ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Об одном возможном способе перенормировки давления Казимира в шаре

А. И. Дубиковский[1,a], П. К. Силаев[2,b], О. Д. Тимофеевская[2]

[1] *Институт теоретических проблем микромира имени Н. Н. Боголюбова МГУ (ИТПМ МГУ). Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1.*

[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

E-mail: [a] dubikovs@bog.msu.ru, [b] silaev@bog.msu.ru

Статья поступила 17.07.2014, подписана в печать 03.09.2014.

Мы предлагаем метод перенормировки давления Казимира для массивного скалярного поля в шаре, который несколько отличается от общепринятого. Альтернативный способ выбора точки нормировки приводит не к обратной полиномиальной, а к экспоненциальной зависимости давления от массы поля. Предложенный метод не использует скалярное поле, квантованное во внешней области, что позволяет избежать трудностей, возникающих при стандартном подходе.

Ключевые слова: квантованные поля, вакуум квантовой теории поля, нулевые колебания, эффект Казимира.

УДК: 530.145. PACS: 11.10.–z, 11.10.Gh.

Введение

Еще в 1948 г. Х. Б. Г. Казимир показал [1], что между двумя плоскопараллельными металлическими пластинами действует сила притяжения, связанная с наличием нулевых колебаний квантованного электромагнитного поля. Впоследствии существование этой силы было подтверждено в эксперименте [2, 3]. С тех пор эффект был подробно исследован как теоретически, так и экспериментально [4, 5]. Помимо непосредственного проявления и даже возможного прикладного применения эффекта (что связано с изменением его знака [6]) в наномеханике, он может проявляться в теории гравитации [7, 8], космологических моделях [9, 10], в моделях мешков в адронной физике [11, 12] и других приложениях. В настоящее время разработано довольно большое количество различных методов точного и приближенного вычисления энергии, силы и давления Казимира [13–16], которые в случае простых геометрий позволяют получить конечный ответ [17–20]. Основная трудность заключается в необходимости выполнения процедуры перенормировки в исходных формальных выражениях для энергии, силы или давления, которые содержат расходимости. Для силы Казимира, действующей между двумя разделенными телами, проблема перенормировки решается тривиально: достаточно использовать в качестве точки нормировки силу, соответствующую бесконечному расстоянию между телами, которая, очевидно, должна быть равна нулю. Для эффекта Казимира в случае уединенного тела задача перенормировки оказывается много сложнее. Только для тел с плоскими границами разные способы перенормировки дают одинаковый ответ. В случае криволинейных границ ответы, вообще говоря, могут оказаться зависящими от способа перенормировки [11, 12]. Даже перенормировка для простейшей системы — квантованного поля, заключенного в шаровой полости, — вызывает некоторые трудности. В настоящее время общепринятым является следующий способ перенормировки [21–24]: к расходящемуся выражению, соответствующему энергии (или давлению) Казимира внутри сферы, добавляется аналогичное выражение, соответствующее полю, квантованному вне сферы. В пространствах нечетной размерности расходимости сокращаются, и мы получаем конечный ответ. К сожалению, эта процедура достаточно хорошо обоснована физически только в том случае, когда мы действительно имеем дело со сферической оболочкой нулевой толщины. В этом случае полученный таким образом ответ никаких сомнений не вызывает. Во всех остальных ситуациях может возникнуть вопрос: не добавили ли мы в окончательный конечный ответ некоторый конечный вклад от внешней задачи? Стандартными примерами ситуаций, в которых общепринятый способ перенормировки сталкивается с серьезными трудностями, являются сферическая оболочка конечной толщины, сферическая полость в кубе, диэлектрический шар, помещенный в диэлектрическую среду (в том случае, когда электрическая и магнитная проницаемость сред произвольны, а не подобраны специальным образом), и т. д. В настоящей работе мы сделали попытку построить альтернативную процедуру перенормировки, никак не связанную с внешней задачей. Соответствующий выбор точки нормировки будет изложен в следующем разделе.

Выбор точки нормировки для давления Казимира в шаре

Рассмотрим сначала простейший пример: скалярное поле массы m, определенное на одномерном отрезке $[0, L]$ с нулевыми граничными условиями на концах интервала. Мы будем использовать естественную систему единиц $\hbar = c = 1$, так что лагранжиан системы примет вид

$$L = \int_0^L dx\, \frac{1}{2}\left[(\partial_0\varphi)^2 - (\partial_1\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right].$$

Для этой модели существует очень большое количество способов регуляризации и перенормировки давления или энергии (использование ζ-функции [25], формулы Абеля–Плана [17], использование евклидовой функции Грина [26, 27], перенормировка дифференцированием по параметру, и т. д.), причем все они приводят к одному и тому же результату [28]. Мы воспользуемся евклидовой функцией Грина. Давление Казимира на правом конце интервала L выражается через производную поверхностной евклидовой функции Грина $S_\kappa(x,L)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\partial_x^2 S_\kappa(x,L) - \kappa^2 S_\kappa(x,L) = 0$$

и граничным условиям

$$S_\kappa(0,L) = 0, \quad S_\kappa(L,L) = 1.$$

Располагая $S_\kappa(x,L)$, мы получаем формальное неперенормированное выражение для давления на правом конце интервала L:

$$p(L) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dt\, \frac{d}{dx} S_{\sqrt{t^2+m^2}}(x,L)\Big|_{x=L}. \qquad (1)$$

Регуляризация полученного выражения может быть осуществлена, например, посредством раздвижки точек, т. е. мы полагаем $x = L - \epsilon$ вместо $x = L$. Снятие регуляризации достигается при $\epsilon \to 0$.

Поскольку

$$\frac{d}{dx} S_\kappa(x,L) = \kappa\, \mathrm{ch}(\kappa x)/\,\mathrm{sh}(\kappa L),$$

то стандартная перенормировка подынтегрального выражения состоит в вычитании из $\frac{d}{dx}S_\kappa(x,L)$ величины κ:

$$\frac{d}{dx} S^{(\mathrm{ren})}_{\sqrt{t^2+m^2}}(x,L) = \frac{d}{dx} S_{\sqrt{t^2+m^2}}(x,L) - \sqrt{t^2+m^2}, \qquad (2)$$

что дает хорошо известный ответ [28]

$$p(L) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt\, \frac{\sqrt{t^2+m^2}}{\exp(2L\sqrt{t^2+m^2}) - 1}.$$

Такое вычитание может быть достаточно хорошо обосновано: действительно, во-первых, вычитаемое выражение не зависит от геометрии системы (от длины отрезка L), во-вторых, это вычитание эквивалентно использованию в качестве точки нормировки давления на границе полубесконечного интервала $(-\infty, L]$. Поскольку энергия такой полубесконечной системы не может зависеть от положения правой границы полубесконечного интервала L, то и давление должно равняться нулю. В терминах энергии такое вычитание означает, что мы вычитаем ту часть энергии поля, определенного на бесконечной оси, которая приходится на интервал $[0, L]$. Обратим внимание вот на какое обстоятельство: мы вычли локальную («поверхностную») расходимость, связанную с точкой $x = L$. Действительно, производная поверхностной функции Грина, соответствующей интервалу $(-\infty, L]$, имеет вид $\frac{d}{dx}S_\kappa^{(0)}(x,L) = \kappa\exp(\kappa(x-L))$, так что $\frac{d}{dx}S_\kappa^{(0)}(L,L) = \kappa$. Эффекты, связанные с замкнутостью объема, определяются наличием других точек, ограничивающих область (в данном случае левой границы интервала $x = 0$), и потому они пропорциональны $\exp(-\kappa a)$, где a — характерный размер области (в данном случае $a = 2L$). С учетом (1) это приводит к экспоненциальному убыванию давления с ростом массы поля: $p(L) \sim \exp(-2mL)$.

Рассмотрим теперь случай скалярного поля $\varphi(\boldsymbol{r})$ с массой m, заключенного внутри шара радиуса R с нулевым граничным условием $\varphi(r{=}R) = 0$. Неперенормированное давление Казимира в точке $\boldsymbol{x}$ на границе области может быть записано совершенно таким же образом, как и в одномерном случае:

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dt\, (\boldsymbol{n}\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}) S_{\sqrt{t^2+m^2}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}}, \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности границы в точке $\boldsymbol{x}$, а $S_\kappa(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ — евклидова поверхностная функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\triangle_{\boldsymbol{y}} S_\kappa(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - \kappa^2 S_\kappa(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = 0.$$

Используем выражение для поверхностной функции Грина в шаре в виде разложения по сферическим гармоникам

$$S_\kappa(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta_y,\varphi_y) Y^*_{lm}(\theta_x,\varphi_x)\frac{\sqrt{R}\,I_{l+1/2}(\kappa r_y)}{\sqrt{r_y}\,I_{l+1/2}(\kappa R)},$$

где $r_x = R$, а $I_{l+1/2}(z)$ — функция Инфельда. Впоследствии нам понадобятся выражения для асимптотик функций Инфельда и Макдональда I_ν, K_ν при больших ν. Они имеют следующий вид [29]:

$$I_\nu(z) \sim (z^2+\nu^2)^{-1/4}\exp\left(\sqrt{z^2+\nu^2} - \nu\,\mathrm{arsh}(\nu/z)\right),$$
$$K_\nu(z) \sim (z^2+\nu^2)^{-1/4}\exp\left(-\sqrt{z^2+\nu^2} + \nu\,\mathrm{arsh}(\nu/z)\right),$$

т. е. функция Инфельда I_ν убывает, а функция Макдональда K_ν растет с ростом ν. Подставляя выражение для S в (3) получаем следующий формальный ответ:

$$p(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dt \sum_{l=0}^\infty \frac{\sqrt{t^2+m^2}\, I'_{l+1/2}\left(\sqrt{t^2+m^2}\,R\right)}{I_{l+1/2}\left(\sqrt{t^2+m^2}\,R\right)}. \qquad (4)$$

В отличие от одномерного случая, где подынтегральное выражение было конечно, здесь производная поверхностной функции Грина оказывается сингулярной, поскольку сумма по l расходится. Регуляризуем подынтегральное выражение следующим образом: домножим каждое слагаемое в сумме на множитель $f(l+1/2)$, где

$$f(m) = (1+\epsilon m)^{-2m-n}.$$

Здесь n — целое число, причем $n > 2$. Снятие регуляризации достигается при $\epsilon \to 0$. В действительности для обеспечения сходимости суммы по l такая регуляризация является избыточной, поскольку слагаемые имеют асимптотику $O(l^1)$, однако она окажется необходимой в дальнейшем для выполнения процедуры перенормировки.

Обратимся теперь к задаче перенормировки полученного регуляризованного выражения. Заметим прежде всего, что, в отличие от одномерного случая, расходящаяся часть выражения зависит от геометрии системы. Это связано с тем, что поверхностная расходимость определяется кривизной границы, т. е. зависит от радиуса R. Действительно, если рассматривать одномерную задачу, соответствующую данной сферической гармонике l, то в ней, в отличие от одномерного случая, появление центробежного потенциала нарушает трансляционную инвариантность задачи. Поэтому перенормировочный член может зависеть от положения границы, т. е. от радиуса R.

Стандартная перенормировочная процедура заключается в добавлении слагаемых, соответствующих внешней задаче, т. е. скалярному полю, квантованному вне сферы радиуса R. Для внешней задачи расходящийся член, связанный с кривизной границы, имеет противоположный знак, так что мы получим конечное выражение для давления. Однако, как уже было сказано выше, эта процедура имеет некоторые недостатки. Кроме уже упомянутых затруднений отметим то обстоятельство, что она дает ответ, который убывает с ростом массы поля как обратный полином. Как нам представляется, такой характер убывания не вполне разумен из чисто физических соображений.

Действительно, рассмотрим куб с ребром L, внутри которого присутствует скалярное поле массы m. Хорошо известно, что как энергия, так и давление Казимира в этом случае убывает экспоненциально с ростом массы поля. Более того, для куба (как и для произвольного прямоугольного параллелепипеда) результат перенормировки не вызывает ни малейших сомнений. Самые разнообразные методы регуляризации и перенормировки [4, 5] приводят к одному и тому же ответу. Поэтому в дальнейших рассуждениях мы будем ответ для куба и вообще ответы для областей с плоскими границами использовать как своеобразную точку отсчета.

Расходимость поверхностной функции Грина для любой точки на грани куба, которая удалена от ребер куба (т. е. от других граней куба), в точности совпадает с расходимостью в поверхностной функции Грина для плоскости, т. е. не зависит от L, а влияние других граней экспоненциально убывает с ростом массы поля. Теперь деформируем куб таким образом, чтобы в окрестности рассматриваемой точки кривизна поверхности стала малой, но ненулевой (пусть, например, оба радиуса кривизны будут соответствовать сфере с большим, но конечным радиусом R). Такая малая деформация приведет к тому, что характер убывания давления Казимира с ростом массы поля m резко изменится: экспонента $\exp(-mL)$ заменится на обратную полиномиальную зависимость. С математической точки зрения это вполне допустимо, но, как нам кажется, такой результат неприемлем с чисто физической точки зрения.

Совершенно такие же рассуждения могут быть повторены и для двух плоскостей, разделенных расстоянием L. Опять-таки, ответ для случая нулевой кривизны ни малейших сомнений не вызывает и оказывается пропорциональным $\exp(-mL)$. Может ли малая деформация, приводящая к малой, но ненулевой кривизне поверхности, привести к существенному изменению характера зависимости от массы поля? Еще раз подчеркнем, что с математической точки зрения — безусловно, может. Но процедура перенормировки требует того или иного выбора точки нормировки, т. е. тех или иных условий, которым должен удовлетворять перенормированный ответ. Нам представляется физически естественным требование, чтобы малая деформация поверхности не приводила к радикальному изменению в полученном перенормированном ответе. А в качестве точки отсчета мы выбираем ответы, соответствующие плоским границам, поскольку для плоских границ, во-первых, процедура устранения поверхностной расходимости не вызывает никаких сомнений, и, во-вторых, полученные ответы не приводят ни к каким последующим затруднениям. Ни прямоугольные поршни в прямоугольных параллелепипедах, ни прямоугольный параллелепипед со стенками конечной толщины не вызывают тех затруднений, которые возникают для сферы с конечной толщиной стенок. Наше требование своеобразной «непрерывности», безусловно, является произвольным, но, как нам представляется, физически оправданным.

Итак, мы попытаемся построить такую процедуру перенормировки, в которой малая деформация поверхности куба не приводила бы к радикальным изменениям в ответе для давления Казимира. Иначе говоря, мы будем полагать, что те слагаемые, которые не убывают экспоненциально с ростом массы поля, мы должны отнести к локальным слагаемым, относящимся к рассматриваемой точке, и включить их в поверхностную расходимость, а все слагаемые, которые убывают экспоненциально, рассматривать как результат влияния других (удаленных) точек границы на рассматриваемую точку и именно их считать перенормированным ответом для давления Казимира.

Введем обозначение $y = R\sqrt{t^2+m^2}$ и разобьем регуляризованную сумму на две суммы S_1 и S_2 — по четным и по нечетным l:

$$S_1 = \sum_{l=2k} s_1(l), \quad S_2 = \sum_{l=2k+1} s_2(l),$$
$$s_1(l) = s_2(l) = \frac{y}{R}\frac{I'_{l+1/2}(y)}{I_{l+1/2}(y)} f(l+1/2). \tag{5}$$

Смысл такого разбиения станет очевиден позже.

Учтем теперь, что

$$I'_\nu(x) = (I_{\nu+1}(x) + I_{\nu-1}(x))/2,$$

а экспоненциально убывающее слагаемое в $I_{l+1/2}(x)$ равно

$$(-1)^{l+1}K_{l+1/2}(x)/\pi,$$

где $K_\nu(x)$ — функция Макдональда. Выделим члены, пропорциональные $\exp(-2y)$, в каждом слагаемом суммы S_1. Получим (здесь и далее мы будем опускать регуляризующий множитель $f(l+1/2)$)

$$s_1^{(\text{ren})}(l) = \frac{y}{R}\,\frac{-K_{l+1+1/2}(y) - K_{l-1+1/2}(y)}{\pi I_{l+1/2}(y)}.$$

Тем самым контрчлен $w_1(l)$ для слагаемого первой суммы $s_1(l)$ имеет вид

$$w_1(l) = \frac{y}{2R}\,\frac{\{I_{l+1+1/2}(y) - K_{l+1+1/2}(y)/\pi\} - K_{l+1+1/2}(y)/\pi}{\{I_{l+1/2}(y) + K_{l+1/2}(y)/\pi\} - K_{l+1/2}(y)/\pi} + \frac{y}{2R}\,\frac{\{I_{l-1+1/2}(y) - K_{l-1+1/2}(y)/\pi\} - K_{l-1+1/2}(y)/\pi}{\{I_{l+1/2}(y) + K_{l+1/2}(y)/\pi\} - K_{l+1/2}(y)/\pi}. \tag{6}$$

Здесь каждое выражение, заключенное в фигурные скобки, пропорционально $\exp(y)$ и является аналогом функции $\exp(\kappa L)$ в одномерном случае, в то время как функции Макдональда пропорциональны $\exp(-y)$ и являются аналогами функции $\exp(-\kappa L)$. Если ограничиться первым (пропорциональным $y^{-1/2}$) слагаемым в асимптотиках функций Инфельда и Макдональда, то контрчлен (6) окажется равным

$$w_1(l) \approx 2\frac{y}{2R}\,\frac{\exp(y)-\exp(-y)}{\exp(y)-\exp(-y)} = \frac{y}{R}.$$

Так что в этом приближении контрчлен равен $\sqrt{t^2+m^2}$, что в точности совпадает с контрчленом (2), возникающим в одномерном случае. Зависимость от R в контрчлене возникает из-за следующих (пропорциональных $y^{-3/2}$, $y^{-5/2}$ и т. д.) слагаемых в асимптотиках функций $I_\nu(y)$ и $K_\nu(y)$.

Совершенно аналогичным образом каждое слагаемое в сумме по нечетным l заменится на

$$s_2^{(\mathrm{ren})}(l) = \frac{y}{R}\,\frac{K_{l+1+1/2}(y)+K_{l-1+1/2}(y)}{\pi I_{l+1/2}(y)}.$$

Заметим, что знак в этом выражении отличается от знака для четных l.

Теперь рассмотрим процедуру снятия регуляризации. Здесь мы встречаемся с чисто технической трудностью, связанной с тем, что перенормированные суммы сходятся гораздо хуже, чем исходная сумма. Слагаемые перенормированной суммы имеют асимптотику $[l!(2/y)^l]^2$. Именно по этой причине мы и использовали избыточную регуляризацию для нашей исходной суммы. При непосредственном вычислении перенормированных сумм S_1^{ren} и S_2^{ren} сходимость достигается лишь при значениях параметра регуляризации $\epsilon > 2/(ye)$, так что прямое снятие регуляризации путем обращения ϵ в ноль невозможно.

Это затруднение может быть легко разрешено с помощью аналитического продолжения перенормированной суммы по параметру регуляризации ϵ. Действительно, при $\epsilon > 2/(ye)$ для каждой из перенормированных сумм (5) может быть написано следующее интегральное представление:

$$S_1^{(\mathrm{ren})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y}{R}\,\frac{-K_{2k+3/2}(y)-K_{2k-1/2}(y)}{\pi I_{2k+1/2}(y)}f(2k+1/2) =$$
$$= \frac{i}{2}\frac{y}{R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathrm{th}(\pi x)\frac{-K_{2ix+1/2}(y)-K_{2ix-3/2}(y)}{\pi I_{2ix-1/2}(y)}f(2ix-1/2),$$

для четных l и аналогично для нечетных l:

$$S_2^{(\mathrm{ren})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y}{R}\,\frac{K_{2k+5/2}(y)+K_{2k+1/2}(y)}{\pi I_{2k+3/2}(y)}f(2k+3/2) =$$
$$= \frac{i}{2}\frac{y}{R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathrm{th}(\pi x)\frac{K_{2ix+3/2}(y)+K_{2ix-1/2}(y)}{\pi I_{2ix+1/2}(y)}f(2ix+1/2).$$

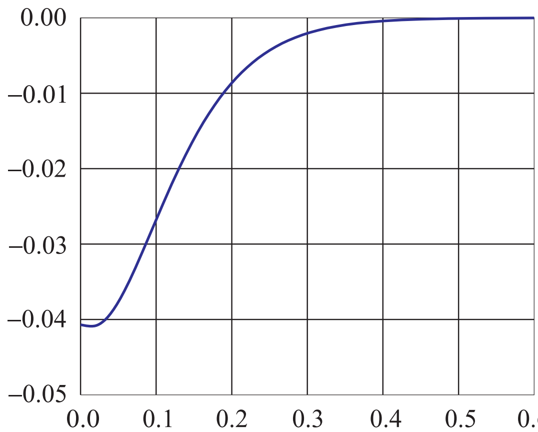
Оба представления получаются замыканием контура интегрирования бесконечной полуокружностью вправо от мнимой оси. В интегральном представлении существует гладкий предел при $\epsilon \to 0$, так что регуляризация может быть снята.

Окончательное выражение для перенормированного давления (4) примет вид

$$p(R) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}dt\,\frac{i}{2}\frac{y(t)}{R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathrm{th}(\pi x)\times$$
$$\times\left[\frac{-K_{2ix-3/2}(y(t))-K_{2ix+1/2}(y(t))}{\pi I_{2ix-1/2}(y(t))}+\right.$$
$$\left.+\frac{K_{2ix-1/2}(y(t))+K_{2ix+3/2}(y(t))}{\pi I_{2ix+1/2}(y(t))}\right],$$

где $y(t) = R\sqrt{t^2+m^2}$.

Это выражение оказывается конечным и экспоненциально убывающим с ростом массы поля m. Определенный интерес представляет то обстоятельство, что, хотя знаки перед функциями Макдональда в двух слагаемых подынтегрального выражения разные, оба слагаемых дают в окончательный ответ вклад одного знака.



Зависимость давления $p(R)$ от массы поля m для сферы единичного радиуса

Зависимость давления от массы поля при единичном радиусе сферы $R=1$ приведена на рисунке. Приводить здесь же график перенормированного стандартным образом давления нецелесообразно, поскольку сам характер убывания другой (обратный полиномиальный вместо экспоненциального). Однако представляет определенный интерес сравнение ответов для безмассового поля: при стандартном способе получаем 0.00282, полученный нами ответ составляет -0.0407. Наш ответ вполне согласуется по порядку величины с величиной $-\pi^2/480 = -0.0206$ — это давление, действующее на две плоскости, расстояние между которыми равно 1. Впрочем, среднее давление, действующее на грань единичного куба, на порядок меньше: -0.00524. Это и неудивительно, поскольку шар в определенном смысле является наиболее точным аналогом одномерного отрезка (совпадают даже энергии основных состояний), в то время как в кубе конкурируют два эффекта: с одной стороны, взаимодействие между двумя противоположными гранями, с другой — взаимодействие с прилегающими гранями (хорошо известно, что в двумерной задаче эта конкуренция даже приводит к изменению знака ответа — среднее давление на сторону квадрата составляет 0.0205).

Заключение

Предложенный нами метод перенормировки, сторого говоря, включает такие же произвольные действия, как и стандартный метод. При вычитании бесконечных вкладов с неизбежностью возникает произвол, который может быть устранен только с привлечением физических соображений о том или ином выборе точки нормировки. Как нам представляется, включение в поверхностную расходимость всех слагаемых, которые не убывают экспоненциально с ростом массы поля, представляется более физичным, чем добавление к расходящемуся ответу ответа для другой (внешней) задачи. Поскольку одним из способов описания эффекта Казимира является картина с виртуальной частицей, которая рождается, отражается от стенок области и затем поглощается, то зависимость эффекта от массы поля вида $\exp(-ma)$, где a — характерный размер области, представляется наиболее естественной. Кроме того, предложенный нами способ свободен от некоторых недостатков стандартного метода. Действительно, мы перенормировали именно исходную (внутреннюю) задачу для скалярного поля и совершенно не вводили в рассмотрение задачу внешнюю. Поэтому метод может быть применен и в случае сферической оболочки конечной толщины, и для сферической полости, вырезанной в кубе, и для диэлектрического шара с произвольной диэлектрической проницаемостью.

С другой стороны, предложенный метод требует исключительно «сильной» (избыточной) регуляризации, так что класс допустимых регуляризирующих функций заметно уже, чем при стандартном методе. Кроме того, предложенный метод требует последующего аналитического продолжения полученного перенормированного ответа. Наконец, он существенным образом использует сферическую симметрию рассматриваемой системы: вопрос о перенормировке давления для того случая, когда в рассматриваемой точке поверхность имеет два различных радиуса кривизны, требует дополнительного исследования.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить О.В. Павловского, М.В. Улыбышева и К.А. Свешникова за внимание к работе и плодотворные дискуссии.

Список литературы

1. *Casimir H.B.G.* // Proc. K. Ned. Akad. Wet. 1948. **51**. P. 793.
2. *Lamoreaux S.K.* // Phys. Rev. Lett. 1997. **78**. P. 5.
3. *Mohideen U., Roy A.* // Phys. Rev. Lett. 1998. **81**. P. 4549.
4. *Bordag M., Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M.* Advances in the Casimir effect. Oxford: Oxford University Press, 2009.
5. *Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M.* // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**. P. 1827.
6. *Munday J.N., Capasso F.* // Phys. Rev. A. 2007. **75**. P. 060102.
7. *Esposito G.* et al. // Phys.Rev. D. 2007. **76**. P. 025008.
8. *Fulling S.A.* et al. // Phys. Rev. D. 2007. **76**. P. 025004.
9. *Starobinsky A.A.* // Phys. Lett. B. 1980. **91**. P. 99.
10. *Elizalde E.* // J. Phys. A. 2006. **39**. P. 6299.
11. *Milton K.A.* // Phys. Rev. D. 1980. **22**. P. 1444. Phys. Rev. D. 1982. **25**. P. 3441; Phys. Rev. D. 1983. **27**. P. 439.
12. *Elizalde E., Bordag M., Kirsten K.* // J. Phys. A. 1998. **31**. P. 1743.
13. *Vassilevich D.V.* // Phys. Rep. 2003. **388**. P. 279.
14. *Milton K.A., Wagner J.* // J. Phys. A. 2008. **41**. P. 155402.
15. *Gies H., Klingmuller K.* // Phys. Rev. D. 2006. **74**. P. 045002.
16. *Fosco C.D., Lombardo F.C., Mazzitelli F.D.* // Phys. Rev. D. 2011. **84**. P. 105031.
17. *Мамаев С.Г., Трунов Н.Н.* // ТМФ. 1979. **38**. С. 345.
18. *Shroder O., Scardicchio A., Jaffe R.L.* // Phys. Rev. A. 2005. **72**. P. 012105.
19. *Bulgac A., Magierski P., Wirzba A.* // Phys. Rev. D. 2006. **73**. P. 025007.
20. *Bender C.M., Milton K.A.* // Phys. Rev. D. 19994. **50**. P. 6547.
21. *Boyer T.H.* // Phys. Rev. 1968. **174**. P. 1764.
22. *Davies B.* // J. Math. Phys. 1972. **13**. P. 1324.
23. *Elizalde E., Bordag M., Kirsten K., Leseduarte S.* // Phys. Rev. D. 1997. **56**. P. 4896.
24. *Nesterenko V.V.* et al. // J. Phys. A. 1998. **31**. P. 8661; *Nesterenko V.V., Pirogenko I.G.* // Phys. Rev. D. 1998. **57**. P. 1284.
25. *Blau S.K., Visser M., Wipf A.* // Nucl. Phys. B. 1988. **310**. P. 163.
26. *Dzyaloshinskii I.E., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* // Adv. Phys. 1961. **10**. P. 165.
27. *Rodriguez A.W.* et al. // Phys. Rev. A. 2007. **76**. P. 032106; *Rodriguez A.W.* et al. // Phys. Rev. A. 2007. **80**. P. 012115.
28. *Мостепаненко В.М., Трунов Н.Я.* // Успехи физ. наук. 1988. **156**. С. 385 (*Mostepanenko V.M., Trunov N.N.* // Sov. Phys. Usp. 1988. **31**. P. 965).
29. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974.

On one possible method for Casimir pressure renormalization within a sphere

A. I. Dubikovsky[1,a], **P. K. Silaev**[2,b], **O. D. Timofeevskaya**[2]

[1] *N. N. Bogoliubov Institute for Theoretical Problems of Microphysics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[2] *Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *dubikovs@bog.msu.ru,* [b] *silaev@bog.msu.ru.*

We propose a method for Casimir pressure renormalization for a massive scalar field within a sphere. This method differs somewhat from the commonly used one. An alternative method of choosing the normalization point leads not to an inverse polynomial dependence of pressure on the field mass, but to an exponential one. The proposed method does not use scalar fields quantized in the exterior region and thus allows one to circumvent the difficulties that are associated with the standard approach.

Keywords: quantized fields, vacuum in quantum field theory, zero point oscillations, Casimir effect.
PACS: 11.10.–z, 11.10.Gh.
Received 17 July 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2014).

Сведения об авторах

1. Дубиковский Андрей Игоревич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: dubikovs@bog.msu.ru.
2. Силаев Петр Константинович — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: silaev@bog.msu.ru.
3. Тимофеевская Ольга Дмитриевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: olga@goa.bog.msu.ru