Классическая электродинамика ускоренно движущегося протяженного заряда

М. Б. Эпендиев

Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН.
Россия, 101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., д. 4.
E-mail: m010148@mail.ru

Статья поступила 15.07.2014, подписана в печать 20.08.2014.

Протяженность заряда рассмотрена в варианте, когда пространственная структура покоящегося заряда является сферически-симметричной, а вектор тока линейно зависит от ускорения. Получено точное выражение для поля, зависящее от конкретного вида распределения заряда. В случаях, когда скорость заряда мало меняется за время прохождения расстояний порядка размеров заряда, получены приближения, зависящие от распределения через моменты низших порядков. Строго обоснована формула Лоренца–Абрагама–Дирака для радиационного трения (выяснено, из какого исходного выражения и при каких условиях получается эта формула). Исследовано поле излучения и показано, что в некоторых случаях больших ускорений излучение практически обнуляется. Намечены пути дальнейшего развития теории для более общих вариантов вектора тока (зависимость деформации структуры заряда от ускорения, учет случайных факторов и пр.).

Ключевые слова: классическая электродинамика, протяженный заряд, радиационное трение, формула Лоренца–Абрагама–Дирака.

УДК: 537.8. PACS: 03.50.De.

Введение

Многие проблемы релятивистской теории микрочастиц обусловлены представлением частиц материальной точкой. Процедуры перенормировок, призванные для устранения расходимостей, при всей своей эффективности нарушают внутреннюю целостность теории. Нерелятивистская классическая теория может описывать отдельную протяженную частицу, но до сих пор не уделялось достаточного внимания ее релятивистскому обобщению (возможно, из-за значительных математических трудностей, возникающих на этом пути).

Одной из задач, в которых точечная идеализация приводит к парадоксам, является взаимодействие заряда со своим полем. В частности, это касается торможения излучением (радиационное трение), описываемого формулой Лоренца–Абрагама–Дирака. Существующие процедуры вывода этой формулы [1–4], нельзя считать строгими. В одних методах сначала получают нерелятивистскую формулу, а затем придают этой формуле релятивистски-инвариантный вид [2]. В методе Дирака [3] действие поля на заряд учитывалось путем расчета предела разности запаздывающих и опережающих потенциалов при устремлении радиуса заряда к нулю. При этом для устранения расходимостей использовались различные процедуры перенормировок [5]. В протяженных моделях (например, заряженная сфера) расходимостей нет, однако существующие методы анализа таких моделей [6, 7] являются корректными лишь при достаточно малых ускорениях. Таким образом, в настоящее время альтернатива следующая: для точечного заряда привлекается процедура перенормировки, для протяженного ускорения считаются достаточно малыми.

В настоящей работе предполагается, что протяженность частицы имеет реальный смысл и может быть описана неким внутренним распределением заряда. Это распределение нам пока неизвестно, но мы можем выдвигать гипотезы о каких-то его общих свойствах и соответствующим образом формулировать тот или иной вариант вектора плотности тока. При этом конечные приближенные результаты зависят от этого распределения через его интегральные характеристики (полный заряд, моменты низших порядков, энергия поля покоящегося заряда и пр.).

Координаты точки пространства-времени (ПВ), в которой рассчитывается поле, будем обозначать через x^k ($k=0,1,2,3$; $x^0=ct$), а траекторию центра заряда — через $f^k(s)$, где параметром является интервал s такой, что $ds^2=df_k\,df^k$ (по повторяющимся сверху и снизу индексам проводится суммирование). Совокупность (4-вектор) $(q^0,q^1,q^2,q^3)=(q^0,\boldsymbol{q})$ иногда будем обозначать через q, не проставляя индекс. 4-вектор скорости $u=\dot f=df/ds$, причем направление s выбрано так, что $u^0=(1+\boldsymbol{u}^2)^{1/2}>1$). Если не указаны пределы интегрирования, то они бесконечные.

1. Вектор плотности тока

Интеграл вида

$$J^k(x)=\int j^k(x,s)\,ds \tag{1}$$

является 4-вектором тогда и только тогда, когда таковым является $j^k(x,s)$. Для точечного заряда (1) есть 4-вектор тока, если $j^k=ecu^k\delta^{(4)}(x-f)$, где e — величина заряда, c — скорость света. Однако замена в этом выражении 4-мерной дельта-функции ее реальным (протяженным) прообразом уже не дает 4-вектор. В частности, область, определяемая неравенствами $|x^k-f^k|\leqslant\delta_k$ ($k=0,1,2,3$; $\delta_k>0$ — заданные величины), не является релятивистски-инвариантной. Чтобы определить ограниченную область вокруг некоторой точки ПВ в скалярной форме, нужно задать еще по крайней мере один вектор.

У нас векторами являются: $\Delta = x - f$, u, $\dot{u} = du/ds, \ldots$ (x и f по отдельности не являются «чистыми» векторами, так как зависят от задания начала координат). Из них можно построить скалярные функции

$$\tau = u_k\Delta^k, \quad y = \dot{u}_k\Delta^k, \quad \Delta^2 = \Delta_k\Delta^k, \\ \sigma^2 = \tau^2 - \Delta^2 \geqslant 0, \quad \ldots . \tag{2}$$

Нетрудно убедиться, что неравенства $|\tau| \leqslant \delta_1$, $\sigma \leqslant \delta_2$ определяют ограниченную область ПВ при заданных положительных δ_1 и δ_2. Для покоящегося заряда $\tau = ct - s$, $\sigma = r$ (r — расстояние от центра заряда до точки наблюдения). Поэтому τ и σ можно назвать обобщенными временем и расстоянием.

Если пространственную структуру покоящегося заряда считать сферически симметричной, то мы можем положить $j^k = cq^kD(\tau,\sigma)$ и, полагая, что $D(\tau,\sigma)$ является локализованной и четной по обеим переменным функцией, искать варианты представления 4-вектора q^k. При $q^k = u^k$ уравнение неразрывности $\partial J^k/\partial x^k = 0$ выполняется лишь для равномерного движения. В общем случае необходимо учесть влияние ускорения. Предположим, что q^k линейно зависит от ускорения. Тогда из уравнения неразрывности следует, что $q^k = (1-y)u^k + \tau\dot{u}^k$ и

$$J^k = c\int\left[(1-y)u^k + \tau\dot{u}^k\right]D(\tau,\sigma)\,ds. \tag{3}$$

Отметим, что в силу локализованности функции D вектор j^k определен с точностью до слагаемого вида $d(P^kD)/ds$ (P^k — некоторый полином от Δ, u, $\dot{u}$), которое не дает вклада в интеграл (1). Например, иногда удобнее представить (3) в виде

$$J^k = c\int\left[(1-y)\left(\tau\frac{\partial D}{\partial\tau} + 2D\right) - \frac{y\tau^2}{\sigma}\,\frac{\partial D}{\partial\sigma}\right]u^k\,ds.$$

Отметим также, что

$$\int J^0(x)\,d^3x = 4\pi c\int_0^\infty d\sigma\,\sigma^2\int d\tau\,D(\tau,\sigma) = \mathrm{const} = ce. \tag{4}$$

2. Электромагнитное поле

Решение уравнений Максвелла

$$F^{kn}_{,n} = -\frac{4\pi}{c}J^k, \quad F_{kn} = A_{n,k} - A_{k,n}, \tag{5}$$

где $(\ldots)_{,k} = \partial(\ldots)/\partial x^k$, а J^k дается в (3), будем искать, ограничиваясь запаздывающими потенциалами A^k и учитывая условие Лоренца $A^k_{,k} = 0$. В результате получим

$$A^k = \int u^k(A - yQ)\,ds', \\ F_{kn} = \int\left[\left(\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial A}{\partial\sigma} - y\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right)b_{kn} + Qa_{kn}\right]ds', \tag{6}$$

где

$$A(\tau,\sigma) = \frac{2\pi}{\sigma}\int_0^\infty dz\,z\int_{|\sigma-z|}^{\sigma+z} D_1(\tau-\tau',z)\,d\tau', \tag{7}$$

$$Q = A - \frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_\tau^\infty \tau' A(\tau',\sigma)\,d\tau',$$

$$D_1(\tau,\sigma) = \tau\frac{\partial D}{\partial\tau} + 2D,$$

$$a_{kn} = u_k\dot{u}_n - \dot{u}_ku_n, \quad b_{kn} = u_k\Delta_n - \Delta_ku_n$$

(под интегралами везде $\Delta = \Delta(s')$, $u = u(s')$, $\ldots$).

Далее будем считать, что время не «расплывается» и

$$D = \delta(\tau)\mu(\sigma) \to j^k = c(1-y)u^k\,\delta(\tau)\mu(\sigma). \tag{8}$$

Так как функция $\mu(z)$ по определению является четной, то ее можно представить в виде

$$\mu = \frac{2}{\pi}B''(z),$$

где

$$(\ldots)' = \frac{\partial(\ldots)}{2z\partial z}, \quad B'(\infty) = 0, \quad B(\infty) = 0.$$

Тогда с учетом (8) получим из (7) следующие выражения для A и Q:

$$A = \theta(\tau)\frac{2}{\sigma}\left(B'^+ - B'^-\right), \tag{9}$$

$$B^+ = B(\sigma+\tau), \quad B^- = B(\sigma-\tau) = B(\tau-\sigma),$$

$$Q = \theta(\tau)\left[\frac{2}{\sigma}\left(B'^+ - B'^-\right) + \frac{2\tau}{\sigma^2}\left(B'^+ + B'^-\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sigma^3}\left(B^+ - B^-\right)\right].$$

$\theta(\tau)$ — ступенчатая функция: $\theta(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, $\theta(0) = 1/2$, $\theta(\tau) = 1$ при $\tau > 0$).

Функция $\mu(\sigma)$ является прообразом 3-мерной дельта-функции

$$\mu(\sigma) = \frac{e}{\sigma_0^3}\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right), \quad 4\pi\int_0^\infty \Phi(z)z^2\,dz = 1,$$

где $\Phi(z)$ быстро спадает при $|z| > 1$, а σ_0 можно назвать «радиусом» заряда. Указанная локализованность $\mu(\sigma)$ означает, что в (6) область интегрирования определяется соотношением $|s' - s_0| \lesssim \sigma_0$, где s_0 рассчитывается из уравнения

$$f^0(s_0) + R(s_0) = ct, \quad R(s) = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}(s)|, \quad x = (ct, \boldsymbol{r}). \tag{10}$$

Этим можно воспользоваться, если ускорения не слишком велики. Пусть степень стационарности скорости определяется величиной β_0 ($d/ds \sim 1/\beta_0$). Тогда в (6) все функции от s' можно разложить по степеням $s' - s_0$, если

$$\beta_0 \gg \sigma_0. \tag{11}$$

В общем случае это приводит к довольно громоздкой форме разложения поля, так как вид разложения $\sigma(s')$ зависит от соотношения между σ_0 и $\sigma(s_0)$. А вот в следующих двух вариантах

$$\sigma(s_0) \ll \sigma_0 \quad \text{или} \quad \sigma(s_0) \gg \sigma_0 \tag{12}$$

разложения упрощаются и интегрирование сводится к расчету «моментов»

$$q_{(n)} = 4\pi\int_0^\infty \mu(\sigma)\sigma^n\,d\sigma, \quad n = 1,2,3,\ldots \quad (q_{(2)} = e). \tag{13}$$

В первом варианте (12) мы получим поле вблизи центра заряда, а во втором — поле вне заряда.

Поле в центре заряда ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(s)$ и $s_0 = s$, $\Delta(s_0) = 0$). Пренебрегая производными скорости 4-го и выше порядков, с учетом (9) получим

$$F^{(0)}_{kn} = \frac{2}{3} q_{(1)} a_{kn} - \frac{2}{3} e P^{(0,2)}_{kn} + \\ + \left(\frac{\lambda a_{kn}}{60} + \frac{1}{6} P^{(0,3)}_{kn} + \frac{1}{12} P^{(1,2)}_{kn} \right) q_{(3)}, \tag{14}$$

$$\lambda = \ddot{u}_k u^k \geqslant 0, \quad P^{(l,m)}_{kn} = u^{(l)}_k u^{(m)}_n - u^{(m)}_k u^{(l)}_n, \quad u^{(m)}_k = \frac{d^m u_k}{ds^m}.$$

Величина $q_{(1)}$ расходится при $\sigma_0 \to 0$, если μ — знакоопределенная функция. Но если знакопеременная, то эта величина может обнулиться (например, $q_{(1)} \equiv 0$ при $\mu \sim \left((\sigma/\sigma_0)^2 - 1\right) \exp\left(-(\sigma/\sigma_0)^2\right)$).

Поле вне заряда. При $\sigma(s_0) \gg \sigma_0$ в (9) можно пренебречь вкладами от функций B^+ и B'^+. Величина s_0 теперь является функцией от ct и $\boldsymbol{r}$, определяемой уравнением (10). Интегралы (10) можно разложить с любой точностью по степеням малых параметров σ_0/β_0 и $\sigma_0/\sigma(s_0)$. Пренебрегая членами порядка $(\sigma_0/\sigma(s_0))^4$ и производными 3-го и выше порядков от скорости, получим

$$F^{(1)}_{kn} = e \left[\frac{y_0 - 1}{a_0^3} b^{(0)}_{kn} - \frac{1}{a_0^2} b^{(1)}_{kn} \right] + \\ + \left[\frac{v_0}{6a_0^5} b^{(0)}_{kn} + \frac{y_0}{2a_0^4} b^{(1)}_{kn} + \frac{a_{kn}(s_0)}{6a_0^3} - \frac{b^{(2)}_{kn}}{6a_0^3} \right] q_{(4)}, \tag{15}$$

где $a_0 = \sigma(s_0) = u_k(s_0)\Delta^k(s_0)$, $y_0 = \dot{u}_k(s_0)\Delta^k(s_0)$, $v_0 = \left(3y(1-2y) + 3\sigma\dot{y} - \sigma^2\lambda\right)\big|_{s=s_0}$, $b^{(m)}_{kn} = \left(u^{(m)}_k \Delta_n - \Delta_k u^{(m)}_n\right)\big|_{s=s_0}$. Первое слагаемое в (15) дает поле точечного заряда, определяемого известными потенциалами Лиенара–Вихерта. Однако это не означает, что второе слагаемое дает лишь поправки. В зависимости от соотношения между значениями β_0 и a_0 порядок вкладов слагаемых может меняться.

3. Взаимодействие заряда со своим полем

Если бы поле внутри заряда было бы достаточно однородным, то силу, действующую на заряд со стороны поля, можно было бы определить как силу Лоренца $g_k = eF^{(0)}_{kn} u^n / c^2$. Однако такое предположение оправдано лишь в методах, в которых размеры заряда устремляются к нулю и прибегают к перенормировкам для устранения расходимостей. Мы, считая, что заряд есть реально протяженная структура, и имея представление о поле, создаваемом таким зарядом, поступим так, как это диктуется классической теорией.

Часть лагранжиана, которая содержит поле заряда, полностью задается траекторией заряда в ПВ. Уравнение движения заряда выводится путем приравнивания к нулю вариации действия при вариациях траектории. При этом $u_k \delta u^k = 0$ и к функциональной производной по траектории от указанной части добавляется слагаемое $d(Pu^k)/ds$, где P выбирается так, чтобы $g_k u^k = 0$ (g_k — искомая сила). Полагая, что ток определяется в виде (8), получим общее выражение для силы

$$g_k(s) = \frac{1}{c^3} \int F_{kn}(x+f) j^n(x+f, s)\, d^4x + \dot{C}_k, \tag{16}$$

$$C_k = \frac{1}{c^2} \int \left[yA_k - yA_n u^n u_k - A_n \dot{u}^n x_k \right] \delta(\tau) \mu(\sigma)\, d^4x,$$

где $\tau = u_k x^k$, $y = \dot{u}_k x^k$, $\sigma^2 = \tau^2 - x_k x^k$, $A_k = A_k(x+f)$ (мы сдвинули переменные интегрирования $x \to x - f$). Аналогичное (16) выражение мы получим и для силы, действующей на заряд со стороны внешнего поля. С одной поправкой: внешнее поле не зависит от траектории заряда. Если внешнее поле мало меняется в пределах расстояний порядка размеров заряда, то внешняя сила есть сила Лоренца. Иначе и внешнюю силу придется рассчитывать исходя из выражения вида (16).

Разумеется, в общем случае результативный анализ (16) требует знания конкретного вида функции $\mu(\sigma)$. Но при выполнении условия (11) мы можем получить быстро сходящееся разложение, члены которого зависят от $\mu(\sigma)$ через ее интегральные характеристики. При этом второе слагаемое в (16) дает вклад, пропорциональный производным 4-го и выше порядков от скорости. Пренебрегая вкладами такого рода, из (16) получим

$$g_k = -M\dot{u}_k + \frac{2e^2}{3c^2}\left(\ddot{u}_k - \lambda u_k\right) + \alpha_0 \frac{1}{3c^2} \frac{d}{ds}\left(\frac{3}{2}\lambda u_k - \ddot{u}_k\right), \tag{17}$$

$$M = \frac{8}{c^2} \int_0^\infty B'^2(\sigma)\, d\sigma,$$

$$\alpha_0 = -16 \int BB'\, d\sigma = \int |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}| \mu(r)\mu(q)\, d^3x\, d^3q. \tag{18}$$

Для покоящегося заряда напряженности и полная энергия поля равны

$$\boldsymbol{E} = -\frac{4\boldsymbol{r}}{r^2} \left[\frac{1}{r} \int_0^r B'(\sigma)\, d\sigma - B'(r) \right], \quad \boldsymbol{H} = 0, \tag{19}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \boldsymbol{E}^2\, d^3x = 8 \int_0^\infty B'^2\, d\sigma = Mc^2. \tag{20}$$

Таким образом, величину M в (17) мы с полным основанием можем считать массой «покоя» поля и, перенося первое слагаемое в левую часть уравнения движения заряда, оперировать суммарной массой заряда и поля (в настоящее время только она нам и известна). Второе слагаемое в (17) совпадает с известным выражением для радиационного трения. Поправка (третий член) по отношению к первому слагаемому имеет порядок $(\sigma_0/\beta_0)^2$.

4. Излучение

При $r \to \infty$ для членов порядка $1/r$ получим

$$\boldsymbol{E} = -\frac{2}{r} \int \dot{\boldsymbol{b}} \frac{B'(z)}{\varepsilon}\, ds, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{b} = \frac{1}{\varepsilon}(u_0 \boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}), \quad \varepsilon = u_0 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{21}$$

$$z = \frac{1}{\varepsilon}\left[r - ct + f_0(s) - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{f}(s) \right].$$

Если имеет место условие (11), то в (21) можно произвести разложение по степеням $s - s_0$, где s_0 определяется уравнением (10), которое теперь переходит в $f_0(s) - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{f}(s) = ct - r$. Пренебрегая производными 4-го и выше порядков от скорости, получим

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{rc}\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} + \frac{q_{(4)}}{6rc^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon^2 \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}\right), \tag{22}$$

где $u_k = u_k(s_0)$, а s_0 является функцией от $ct - r$ и $\boldsymbol{n}$.

Большую актуальность представляют случаи, когда (11) не выполняется. И здесь в зависимости от вида распределения $\mu(\sigma)$ и динамики движения заряда возможны различные варианты, вплоть до практического обнуления излучения. Для примера рассмотрим периодическое движение. Заменяя в (21) переменную интегрирования s на $t' = f_0(s)/c$, получим

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{r\gamma_0}\int\limits_0^T \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t'}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \overline{\mu}\left(\frac{2\pi m\varepsilon}{\gamma_0}\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{\gamma_0} z\varepsilon\right)\right] dt', \tag{23}$$

где T — период колебаний, $\gamma_0 = cT$, $z = (r - ct + {} + ct' - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{f})/\varepsilon$, $\overline{\mu}(p) = (1/2)\int e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\mu(r)\,d^3x$. Если $\mu \sim \exp(-\sigma^2/\sigma_0^2)$, то при $\gamma_0 \simeq \sigma_0/2$ имеем $|\boldsymbol{E}| \sim 10^{-16} \times e/(r\gamma_0)$, и излучение практически обнуляется. Отметим, что (21)–(23) (впрочем, и все предыдущие результаты) имеют смысл и для нейтральных объектов, когда $q_{(2)} = e = 0$ (конечно, если структура содержит заряженные фрагменты).

5. Расплывание времени

В отличие от пространственной протяженности заряда, понятие «расплывание времени» не столь наглядно и нуждается в осмысливании в рамках классической теории. Мы оставим в стороне эту проблему и вкратце рассмотрим, что изменится в рассмотренном ранее случае при учете расплывания времени.

Пусть в (3) имеет место следующее обобщение (8):

$$\begin{gathered} D = V(\tau)\mu(\sigma), \qquad \int V(\tau)\,d\tau = 1, \\ V(\tau) = V(-\tau), \quad V(\tau)|_{|\tau| \gg ct_0} \to 0, \end{gathered} \tag{24}$$

где t_0 характеризует степень расплывания времени. Если $ct_0 \ll \beta_0$, то мы придем к небольшим уточнениям результатов, исходящих из условия (11). Но в случае $ct_0 \gtrsim \beta_0$ ситуация меняется. Ускорения могут быть малыми по сравнению с «радиусом» заряда (выполняется (11)), но мы уже не можем разлагать поле в ряд по производным от скорости. В то же время этот вариант в физическом плане кардинально отличается от случаев, когда нарушается (11).

Пространственная структура заряда определяется неизвестными нам внутренними силами. И может оказаться, что вариант $\sigma_0 \gtrsim \beta_0$ требует практически недостижимых ускорений. А вот расплывание времени может быть обусловлено главным образом внешними обстоятельствами. Например, для стационарных процессов (равномерное движение, установившиеся колебания или вращения...) мы можем допустить большие значения величины t_0.

Все это говорит о том, что имеет смысл исследовать поле в случаях, когда временная «размазанность» намного больше пространственной:

$$ct_0 \gg \sigma_0. \tag{25}$$

В этих случаях нетрудно получить из (6) и (7) разложение для поля и аналоги предыдущих результатов. Здесь ограничимся полем излучения. При $r \to \infty$ из (7) получим

$$\begin{gathered} A = \frac{e}{\sigma}G(\sigma - \tau), \quad Q = \frac{e}{\sigma^2}(\sigma - \tau)\,G(\sigma - \tau), \\ G(\tau) = \tau\frac{dV}{d\tau} + 2V. \end{gathered} \tag{26}$$

Это приводит к полю излучения

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{r}\int \dot{\boldsymbol{b}}\frac{G(z)}{\varepsilon}\,ds, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}, \tag{27}$$

которое отличается от (21) только заменой $2B'(z)$ на $-eG(z)$. При этом в приближении (22) получаем

$$q_{(4)} = 3e\int G(\tau)\tau^2\,d\tau, \tag{28}$$

а в представлении (23) имеется в виду спектр функции $G(\tau)$:

$$\overline{\mu}(p) \to \overline{G}(p) = e\int \cos(p\tau)G(\tau)\,d\tau. \tag{29}$$

Теперь в (22) «момент» $q_{(4)}$ значительно больший, и вклад второго слагаемого сказывается при меньших ускорениях. Аналогично в случае периодического движения поле излучения (23) практически обнуляется при гораздо меньших частотах колебаний.

6. Деформация структуры ускорением

Запись вектора тока в виде (3) подразумевала, что деформация структуры обусловлена лишь скоростью (лоренцевым сокращением). В случае (11) такое предположение оправданно. Однако нельзя исключать, что на деформацию влияет и ускорение. Это можно учесть введением зависимости распределения от $y = \dot{u}_k\Delta^k$. При этом заметно расширяется круг возможных вариантов для вектора тока (тем более, что придется вводить некий параметр, характеризующий «упругость» структуры). Мы остановимся на двух простейших.

В первом варианте $j_k = q_k D(\tau - gy, \sigma)$, где g — некоторая скалярная функция от s (или константа). Это приводит к «деформации» времени. Полагая, что q_k линейно зависит от $\ddot{u}$, получим

$$J_k = c\int\left[\left(1 - y + \dot{g}y + g\dot{y} - \lambda\tau g\right)u_k + \tau\dot{u}_k\right]D(\tau - gy, \sigma)\,ds. \tag{30}$$

Выше мы говорили, что расплывание времени требует физического осмысления. Временной «сдвиг», представляемый в (30), требует того же, и поэтому здесь мы оставим в стороне этот вариант.

Более наглядна деформация ускорением пространственной структуры заряда. Мы учтем эту деформацию представлением

$$j_k = q_k D(\tau, \sigma_1), \quad \sigma_1 = \sqrt{\sigma^2 + w_0 y^2}, \quad w_0 = \mathrm{const}. \tag{31}$$

Вектор q_k определяется уравнением неразрывности так, что

$$J_k = c \int \left[(1-y)\gamma u_k + \frac{1}{\gamma}\left(\tau + w_0 \dot{y}\right) \dot{u}_k \right] D(\tau, \sigma_1)\, ds, \quad (32)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + w_0 \lambda}, \quad \lambda = \ddot{u}_k u^k.$$

Особую роль в (32) играет константа w_0 (ее размерность — квадрат длины), представляющая свойства «упругости» структуры (для «абсолютно жесткой» структуры $w_0 = 0$, и (32) переходит в (3)). В зависимости от ее знака структуры можно разделить на устойчивые и неустойчивые. Если $w_0 < 0$, то при ускорениях, когда $\lambda w_0 \simeq -1$, (32) теряет физический смысл (например, при прямолинейном движении структура превращается в бесконечную «струну»). Это означает, что при достаточно больших ускорениях такая структура будет разрушаться. Если $w_0 > 0$, то особенностей нет и структура сжимается вдоль направления ускорения (разумеется, в той мере, в какой это «позволяют» внутренние силы). Очевидно, что и представление (32) имеет свои пределы применимости. Если $|w_0| \leqslant \sigma_0^2$, то мы еще можем рассматривать большие ускорения, при которых нарушается (11). Если же $|w_0| \gg \sigma_0^2$, то возможно, что эти пределы задаются как раз соотношением (11).

Процедура анализа поля, определяемого током (32), вполне аналогична приведенной выше. Если $|w_0| \leqslant \sigma_0^2$, то при условии (11) свойства «упругости» проявляются в слагаемых пропорциональных производным 3-го и выше порядков от скорости. Здесь мы не будем приводить все результаты (они довольно громоздкие) и ограничимся выражением для поля излучения.

При $r \to \infty$ в представлении $D = \delta(\tau)\mu(\sigma_1)$ получим

$$F_{ik} = -\frac{2}{r} \int \left\{ \frac{B'}{N} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\varepsilon} [n, u]_{ik} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{d}{dz} (B'z) \right) \frac{w_0 y_1}{\varepsilon \gamma^2 N^3} [n, m]_{ik} \right\} ds, \quad (33)$$

где

$$B' = -\pi \int_z^\infty \mu(\sigma)\sigma\, d\sigma, \quad z = [ct - r - f_0(s) + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}]/N,$$

$$N = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 \varepsilon^2 - w_0 \dot{\varepsilon}^2}, \quad y_1 = \lambda \varepsilon + \frac{w_0}{2\gamma^2} \dot{\lambda} \dot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon},$$

$$m_k = \varepsilon \dot{u}_k - \dot{\varepsilon} u_k, \quad [a, b]_{ik} = a_i b_k - a_k b_i,$$

$$n^k = (1, \boldsymbol{n}), \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r.$$

Очевидно, что (33) дает больше возможностей для поиска вариантов обнуления излучения, чем (21) ((33) переходит в (21) при $w_0 = 0$).

Заключение

Мы рассмотрели лишь несколько вариантов для вектора плотности тока. В частности, мы оставили в стороне варианты, когда помимо движения заряда в целом имеет место и внутренняя динамика, например, вращение структуры вокруг центра заряда. Кроме того, следует особо рассмотреть ультрарелятивистские случаи (при скоростях, близких к скорости света, полученные результаты сходятся медленнее). Все это говорит о наличии широкого фронта для дальнейшего развития теории. Возможно, при этом удастся «примирить» классику с некоторыми квантовыми явлениями. Свою роль в этом может сыграть и пока загадочное для классической теории «расплывание времени».

В работе не поднимался вопрос о природе внешних сил, приводящих к ускоренному движению заряда, предполагая, что большие ускорения могут возникать не только под действием классических электромагнитных сил, но, например, из-за флуктуационных явлений. Отметим также, что наряду с «расплыванием» времени возможны и другие варианты выхода за рамки детерминированных моделей. Например, если динамика движения частицы определяется некоторой плотностью вероятностей $\rho(f)$ и $u(s) = u(f)$, то интегралы $\int(\cdots)ds$ заменяются на $\int(\ldots)\rho\, d^4 f$ (при этом все результаты имеют статистический смысл). Можно предложить и другие способы «сбора» мгновенных токов j_k, в частности, заменяя интегрирование по интервалу суммированием (предполагая, что последовательность токов есть выборка некоего случайного процесса).

Автор благодарит проф. А. В. Борисова за полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. *Клепиков Н.П.* // Успехи физ. наук. 1985. **146**. С. 317.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. 8-е изд. М., 2003.
3. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1938. **167**. P. 148.
4. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. 2-е изд. М., 1983.
5. *Соколов И.В.* // ЖЭТФ. 2009. **136**. С. 247.
6. *Yaghjian A.D.* Relativistic Dynamics of a Charged Sphere. 2nd ed. N. Y, 2006.
7. *Rohrlich F.* // Amer. J. Phys. 1997. **65**. P. 1051.

Classical electrodynamics of an accelerated extended charge

M. B. Ependiev

A. A. Blagonravov Institute for Machine Science of the Russian Academy of Sciences, Moscow 101990, Russia.
E-mail: m010148@mail.ru.

The extent of an electric charge is considered under the assumption that the structure of the charge at rest is spherically symmetric and the current vector has a linear dependence on the acceleration. An exact expression for the electromagnetic field of the charge is obtained that depends on the specific form of the charge distribution. For the cases when the particle velocity does not considerably change over the time it covers the distance of the order of its own size, approximations are developed that depend on the charge distributions through its low-order momentums. The Lorentz–Abraham–Dirac expression is rigorously proven for radiation friction:

the initial expression and the conditions under which the expression can be derived are identified. The radiation field is also studied and it is demonstrated that in some cases of great accelerations the radiation virtually vanishes. Methods for the further development of the theory are pointed out as applied to more general forms of the current vector (dependence of the charge structure on the acceleration, consideration of random factors, etc.).

Keywords: classical electrodynamics, extended charge, radiation friction, Lorentz–Abraham–Dirac expression.
PACS: 03.50.De.
Received 15 July 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2014).

Сведения об авторе

Эпендиев Магомед Бухадиевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 423-10-97, e-mail: m010148@mail.ru.