ФИЗИКА ЗЕМЛИ, АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

Гипотезы Колмогорова: возможность доказательства

В. П. Юшков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики атмосферы. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: yushkov@phys.msu.ru

Статья поступила 12.02.2014, подписана в печать 06.06.2014.

Предложена схема замыкания спектра колмогоровской турбулентности на низких и высоких частотах, которая позволяет обосновать вторую гипотезу Колмогорова при дополнении первой. Предлагаемая схема замыкания добавляет энергию турбулентности к списку управляющих параметров и объясняет перенос энергии по спектру волновым взаимодействием несжимаемой и адиабатической компоненты турбулентности.

Ключевые слова: турбулентность, спектр, диссипация, аппроксимация.
УДК: 551.55:532.517.45. PACS: 47.27.Gs, 47.27.Jv.

Введение

В 1941 г. А. Н. Колмогоров предложил две гипотезы [1], которые легли в основу современной теории турбулентности [2, 3]. Однако за прошедшие годы интенсивных исследований эти гипотезы так и не были строго доказаны [4], хотя и получили экспериментальное подтверждение в «законе $-5/3$». В настоящей работе предлагается объяснение сложившейся ситуации и намечается путь к доказательству второй гипотезы Колмогорова при дополнении первой. Это дополнение позволяет описать весь спектр турбулентности: как в вязком, так и в энергетическом интервале, а также использовать спектральное обращение, чтобы объяснить наблюдаемое в экспериментах отклонение структурных и корреляционных функций от модели «колмогоровской турбулентности» [5].

В расширенной формулировке первая гипотеза подобия звучит так: «Распределение F_n для локально изотропной турбулентности однозначно определяется величинами ν, ε и E». К исходной формулировке А. Н. Колмогорова мы добавили еще один управляющий параметр E — энергию турбулентности. Ключевая роль энергии турбулентности в формировании спектра мелкомасштабных турбулентных флуктуаций никогда не подвергалась сомнению, но добавление этого параметра разрушает предположение о единственности формы спектра, выводимое «из соображений размерности». В безразмерных координатах спектр теперь может содержать функцию безразмерного соотношения $E/\sqrt{\varepsilon\nu}$ (ε — скорость диссипации, ν — кинематическая вязкость), а само это отношение может зависеть от числа Рейнольдса.

Для обоснования второй гипотезы Колмогорова будем исходить из представления об универсальности спектра диссипации кинетической энергии турбулентности $\varepsilon(\varkappa) = \varkappa^2 E(\varkappa) = 4\pi\varkappa^4\Phi(\varkappa)$, где $E(\varkappa)$ — спектральная плотность кинетической энергии однородной и изотропной стационарной турбулентности, а $\Phi(\varkappa)$ — функция скалярного аргумента $\varkappa$, через которую выражается след фурье-образа корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля скоростей в несжимаемой жидкости (см. [2]). Существование универсальной спектральной функции скорости диссипации $\varepsilon(\varkappa)$, разумеется, тоже является гипотезой, однако гипотезой общепринятой, вытекающей из того физического предположения, что на малых масштабах однородности и изотропности турбулентности механизм перемешивания и переноса энергии по спектру является одинаковым и не зависит от макроскопических характеристик. Однако «ширина» этого спектра зависит от числа Рейнольдса, которое связывает внутренний и внешний, или интегральный, масштабы турбулентности.

В пространственном спектральном представлении [6] кинетическая энергия турбулентности выражается через спектральную плотность $E(\varkappa)$ как

$$E = \int_0^\infty E(\varkappa)\,d\varkappa. \tag{1}$$

Кинетическая энергия лагранжевых воздушных частиц не сохраняется строго, поскольку она может переходить в форму их потенциальной энергии, а потенциальная — в тепловую. Мы не будем рассматривать связь кинетической и полной энергии турбулентности, а лишь предположим, что они статистически пропорциональны друг другу. Такое предположение позволит остаться в рамках колмогоровского представления, не переходя к временно́му или частотному распределению флуктуаций энергии. В то же время предлагаемое в настоящей работе замыкание можно обосновать лишь через привлечение представления о взаимосвязи кинетической и внутренней или *доступной потенциальной* энергии турбулентности и о конечном «времени жизни» турбулентных неоднородностей.

Физическое обоснование замыкания спектра турбулентных флуктуаций на малых и больших масштабах опирается на систему предположений о вероятностной природе турбулентного перемешивания, сформулированных в работе [7], и на предложенный в этой работе механизм переноса энергии турбулентности по спектру через волновое взаимодействие несжимаемых турбулентных движений (колмогоровская турбулентность) и быстрых адиабатических колебаний — акустических и акусто-гравитационных волн. Быстрые (высокочастотные) и сжимаемые волновые движения переносят энергию и импульс, способствуя перемешиванию и выравниванию физических свойств несжимаемых «лагранжевых» частиц. Механизм такого перемешивания хорошо известен. Он был предложен В. И. Татарским [8] и носит название брэгговского, или резонансного, взаимодействия акустических волн и турбулентности. При этом в отличие от традиционной модели Обухова [6] или Коважного, а также моделей ряда других авторов (см. подробнее [2]) поток энергии по спектру связывается не с «переносом» энергии через волновое число $\varkappa$, а с переносом энергии или вероятностным «переходом» между пространственными турбулентными неоднородностями с двумя произвольными волновыми числами $\varkappa_i$ и $\varkappa_j$. Статистическая параметризация таких резонансных переходов, которые можно представить как взаимодействие «дифракционных решеток» турбулентности с быстрыми адиабатическими движениями, приводит к диссипации *энтропии* лагранжевых частиц, которая и характеризует статистическое «время жизни» несжимаемых турбулентных неоднородностей [9]. Этот нелинейный волновой механизм спектрального переноса энергии может быть описан и через гамильтониан взаимодействия несжимаемой турбулентности и акустических волн [10].

1. Спектральное представление и интегральные соотношения

Для однородного и изотропного поля турбулентных флуктуаций кинетическая энергия турбулентности выражается через корреляционную функцию скоростей лагранжевых частиц B_{ij} в нуле: $E = B_{ii}(0)$, где $B_{ij}(\Delta\boldsymbol{r}) = \langle u_i(\boldsymbol{r})u_j(\boldsymbol{r}')\rangle$, а $\Delta\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|$. Угловые скобки, как обычно, означают операцию статистического осреднения, индексы нумеруют ортогональные компоненты вектора скорости $\boldsymbol{u}$, а по одинаковым индексам подразумевается суммирование (след корреляционного тензора).

Сходимость интеграла (1) не следует из гипотез Колмогорова, поскольку в качестве отправной точки своего анализа Колмогоров выбрал не корреляционную, а структурную функцию флуктуаций скоростей [2]: $W_{ij}(\Delta\boldsymbol{r}) = 2(B_{ij}(0) - B_{ij}(\Delta\boldsymbol{r}))$. В теории Колмогорова энергия турбулентности может принимать и бесконечно большое значение. Отметим, что корреляционная и структурная функции имеют одинаковую размерность, поэтому обоснование поведения структурной функции турбулентных флуктуаций скоростей в инерционном интервале лишь соображениями размерности, не может объяснить поведение в этом интервале корреляционной функции. Это соображение подсказывает, что $B_{ii}(0)$, или энергия турбулентного перемешивания, является определяющей характеристикой поведения спектра турбулентных флуктуаций.

Спектральная плотность турбулентных флуктуаций скоростей лагранжевых частиц $E(\varkappa)$ в колмогоровской модели определеяет еще один важный интеграл — скорость диссипации ε

$$\varepsilon = 2\nu \int\limits_0^\infty \varkappa^2 E(\varkappa)\, d\varkappa. \tag{2}$$

Свойством интегралов (1) и (2) является очевидное следствие закона Колмогорова–Обухова: «закон $-5/3$» не позволяет определить энергию турбулентности и скорость диссипации интегрированием «колмогоровской» спектральной плотности [8]. Если $E(\varkappa) \sim \varkappa^{-5/3}$, то интеграл (1) расходится в нуле, а интеграл (2) — при $\varkappa \to \infty$. Для преодоления этой очевидной проблемы вскоре после появления работ Колмогорова и Обухова было предложено несколько модельных схем замыкания «универсального» спектра турбулентности в вязком и энергетическом интервалах [2]. Эти схемы замыкания и до сегодняшнего дня физически не вполне обоснованы, но они существенно необходимы при расчетах распространения излучения через турбулентную среду и поэтому используются на практике как «эмпирические» [11].

Чтобы совместить экспериментально наблюдаемое поведение спектра несжимаемых флуктуаций скоростей и влияние на этот спектр сжимаемых адиабатических флуктуаций в области высоких частот, мы предлагаем следующую формулу замыкания:

$$E(\varkappa) = C\varepsilon^{2/3}(\varkappa_0 + \varkappa)^{-5/3}\left[\frac{\delta\varkappa}{\mathrm{e}^{\delta\varkappa} - 1}\right]. \tag{3}$$

При $\dfrac{1}{\delta} \gg \varkappa \gg \varkappa_0$ функция $E(\varkappa) \sim \varkappa^{-5/3}$ и описывает эмпирический закон Колмогорова–Обухова. Член в квадратных скобках при $\delta \to 0$ стремится к 1 и может рассматриваться как поправочный множитель в Колмогоровской теории. Он необходим, поскольку управляющий параметр ε в (3) определяется поведением спектра в окрестности высоких частот, и его поведение при $\varkappa \to \infty$ обусловлено затуханием быстрых адиабатических флуктуаций, переносящих и выравнивающих энергию и импульс лагранжевых частиц [7].

Параметр $\varkappa_0 = 2\pi/L_0$, где L_0 — интегральный масштаб турбулентности, необходим для ограниченности колмогоровского спектра в нуле. В отличие от кармановского замыкания [12], в нуле мы ограничиваем лишь скалярную спектральную плотность $E(\varkappa)$, а не $\Phi(\varkappa)$. Последняя функция входит в трехмерные спектральные интегралы всегда с множителем $\varkappa^2$. Ограниченность и конечность спектральной плотности мелкомасштабных турбулентных флуктуаций в нуле $E(\varkappa)$ подтверждается многочисленными экспериментальными наблюдениями как классическими [13, 14], так и современными [15]. Отметим, что спектральная плотность $E(0)$ является важной интегральной характеристикой спектра турбулентных флуктуаций, поскольку определяет сходимость корреляционной функции $B_{ii}(r)$.

Напомним, что E и B в трехмерной однородной и изотропной турбулентности связаны спектральным соотношением

$$B_{ii}(r) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(\varkappa r)\, E(\varkappa)\, d\varkappa. \tag{4}$$

Это спектральное соотношение позволяет рассчитать корреляционную и структурную функции по спектру (3) и показывает, что поведение структурной функции в окрестности нуля определяется поведением спектра в окрестности $\varkappa_0$. Формулу (3) можно рассматривать и просто как удобную аппроксимацию. Другие варианты поведения спектра в области низких частот, при $0 < \varkappa < \varkappa_0$, переходящие при $\varkappa \gg \varkappa_0$ в формулу Обухова $E(\varkappa) \sim \varkappa^{-5/3}$, дадут в расчетах интегралов (1) и (2) лишь поправочный коэффициент «порядка 1».

Далее будет показано, что два параметра спектрального распределения (3) $\varkappa_0$ и δ однозначно связаны с двумя интегральными характеристиками спектра E и ε. Причем δ перестает зависеть от E с увеличением числа Рейнольдса и ростом безразмерной величины L_0/δ и является лишь функцией ε и ν, а L_0, или $\varkappa_0 = 2\pi/L_0$, перестает зависеть от ν и является только функцией ε и E. Таким образом, в инерционном интервале, если $\varkappa_0 \ll \varkappa \ll 1/\delta$ и $L_0/\delta \to \infty$, из (3) выпадает зависимость спектральной плотности и от ν и от E, что и доказывает вторую гипотезу Колмогорова.

2. Сходимость к кинетической энергии турбулентности

Рассмотрим интеграл

$$E = C\varepsilon^{2/3} \int\limits_0^\infty \frac{(\varkappa_0 + \varkappa)^{-5/3} \cdot \delta\varkappa}{e^{\delta\varkappa} - 1}\, d\varkappa. \tag{5}$$

Сделаем замену переменных: $\varkappa = \varkappa_0 t$. Тогда

$$E = C\varepsilon^{2/3} \varkappa_0^{-5/3} \varkappa_0^2 \delta \int\limits_0^\infty \frac{(t+1)^{-5/3} t}{e^{\delta\varkappa_0 t} - 1}\, dt. \tag{6}$$

Обозначим безразмерное число $\varkappa_0\delta \equiv \Delta$. С ростом числа Рейнольдса $\Delta \to 0$. Рассмотрим теперь интеграл I

$$I = \Delta^{1/3} \int\limits_0^\infty \frac{(t+1)^{-5/3} t}{e^{\Delta t} - 1}\, dt = \Delta^{-2/3} \int\limits_0^\infty (t+1)^{-5/3} \left[\frac{\Delta t}{e^{\Delta t} - 1}\right] dt. \tag{7}$$

Разобьем его на две части I_1 и I_2, которые ведут себя различным образом при $t \to \infty$ и $\Delta \to 0$:

$$I_1 = \Delta^{-2/3} \int\limits_0^m (t+1)^{-5/3} \left[\frac{\Delta t}{e^{\Delta t} - 1}\right] dt, \tag{8}$$

$$I_2 = \Delta^{-2/3} \int\limits_m^\infty (t+1)^{-5/3} \left[\frac{\Delta t}{e^{\Delta t} - 1}\right] dt. \tag{9}$$

Разлагая функцию в квадратных скобках в ряд Тейлора при $t < m$ и $\Delta \to 0$, так что $\Delta m \ll 1$, имеем

$$I_1 = \Delta^{-2/3} \int\limits_0^m (t+1)^{-5/3} \left[1 - \Delta t/2 + o(\Delta t)\right] dt \approx$$

$$\approx \Delta^{-2/3} \left[\int\limits_0^m (t+1)^{-5/3}\, dt - \frac{\Delta}{2} \int\limits_0^m (t+1)^{-5/3} t\, dt\right] =$$

$$= \Delta^{-2/3} \left[\int\limits_0^m (t+1)^{-5/3}\, dt - \right.$$

$$\left. - \frac{\Delta}{2} \left(3(m+1)^{1/3} + \frac{9}{2} + \frac{3}{2}(m+1)^{-2/3}\right)\right]. \tag{10}$$

Как видно, при $\Delta \to 0$ остаточные члены (кроме первого) уменьшаются.

Второй интеграл оценим сверху. Поскольку $\left|\frac{\Delta t}{e^{\Delta t} - 1} - 1\right| \leqslant 1$, то

$$I_2 = \Delta^{-2/3} \times$$

$$\times \left[\int\limits_m^\infty (t+1)^{-5/3}\, dt + \int\limits_m^\infty (t+1)^{-5/3} \left[\frac{\Delta t}{e^{\Delta t} - 1} - 1\right] dt\right] \approx$$

$$\approx \Delta^{-2/3} \left[\int\limits_m^\infty (t+1)^{-5/3}\, dt + \frac{3}{2}(m+1)^{-2/3} + O((m+1)^{-2/3})\right]. \tag{11}$$

Первый член в квадратных скобках мы сохранили, чтобы общий интеграл I выразить через $\int\limits_0^\infty (t+1)^{-5/3}\, dt = 3/2$. Остаточные члены имеют порядок $(m+1)^{-2/3}$ и при $m \to \infty$ эти члены много меньше 1. Чтобы и в интеграле I_1 остаточные члены были меньше главного и уменьшались с той же скоростью, достаточно положить $\Delta(m+1) = \mathrm{const} \ll 1$.

Таким образом, при $\Delta \to 0$, т. е. с ростом числа Рейнольдса, в интеграле I можно оставить лишь первый член, отбросив остальные. При этом

$$I \approx \Delta^{-2/3} \int\limits_0^\infty (t+1)^{-5/3}\, dt = \frac{3}{2}\Delta^{-2/3}. \tag{12}$$

Тогда

$$E = \frac{3}{2} C\, \varepsilon^{2/3} \delta^{2/3} \Delta^{-2/3} = \frac{3}{2} C \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa_0}\right)^{2/3}, \tag{13}$$

или, с точностью до «множителя порядка 1», интегральный масштаб турбулентности $L_0 = 2\pi \frac{E^{3/2}}{\varepsilon}$. Очевидно, что L_0 не зависит явно от ν, при $\Delta \to 0$.

3. Сходимость к скорости диссипации

Рассмотрим теперь интеграл (2). При использовании спектра $E(\varkappa) \sim \varkappa^{-5/3}$ он расходится при $\varkappa \to \infty$. Предложенная Новиковым и использованная Татарским формула гауссова усечения высокочастотной части спектра не является обоснованной с физических позиций и не соответствует данным наблюдений [2, 12]. Она также требует введения специального масштаба усечения. Предлагаемая в настоящей работе аппроксимация (3), не требует такого специального масштаба и объясняет ограничение спектральной плотности скорости диссипации $\varepsilon(\varkappa)$ при $\varkappa \to \infty$, затуханием высокочастотных адиабатических волн. Спектральная плотность скорости диссипации в «интервале вязкости» убывает приближенно экспоненциально, как спектр адиабатических флуктуаций, энергия которых сосредоточена в высокочастотной области и имеет планковскую форму [7].

Предположение о планковском поведении спектра адиабатических турбулентных флуктуаций было высказано Обуховым еще в 1941 г. [6]. Другими словами, предлагаемая гипотеза замыкания имеет физическое обоснование, а не следует только из математических требований сходимости или «эмпирических» функций.

В обозначениях, использованных выше,

$$\varepsilon = 2\nu C \varepsilon^{2/3} \delta^{-4/3} J, \tag{14}$$

где

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{t^2}{(\Delta + t)^{5/3}} \, \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \, dt, \tag{15}$$

но теперь $t = \delta \varkappa$. Разобьем этот интеграл также на две части: J_1 (при $t < m < 1$) и J_2 (при $t > m$), имеющие разное поведение при $\Delta \to 0$ и $t \to \infty$.

В окрестности нуля множитель $\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \lesssim 1$. Поэтому

$$J_1 \lesssim \int\limits_0^m t^2 (\Delta + t)^{-5/3} \, dt, \tag{16}$$

если $m < 1$. Обозначая $x = \Delta + t$ и сдвигая пределы интегрирования, получаем оценку этого интеграла

$$J_1 \lesssim \int\limits_\Delta^{\Delta+m} \frac{(x - \Delta)^2}{x^{5/3}} \, dx = \int\limits_\Delta^{\Delta+m} \left(x^{1/3} + 2\Delta x^{-2/3} + \Delta^2 x^{-5/3} \right) dx = \left(\frac{3}{4} x^{4/3} - 6\Delta x^{1/3} - \frac{3}{2} \Delta^2 x^{-2/3} \right) \Bigg|_\Delta^{m+\Delta} = O(m^{4/3}), \tag{17}$$

если $\Delta < m$.

Таким образом, значение интеграла J в основном определяется значением J_2, т. е. поведением подынтегралного выражения при $t \to \infty$:

$$J_2 = \int\limits_m^\infty \frac{t^{4/3}}{\mathrm{e}^t - 1} \left[\left(\frac{t}{\Delta + t} \right)^{5/3} \right] dt. \tag{18}$$

При $t > m$ и $\Delta < m$ выражение в квадратных скобках можно оценить как $1 - \dfrac{5}{3} \dfrac{\Delta}{m} + o(\dfrac{\Delta}{m})$. Обозначим дополнительно $J_0 = \int\limits_0^\infty \frac{t^{4/3}}{\mathrm{e}^t - 1} \, dt = \Gamma(7/3) \zeta(7/3) \approx 1.685$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана. Тогда

$$J_2 \approx \left[1 - \frac{5}{3} \frac{\Delta}{m} \right] \int\limits_m^\infty \frac{t^{4/3}}{\mathrm{e}^t - 1} \, dt = \left[1 - \frac{5}{3} \frac{\Delta}{m} \right] \left(J_0 - \int\limits_0^m \frac{t^{4/3}}{\mathrm{e}^t - 1} \, dt \right). \tag{19}$$

Последний поправочный член к J_0 легко оценить, раскладывая экспоненту в ряд Тейлора. Он приближенно равен $0.75\, m^{4/3}$ при $m \ll 1$. То есть при $\Delta \to 0$ следует выбирать m так, чтобы $\Delta \ll m \ll 1$. Тогда $J_1 \ll J_2$ и $J \approx J_0$. Например, между m и Δ можно установить степенную зависимость ($m \sim \Delta^{3/7}$) так, чтобы остаточные члены в (16) и (18) при $\Delta \to 0$ убывали одинаково быстро.

Теперь можно связать ε, ν и δ. Поскольку из (14) $\varepsilon^{1/3} \approx 2C\nu J_0 \delta^{-4/3}$, то

$$\delta \approx \sqrt[4]{(2CJ_0\nu)^3/\varepsilon}. \tag{20}$$

Эта формула показывает, что параметр δ спектральной плотности (3) пропорционален колмогоровскому внутреннему масштабу. При этом нет необходимости во введении дополнительного масштаба для «интервала вязкости». Появление эмпирического коэффициента C, введенного для соответствия спектра (3) колмогоровскому, объясняется тем обстоятельством, что затухание быстрых адиабатических колебаний обусловлено не только кинематической вязкостью ν, но и температуропроводностью χ. Для адиабатических движений коэффициент «эффективных» потерь $\eta = \dfrac{4}{3}\nu + \left(\dfrac{C_p}{C_v} - 1 \right) \chi$, где C_p/C_v — отношение теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и объеме [16].

Заключение

Следует отметить, что представленная в настоящей работе модель спектра мелкомасштабных турбулентных пульсаций скоростей (3) является статистической. Это означает, что интегральные характеристики ε и E, определяющие параметры спектра $\varkappa_0$ или L_0 и δ не меняются в пределах сохранения статистических свойств ансамбля турбулентных пульсаций. Явление перемежаемости, т. е. быстрое и случайное изменение, например, параметра ε, наблюдаемое в реальных турбулентных течениях не может быть объяснено в рамках колмогоровского подхода.

Для понимания явления перемежаемости необходимо выйти за границы приближения несжимаемости и рассмотреть взаимосвязь кинетической и полной энергии турбулентности. Полная энергия турбулентности включает также тепловую и потенциальную компоненты. Их можно объединить в рамках понятия доступной потенциальной энергии турбулентности [17]. Это та доля полной энергии, которая может свободно переходить в форму кинетической энергии и обратно, порождая перемежаемость. Аналогично диссипация кинетической энергии ε также является лишь одной из компонент полной диссипации энергии турбулентных движений. Поэтому можно ожидать, что турбулентная кинетическая энергия, если ее определять в эксперименте по (13), будет флуктуирующей величиной, даже при сохранении полной энергии турбулентности. Такие флуктуации, как показывают экспериментальные наблюдения, заметны при расчетах структурных функций флуктуаций температур или скорости звука [9], а также индекса рефракции, при распространении оптического излучения в турбулентной атмосфере [11]. Сильные флуктуации показателя степени структурных функций температуры в пограничном слое атмосферы отмечались В. И. Татарским еще в 1956 г. [2].

Параметры спектра $\varkappa_0$ и δ зависят от статистических свойств наблюдаемой турбулентности и должны определяться экспериментально или могут быть параметризованы в моделях в зависимости от термической и скоростной стратификации турбулентного течения. Например, $\varkappa_0$ можно оценить по так называемым «компенсированным» (т. е. $fE(f)$) временны́м спектрам мелкомасштабных турбулентных пульсаций [14], через соотношение, выражающее гипотезу Тейлора: $f = U\varkappa$, где U — средняя скорость турбулентного потока. Если f_m — максимум такого спектра и $f_m = U\varkappa_m$, то нетрудно посчитать, что $\varkappa_m = 1.5\varkappa_0$, если $\delta\varkappa_0 \ll 1$.

Параметр δ (внутренний масштаб) в спектральном распределении (3) характеризует поведение спектра адиабатических флуктуаций [7]. В рамках планковского приближения этого спектра $\delta = \gamma c_s / C_v T$, где γ — параметр затухания флуктуаций энтропии лагранжевых частиц, а c_s — средняя скорость звука.

В настоящей работе не представлено математически строгого доказательства второй гипотезы Колмогорова, а лишь намечается путь к такому доказательству. Актуален, например, вопрос: почему в наблюдениях и в спектре (3) показатель степени равен 5/3, если из соображений размерности возможны и другие комбинации? Ответ на него видится через представление об анизотропии турбулентного перемешивания в поле силы тяжести и о перераспределении энергии по трем формам: кинетической, тепловой и потенциальной, с сохранением энтропии лагранжевых частиц.

Список литературы

1. *Колмогоров А.Н.* // Докл. АН СССР. 1941. **30**, № 4. С. 299.
2. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. Механика турбулентности. М., 1967.
3. *Frish U.* Turbulence. Cambridge Univ. Press, 1995 (*Фриш У.* Турбулентность. Наследие Колмогорова. М., 1998).
4. *Yaglom A.* The Century of Turbulence Theory: The Main Achievements and Unsolved Problems — EDP Sciences. Springer-Verlag, 2001.
5. *Tan L., Du W.* et al. // Optics Express. 2010. **18**, N 2. P. 451.
6. *Обухов А.М.* // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геоф. 1941. **5**, № 4. С. 453.
7. *Юшков В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 4. С. 65 (Moscow University Phys. Bull. 2013. **68**, N 4. P. 330).
8. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
9. *Юшков В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 4. С. 62 (Moscow University Phys. Bull. 2012. **67**, N 4. P. 384).
10. *Zakharov V.E., L'vov V.S., Falkovich G.E.* Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Wave Turbulence. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, 1992.
11. *Golbraikh E., Kopeika N.S.* // Appl. Opt. 2004. **43**, N 33. P. 6151.
12. *Wilson D.K, Brasseur J.G., Gilbert K.E.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. **105**, N 1. P. 30.
13. *Kaimal J.C., Wyngaard J.* et al. // Quart. J. Royal Meteorol. Soc. 1972. **98**. P. 563.
14. *Kaimal J.C., Finnigan J.J.* Atmospheric Boundary Layer Flows. Oxford, 1994.
15. *Shulhua Liu, Heping Liu* et al. // Boundary-Layer Meteorol. 2001. **98**. P. 83.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., 1988.
17. *Zilitinkevich S. S., Elperin T.* et al. // Boundary-Layer Meteorol. 2013. **146**. P. 341.

Towards the proof of Kolmogorov hypotheses

V. P. Yushkov

Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: yushkov@phys.msu.ru.

A closure scheme for Kolmogorov spectrum at low and high frequencies is proposed. It allows us to validate second Kolmogorov hypothesis if expand the first one. The proposed closure scheme adds energy of turbulence to the list of controlling parameters and explains energy transfer over the spectrum by wave interaction between incompressible and adiabatic components of turbulence.

Keywords: turbulence, spectrum, dissipation, approximation.
PACS: 47.27.Gs, 47.27.Jv.
Received 12 February 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2014).

Сведения об авторе

Юшков Владислав Пролетарьевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-15-41, e-mail: yushkov@phys.msu.ru.