комплексно сопряженную величину. По формуле (8) в качестве примера было рассчитано распределение интенсивности гауссова пучка при его распространении в неоднородном газе. На рис. 1 представлена использованная в расчете зависимость показателя преломления от координат. На рис. 2, 3 показано распределение интенсивности пучка в двух различных сечениях. Отметим, что фундаментальное решение параболического уравнения позволяет находить решение не только для гауссова пучка, но и для пучков другого профиля.

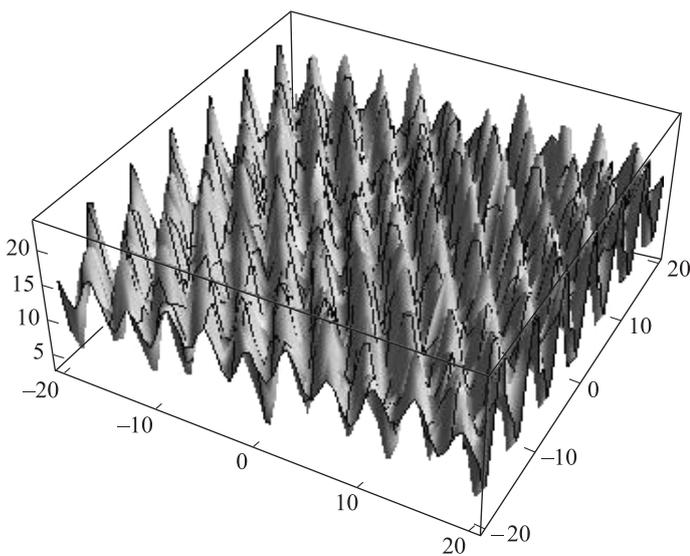


Рис. 1. Зависимость показателя преломления от координат  $x_1, x_2$ . По вертикальной оси отложена величина  $n_1(x_1, x_2, z) \cdot 10^{10}$  при  $z = \text{const}$

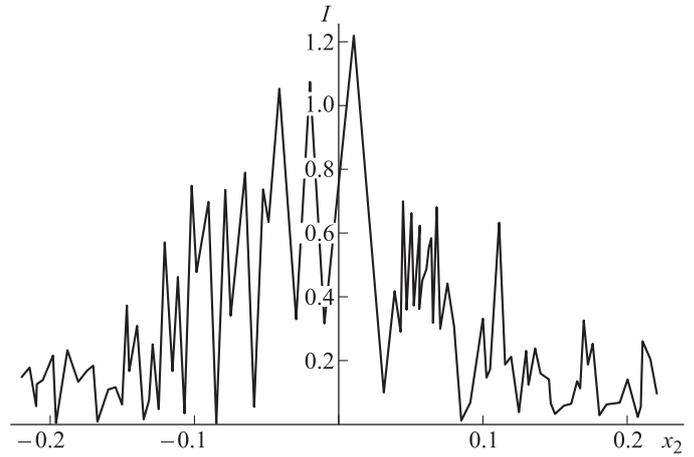


Рис. 2. Распределение интенсивности гауссова пучка на плоскости  $z = \text{const}$  вдоль прямой  $x_1 = 0.01$ . Пучок распространяется вдоль оси  $z$ . Точка  $x_1 = 0, x_2 = 0$  лежит на оси невозмущенного пучка

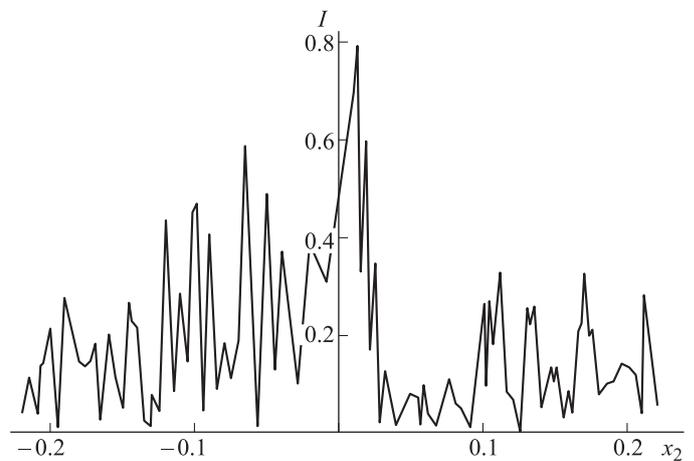


Рис. 3. Распределение интенсивности гауссова пучка на плоскости  $z = \text{const}$  вдоль прямой  $x_1 = 0.1$

### Список литературы

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 2013.
2. Чернов Л.А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., 1958.
3. Lax M., Louisell W.H., McKnight W.B. // Phys. Rev. A. 1975. **11**, N 4. P. 1365.
4. Davis L.W. // Phys. Rev. A. 1979. **19**, N 3. P. 1177.
5. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М., 1981.
6. Andrews L.C., Phillips R.L. Laser beam propagation through random media. Bellingham; Washington, 1998.
7. Dorn R., Quabis S., Leuchs G. // Phys. Rev. Lett. 2003. **91**, N 23. P. 233901.
8. Yan S., Yao B. // Phys. Rev. A. 2008. **77**. P. 023827.
9. Gbur G., Wolf E. // J. Opt. Soc. Am. A. 2002. **19**, N 8. P. 1592.
10. Salamin Y.I. // Opt. Letters. 2006. **31**, N 17. P. 2619.
11. Luo H., Liu S., Lin Z. et al. // Opt. Letters. 2007. **32**, N 12. P. 1692.
12. Shirai T., Dogariu A., Wolf E. // J. Opt. Soc. Am. A. 2003. **20**, N 6. P. 1094.
13. Ji X., Chen X., Lu B. // J. Opt. Soc. Am. A. 2008. **25**, N 1. P. 21.

14. Wu J. // J. Mod. Opt. 1990. **37**. P. 671.
15. Consortini A., Innocenti C. // Proc. SPIE. 2010. **7469**. P. 74690M.
16. Innocenti C., Consortini A. // Proc. SPIE. 2004. **5237**. P. 25.
17. Bystrov S.A., Honma H., Ivanov V.I. et al. // Shock Waves. 1998. **8**. P. 183.
18. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
19. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964.
20. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.

### Analytic solution to the problem of the Gaussian beam propagation through nonuniform gas

O. A. Nikolaeva<sup>a</sup>, F. V. Shugaev<sup>b</sup>

*Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: <sup>a</sup>o.anikolaeva@yandex.ru, <sup>b</sup>shugaev@phys.msu.ru.*

The analytic solution to the problem of the Gaussian beam propagation through the nonuniform atmosphere has been derived.

*Keywords:* Gaussian beam, parabolic equation method, nonuniform gas.

*PACS:* 42.25 Dd, 42.68 Ay, 42.68 Bz.

*Received 17 April 2014.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2014).

#### Сведения об авторах

1. Николаева Оксана Александровна — аспирант; e-mail: o.anikolaeva@yandex.ru.

2. Шугаев Федор Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-28-16, e-mail: shugaev@phys.msu.ru.