Зависящие от времени неравенства Белла в форме Вигнера

Н. В. Никитин[1,a], В. П. Сотников[1,b], К. С. Томс[2,c]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

[2] *Университет Нью-Мексико, факультет физики и астрономии. США, NM 8713, Нью-Мексико, Альбукерке, 1919.*

E-mail: [a] nnikit@mail.cern.ch, [b] sotnikov@physics.msu.ru, [c] ktoms@mail.cern.ch

Статья поступила 30.07.2014, подписана в печать 28.08.2014.

Предложены зависящие от времени неравенства Белла в форме Вигнера, которые расширяют экспериментальные возможности проверки принципа дополнительности Н. Бора в релятивистской области и для нестационарных квантовых систем. Вывод данных неравенств основывается только на колмогоровской аксиоматике теории вероятностей и гипотезе локальности. В рамках квантовой теории нарушение полученных неравенств рассмотрено на примере осцилляций нейтральных B-мезонов.

Ключевые слова: неравенства Белла, неравенства Вигнера, локальный реализм, осцилляции тяжелых мезонов.

УДК: 539.182. PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ud.

Введение

Одним из фундаментальных вопросов квантовой физики, как нерелятивистской квантовой механики (НКМ), так и квантовой теории поля (КТП), является вопрос о том, насколько физические свойства микрообъектов связаны с процедурой их измерения и набором макроприборов, которые используются для осуществления данной процедуры. Согласно копенгагенской интерпретации квантовой механики не имеет смысла говорить о свойствах микрообъекта без указания того, каким образом эти свойства могут быть измерены. Поэтому максимальная информация о свойствах микрообъекта определяется количеством его характеристик, которые можно измерить макроприбором одного типа. В квантовой теории таким характеристикам отвечают совокупности коммутирующих между собой эрмитовых операторов.

Однако в рамках квантовой теории для описания свойств одной микросистемы оказывается возможным построить некоммутирующие между собой операторы, отвечающие наблюдаемым физическим величинам. Например, операторы, соответствующие разным проекциям спина $s=1/2$ на непараллельные направления. В НКМ и КТП оператор спина $s=1/2$ имеет вид $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{O}/2$. Декартовы проекции этого оператора удовлетворяют коммутационным соотношениям[1]

$$\left[O^i, O^j\right] = 2i\varepsilon^{ijk}O^k, \quad \varepsilon^{123}=+1.$$

Такие операторы не обладают общей системой собственных векторов. Считается, что это эквивалентно невозможности одновременного измерения определенного значения любых двух проекций спина на непараллельные направления любым макроскопическим прибором. Философским выражением данного факта является принцип дополнительности Н. Бора, а математическим — принцип неопределенности В. Гейзенберга.

По-видимому, в работе [1] был впервые поставлен вопрос о том, могут ли характеристики микросистемы, которые в теории описываются некоммутирующими операторами, быть одновременно элементами физической реальности, даже если эти характеристики невозможно совместно измерить ни одним макроприбором? С точки зрения копенгагенской интерпретации отрицательный ответ на этот вопрос был дан Н. Бором [2]. Однако этот ответ не содержал опровержение вопроса, поставленного в работе [1], а представлял иной философский взгляд на проблему измерения в НКМ. Красивая попытка перевести вопрос о совместном существовании элементов физической реальности, соответствующих некоммутирующим операторам, из умозрительной в экспериментальную плоскость была предпринята Дж. Беллом [3, 4] пятьдесят лет назад [5], развита Клаузером, Хорном, Шимони и Хольтом [6] и в дальнейшем изменялась, модифицировалась, уточнялась и критиковалась множеством оппонентов и последователей Дж. Белла. Достаточно полное представление об этом направлении можно получить из сборников работ и обзорных монографий [7–12].

Как записать, что некоторая совокупность наблюдаемых одновременно является элементом физической реальности, даже если эта совокупность совместно не может быть измерена никаким макроприбором? Одна из возможностей состоит в предположении, что совместная вероятность существования рассматриваемой совокупности наблюдаемых не отрицательна. Это предположение, однако без его четкой формулировки, было использовано Дж. Беллом в [3]. Явно идея о неотрицательности совместных вероятностей была высказана Э. Вигнером при получении неравенств,

---

[1] В НКМ $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{\sigma}$, в КТП выбор оператора спина $s=1/2$ неоднозначен. Например, при изучении неравенств Белла оказывается удобным использовать оператор вида $\boldsymbol{O}=-\gamma^5\boldsymbol{\gamma}+\gamma^5\frac{\boldsymbol{p}}{\varepsilon_p}+\frac{\boldsymbol{p}\gamma_5(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{p})}{\varepsilon_p(\varepsilon_p+m)}$, где $\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

которые в настоящее время носят название неравенств Белла в форме Вигнера (НБфВ), или просто неравенств Вигнера [13, 14]. В квантовой физике вычисление и измерение вероятностей является хорошо определенной процедурой. Поэтому НБфВ в некотором смысле являются более естественными, чем классические неравенства Белла [3] и [6], которые были сформулированы в терминах корреляторов для операторов двух наблюдаемых величин. Вывод классических неравенств Белла в терминах неотрицательных совместных вероятностей был впервые проделан в работе [15] и независимо переоткрыт в [16].

Одна из попыток последовательного релятивистского обобщения НБфВ была предпринята в работе [17]. Основная часть работы посвящена изучению при помощи аппарата КТП различных поправок к НБфВ в распаде псевдоскалярной частицы на фермион-антифермионную пару. Были изучены релятивистские поправки, связанные с непараллельностью импульсов фермионов в системе покоя распадающейся частицы (например, из-за излучения недетектируемых мягких фотонов) и поправки, связанные с конечностью расстояния до спиновых анализаторов. Оказалось, что все эти поправки практически не меняют вида классических неравенств [13, 14]. Однако в анализе [17] не было последовательно учтено, что рассматриваемые процессы протекают в конечном времени. Кроме того, в КТП, в отличие от НКМ, принципиально нельзя исключить взаимодействие полей друг с другом. Для учета указанных выше факторов требуется модифицировать НБфВ, введя в них явным образом зависимость от времени.

Хорошо известны зависящие от времени неравенства, которые основаны на идее макроскопического реализма. То есть на идее, что физическая наблюдаемая в каждый момент времени имеет определенное значение, а проведенное измерение не влияет на последующую динамику этой наблюдаемой. На этом пути существенный прогресс был достигнут при помощи неравенств Леггетта–Гарга [18], которые только по форме повторяют неравенства Белла [6], но вместо одновременного коррелятора двух наблюдаемых, связанных некоторым законом сохранения, они используют корреляцию между значениями одной наблюдаемой в разные моменты времени. Например, можно изучать корреляции между проекциями спина, измеренными в разные моменты времени, если спин испытывает прецессию в магнитном поле [19]. Экспериментальное исследование нарушений неравенства Леггетта–Гарга тесно связано с понятием слабого измерения [20, 21]. Для экспериментальной проверки неравенства Леггетта–Гарга можно использовать, например, наномеханические резонаторы [22]. В настоящее время активно обсуждаются различные обобщения неравенства Леггетта–Гарга [23] и возможности проверки неравенства Леггетта–Гарга в физике частиц [24]. Однако для исследования принципа дополнительности Н. Бора неравенства Леггетта–Гарга не подходят. Поэтому необходимо найти неравенства, которые бы комбинировали зависимость от времени с принципом локального реализма, при помощи которого выводятся не зависящие от времени (статические) неравенства Белла [3, 6, 13, 14].

В настоящее время имеется значительное количество работ, в которых были предприняты различные попытки включения зависимости от времени в классические неравенства Белла и в НБфВ. Историю вопроса можно проследить по публикациям [25–36] и ссылкам в них. Существенное число работ [28–32] содержит попытки написания НБфВ для осцилляций нейтральных псевдоскалярных мезонов. Обычно рассматриваются осцилляции K-мезонов. Вопросы, обсуждаемые в этих статьях, можно условно разделить на две группы. Во-первых, изучаются независящие от времени НБфВ в терминах «аромат» — «CP-нарушение» — «состояния с определенными массами и временами жизни». Идея этих работ берет свое начало с публикации [28]. Зависимость от времени учитывается на стадии подстановки в такие неравенства значений вероятностей, вычисленных в рамках квантовой механики. В этом случае НБфВ сводятся к неравенствам на параметры CP-нарушения ε и ε'. Во-вторых, делаются попытки введения в НБфВ дополнительных корреляционных функций, которые зависят от разности времен [32]. Имеется третий путь. В работах [25–27] авторы исходя из требований причинности и локальности записывают специальные зависящие от времени неравенства, которые могут проверить совместное существование одновременно неизмеримых величин. Однако эти неравенства не носят общего характера и выводятся только для специфической ситуации осцилляций нейтральных мезонов. Наконец, в работах [32–36] приводятся версии зависящих от времени неравенств типа неравенства [6]. Имеются определенные трудности с нарушением данных неравенств в квантовой механике.

Основным свойством всех неравенств Белла является то, что они никогда не нарушаются, если совместные вероятности неотрицательны и измерения локальны. Однако в квантовой физике можно указать такие конфигурации измерительной аппаратуры, которые приводят к нарушениям неравенств Белла. Поэтому целым рядом авторов делались попытки подвергнуть критике саму законность написания неравенств Белла и объяснить их взаимной несогласованностью входящих в них величин, а не тем, что квантовая механика правильно описывает свойства микрообъектов с точки зрения макроскопического наблюдателя [37–42]. Подобная критика требует более четкой формулировки предположений, необходимых для получения НБфВ.

Получению зависящих от времени НБфВ, основанных на колмогоровской аксиоматике теории вероятностей и принципе локального реализма, и исследованию возможности нарушения полученных неравенств на конкретных примерах из НКМ и КТП будет посвящена настоящая работа. В отличие от [25–27] мы не пытаемся радикально отказаться от концепции НБфВ. Более того, структура НБфВ естественно вытекает из нашего анализа. С другой стороны, в предлагаемом ниже подходе не возникает дополнительных корреляционных функций, которые меняют общую структуру неравенства, что отличает предлагаемый подход от подхода, применяемого в серии работ, стимулированных статьей [32]. И, наконец, предлагаемый в настоящей статье подход носит универсальный характер, что позволяет применить его не только к задаче об осцилляциях нейтральных мезонов, но и к широкому классу задач о поведении коррелированных систем во внешнем поле.

Работа состоит из введения, двух разделов и заключения. Во введении дается краткий обзор попыток включения зависимости от времени в неравенства Белла. В разделе 1 из условия неотрицательности совместных вероятностей для нескольких элементов физической реальности и предположения о локальности процедуры измерения выводятся зависящие от времени неравенства Белла в форме Вигнера. Раздел 2 посвящен обсуждению нарушения не зависящих и зависящих от времени НБфВ на примере осцилляций нейтральных B-мезонов. В заключении кратко формулируются основные результаты работы.

1. Неравенства Белла в форме Вигнера для антикоррелированной по спину пары фермионов при наличии взаимодействия с внешним полем

Получим зависящие от времени НБфВ, которые можно было бы использовать как в НКМ при наличии внешнего поля, так и в КТП при переходе к формализму представления взаимодействия. Доказательство проведем, используя логику работ [38–41]. В этих работах для получения не зависящих от времени неравенств Белла использовался подход, основанный на колмогоровской аксиоматике теории вероятностей.

Пусть, например, псевдоскалярная частица в момент времени t_0 распадается на фермион-антифермионную пару. Далее антифермиону будет сопоставляться индекс 1, а фермиону — индекс 2. Пусть проекции спинов фермиона и антифермиона на три непараллельные направления $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ одновременно являются элементами физической реальности. Для краткости будем обозначать проекции спина 1/2 на произвольную ось $\boldsymbol{n}$ как

$$s_{\boldsymbol{n}} = \pm\frac{1}{2} \equiv n_{\pm}.$$

Пусть далее индексы $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{+, -\}$. Тогда проекции спинов в начальный момент времени $t = t_0$ на каждое из направлений подчиняются антикорреляционному условию

$$a_{\pm}^{(1)}(t_0) = -a_{\mp}^{(2)}(t_0), \tag{1}$$

Заметим, что в КТП это условие выполняется автоматически, если распад происходит по сильному или электромагнитному взаимодействиям с сохранением P-четности. Пример гамильтониана, который автоматически обеспечивает полную антикорреляцию в начальный момент времени легко построить:

$$\mathcal{H}^{(PS)}(x) = g\varphi(x)\left(\bar{f}(x)\gamma^5 f(x)\right)_N, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — псевдоскалярное поле, $\bar{f}(x)$ и $f(x)$ — фермионные поля.

Определим пространство Ω элементарных исходов ω_i, таких, что элементом физической реальности является совокупность проекций спинов $\left\{a_{\alpha}^{(1)}b_{\beta}^{(1)}c_{\gamma}^{(1)}a_{\alpha'}^{(2)}b_{\beta'}^{(2)}c_{\gamma'}^{(2)}\right\}$. Это пространство не зависит от времени.

Для момента времени $t = t_0$ определим события $\mathcal{K}_{a_{\alpha}^{(1)}b_{\beta}^{(1)}c_{\gamma}^{(1)}a_{-\alpha}^{(2)}b_{-\beta}^{(2)}c_{-\gamma}^{(2)}}(t_0) \subseteq \Omega$, такие, что элементами физической реальности являются антикоррелированные по правилу (1) совокупности проекций спинов фермион-антифермионной пары на три непараллельных направления $\left\{a_{\alpha}^{(1)}b_{\beta}^{(1)}c_{\gamma}^{(1)}a_{-\alpha}^{(2)}b_{-\beta}^{(2)}c_{-\gamma}^{(2)}\right\}$. Множество таких событий по определению образуют σ-алгебру $\mathcal{F}(t_0)$. На $(\Omega, \mathcal{F})$ можно ввести вероятностную меру w, главное свойство которой состоит в том, что эта мера вещественна и всегда неотрицательна. Кроме того, она аддитивна (σ-аддитивна) для непересекающихся событий. Тогда можно доказать НБфВ вида

$$w\left(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) \leqslant w\left(c_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_+^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right). \tag{3}$$

Если в неравенстве (3) опустить момент времени t_0, то оно будет совпадать с хорошо известным НБфВ

$$w\left(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}\right) \leqslant w\left(c_+^{(2)}, b_+^{(1)}\right) + w\left(a_+^{(2)}, c_+^{(1)}\right). \tag{4}$$

Для доказательства (3) и, следовательно, (4) необходимо рассмотреть события

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(t_0) &= \mathcal{K}_{a_-^{(1)}b_+^{(1)}c_+^{(1)}a_+^{(2)}b_-^{(2)}c_-^{(2)}}(t_0) \cup \mathcal{K}_{a_-^{(1)}b_+^{(1)}c_-^{(1)}a_+^{(2)}b_-^{(2)}c_+^{(2)}}(t_0),\\
\mathcal{B}(t_0) &= \mathcal{K}_{a_-^{(1)}b_+^{(1)}c_-^{(1)}a_+^{(2)}b_-^{(2)}c_+^{(2)}}(t_0) \cup \mathcal{K}_{a_+^{(1)}b_+^{(1)}c_-^{(1)}a_-^{(2)}b_-^{(2)}c_+^{(2)}}(t_0),\\
\mathcal{C}(t_0) &= \mathcal{K}_{a_-^{(1)}b_+^{(1)}c_+^{(1)}a_+^{(2)}b_-^{(2)}c_-^{(2)}}(t_0) \cup \mathcal{K}_{a_-^{(1)}b_-^{(1)}c_+^{(1)}a_+^{(2)}b_+^{(2)}c_-^{(2)}}(t_0),
\end{aligned}$$

входящие в σ-алгебру $\mathcal{F}(t_0)$. Очевидно, что в совокупности индексов $\left\{a_{\alpha}^{(1)}b_{\beta}^{(1)}c_{\gamma}^{(1)}a_{-\alpha}^{(2)}b_{-\beta}^{(2)}c_{-\gamma}^{(2)}\right\}$ можно удерживать не все шесть, а только три индекса, которые характеризуют проекцию спина любого из фермионов на каждую из трех осей. Тогда

$$\begin{aligned}
w\left(a_+{}^{(2)}, b_+{}^{(1)}, t_0\right) &= \sum_{\omega_i \in \mathcal{A}(t_0)} \left(w\left(a_+{}^{(2)}, b_+{}^{(1)}, c_+{}^{(2)}, \omega_i\right) + \right.\\
&\qquad \left. + w\left(a_+{}^{(2)}, b_+{}^{(1)}, c_-{}^{(2)}, \omega_i\right)\right),\\
w\left(c_+{}^{(2)}, b_+{}^{(1)}, t_0\right) &= \sum_{\omega_j \in \mathcal{B}(t_0)} \left(w\left(a_+{}^{(2)}, b_+{}^{(1)}, c_+{}^{(2)}, \omega_j\right) + \right.\\
&\qquad \left. + w\left(a_-{}^{(2)}, b_+{}^{(1)}, c_+{}^{(2)}, \omega_j\right)\right),\\
w\left(a_+{}^{(2)}, c_+{}^{(1)}, t_0\right) &= \sum_{\omega_k \in \mathcal{C}(t_0)} \left(w\left(a_+{}^{(2)}, b_+{}^{(1)}, c_-{}^{(2)}, \omega_k\right) + \right.\\
&\qquad \left. + w\left(a_+{}^{(2)}, b_-{}^{(1)}, c_-{}^{(2)}, \omega_k\right)\right).
\end{aligned}$$

Сумма $w\left(c_+{}^{(2)}, b_+{}^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_+{}^{(2)}, c_+{}^{(1)}, t_0\right)$ определена на множестве

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}(t_0) \cup \mathcal{C}(t_0) = \\
&\quad = \left(\mathcal{K}_{a_-^{(1)}b_+^{(1)}c_-^{(1)}a_+^{(2)}b_-^{(2)}c_+^{(2)}}(t_0) \cup \mathcal{K}_{a_+^{(1)}b_+^{(1)}c_-^{(1)}a_-^{(2)}b_-^{(2)}c_+^{(2)}}(t_0)\right) \cup \\
&\qquad \cup \left(\mathcal{K}_{a_-^{(1)}b_+^{(1)}c_+^{(1)}a_+^{(2)}b_-^{(2)}c_-^{(2)}}(t_0) \cup \mathcal{K}_{a_-^{(1)}b_-^{(1)}c_+^{(1)}a_+^{(2)}b_+^{(2)}c_-^{(2)}}(t_0)\right),
\end{aligned}$$

подмножеством которого является событие $\mathcal{A}(t_0)$. Поэтому в силу неотрицательности вероятностей неравенство (3) доказано.

Меняя направления осей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на противоположные, как это уже делалось в работе [17], можно получить еще три неравенства, аналогичных неравенству (3):

$$\begin{aligned}
w\left(a_+^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right) &\leqslant w\left(c_+^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_+^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right),\\
w\left(a_-^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) &\leqslant w\left(c_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_-^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right),\\
w\left(a_-^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right) &\leqslant w\left(c_+^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_-^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Пусть за время $\Delta t = t - t_0$ фермион и антифермион разлетятся на достаточно большое расстояние. Тогда в силу предположения о локальности можно написать, что

$$
\begin{aligned}
&w\left(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t\right) = \\
&= w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) w\left(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) w\left(a_-^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) w\left(a_+^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) w\left(a_-^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right).
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись неравенствами (3) и (5), можно получить следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
&w\left(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t\right) \leqslant \\
&\leqslant w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) \times \\
&\qquad\times \left(w\left(c_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_+^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right)\right) + \\
&+ w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) \times \\
&\qquad\times \left(w\left(c_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_-^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right)\right) + \\
&+ w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) \times \\
&\qquad\times \left(w\left(c_+^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_+^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right)\right) + \\
&+ w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) \times \\
&\qquad\times \left(w\left(c_+^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right) + w\left(a_-^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right)\right) = \\
&= w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) \left(w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) + \right. \\
&\qquad\left. + w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right)\right) w\left(a_+^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) \left(w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) + \right. \\
&\qquad\left. + w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right)\right) w\left(a_-^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) \left(w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) + \right. \\
&\qquad\left. + w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right)\right) w\left(c_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) \left(w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) + \right. \\
&\qquad\left. + w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right)\right) w\left(c_+^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right).
\end{aligned}
$$

Таким образом, при наличии взаимодействия НБфВ начинают зависеть от времени и переходят в неравенство

$$
\begin{aligned}
&w\left(a_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t\right) \leqslant w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) \left(w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) + \right. \\
&\qquad\left. + w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right)\right) w\left(a_+^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) \left(w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) + \right. \\
&\qquad\left. + w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right)\right) w\left(a_-^{(2)}, c_+^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(b_+^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) \left(w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) + \right. \\
&\qquad\left. + w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right)\right) w\left(c_+^{(2)}, b_+^{(1)}, t_0\right) + \\
&+ w\left(b_-^{(1)}(t_0)\to b_+^{(1)}(t)\right) \left(w\left(a_+^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right) + \right. \\
&\qquad\left. + w\left(a_-^{(2)}(t_0)\to a_+^{(2)}(t)\right)\right) w\left(c_+^{(2)}, b_-^{(1)}, t_0\right). \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Следует особо подчеркнуть, что (6) доказано на множестве элементарных исходов Ω, которое не зависит от времени.

При отсутствии взаимодействий $w\left(a_-^{(2)}(t_0) \to a_+^{(2)}(t)\right) = w\left(b_-^{(1)}(t_0) \to b_+^{(1)}(t)\right) = 0$, в то время как $w\left(a_+^{(2)}(t_0) \to a_+^{(2)}(t)\right) = w\left(b_+^{(1)}(t_0) \to b_+^{(1)}(t)\right) = 1$. Поэтому (6) сводится к (3), как и должно быть с физической точки зрения. А неравенство (3) в свою очередь эквивалентно не зависящему от времени неравенству (4).

Зависящее от времени НБфВ (6) является основным результатом настоящей работы. Еще раз подчеркнем, что это неравенство можно использовать для проверки принципа дополнительности Н. Бора не только в НКМ, для чего в большинстве случаев вполне достаточно статического неравенства (4), но и в КТП, для которой применение статического неравенства некорректно, поскольку в представлении взаимодействия необходимо явно учитывать зависимость полной вероятности перехода от времени. Неравенство (6) также пригодно для нерелятивистских и релятивистских нестационарных задач, где корреляции между частицами явно зависят от времени. Поэтому неравенство (6) расширяет область и экспериментальные возможности проверки принципа дополнительности Н. Бора.

В следующем разделе будет приведен простой пример, который показывает, каким образом можно применять данное неравенство к реальной физической задаче. На этом примере можно проследить преимущества зависящего от времени неравенства (6) над статическим неравенством (4).

2. Зависящие от времени НБфВ для осцилляций нейтральных псевдоскалярных мезонов

Прежде всего заметим, что хотя в разделе 1 речь шла о проекциях спинов фермионов на разные оси, но по существу неравенство (6) было получено для любых трех дихотомных (т. е. принимающих всего два значения) наблюдаемых. Для проверки принципа соответствия Н.Бора важно лишь, чтобы в квантовой теории соответствующие этим наблюдаемым операторы попарно не коммутировали между собой.

Чтобы отчетливо продемонстрировать отличие (6) от (4), рассмотрим пример написания НБфВ для осцилляций нейтральных B-мезонов, в котором статические НБфВ (4) никогда не нарушаются, в то время как динамические неравенства (6) нарушаются почти всегда.

Основная идея написания статических неравенств Белла в данной задаче была предложена в работах [25, 28, 29] и развита в серии статей [31, 32, 34]. Ее суть заключается в том, что в системе нейтральных B-мезонов выделены три «направления», операторы проекций на которые не коммутируют друг с другом. Во-первых, это «направление» аромата B-мезона, т. е. проекция на состояния $|B\rangle = |\bar{b}q\rangle$ и $|\overline{B}\rangle = |b\bar{q}\rangle$, где $q = \{d, s\}$. Определим действие операторов зарядового ($\widehat{C}$) и пространственного ($\widehat{P}$) сопряжений на эти состояния как

$$\widehat{C}\widehat{P}|B\rangle = e^{i\alpha}|\overline{B}\rangle \quad \text{и} \quad \widehat{C}\widehat{P}|\overline{B}\rangle = e^{-i\alpha}|B\rangle,$$

где α — нефизическая произвольная действительная фаза CP-сопряжения. Эта фаза должна выпасть из любых неравенств, которые возможно проверять на эксперименте.

В качестве второго «направления» можно выбрать «направление» на состояния с определенным значением CP-четности, т. е. на состояния

$$|B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|B\rangle - e^{i\alpha}|\overline{B}\rangle\right), \quad |B_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|B\rangle + e^{i\alpha}|\overline{B}\rangle\right),$$

обладающие отрицательной и положительной CP-четностью соответственно. Наконец, третье «направление» задается состояниями с определенными значениями массы и времени жизни:

$$|B_L\rangle = p|B\rangle + q|\overline{B}\rangle \quad \text{и} \quad |B_H\rangle = p|B\rangle - q|\overline{B}\rangle.$$

Поскольку два последних состояния являются собственными векторами неэрмитового гамильтониана, отвечающими собственным значениям $E_L = m_L - i\Gamma_L/2$ и $E_H = m_H - i\Gamma_H/2$ соответственно (здесь и далее используется система единиц $\hbar = c = 1$), то эти состояния не ортогональны друг другу. Комплексные коэффициенты p и q подчиняются стандартному квантово-механическому условию нормировки

$$|p|^2 + |q|^2 = |\widetilde{p}|^2 + |q|^2 = 1,$$

где $\widetilde{p} = pe^{i\alpha}$. Распад $\Upsilon(4S) \to B\overline{B}$ задает волновую функцию $B\overline{B}$-системы в пространстве ароматов при $t = t_0$ в виде

$$|\Psi(t_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|B\rangle^{(2)}|\overline{B}\rangle^{(1)} - |\overline{B}\rangle^{(2)}|B\rangle^{(1)}\right). \tag{7}$$

Различать B-мезоны на 1-й и 2-й можно по направлению движения в экспериментальной установке (подробное обсуждение соответствующей процедуры можно найти в работах [28, 31, 32]).

С методологической целью кратко остановимся на выводе не зависящих от времени НБфВ. Будем следовать логике работы [32]. Воспользуемся соответствием $a_+ \to B_1$, $a_- \to B_2$, $b_+ \to \overline{B}$, $b_- \to B$, $c_+ \to B_H$ и $c_- \to B_L$. Тогда классическое статическое неравенство (4) перейдет в неравенство

$$w\left(B_1^{(2)}, \overline{B}^{(1)}, t_0\right) \leqslant w\left(B_1^{(2)}, B_H^{(1)}, t_0\right) + w\left(B_H^{(2)}, \overline{B}^{(1)}, t_0\right). \tag{8}$$

В рамках квантовой теории при помощи начального условия (7) можно найти, что

$$\begin{aligned}
w(B_1^{(2)}, \overline{B}^{(1)}, t_0) &= \left|\langle B_1^{(2)}|\langle \overline{B}^{(1)}|\Psi(t_0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(|\widetilde{p}|^2 + |q|^2\right),\\
w(B_1^{(2)}, B^{(1)}, t_0) &= \left|\langle B_1^{(2)}|\langle B^{(1)}|\Psi(t_0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(|\widetilde{p}|^2 + |q|^2\right),\\
w(B_1^{(2)}, B_H^{(1)}, t_0) &= \left|\langle B_1^{(2)}|\langle B_H^{(1)}|\Psi(t_0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\widetilde{p} - q\right|^2,\\
w(B_2^{(2)}, B_H^{(1)}, t_0) &= \left|\langle B_2^{(2)}|\langle B_H^{(1)}|\Psi(t_0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\widetilde{p} + q\right|^2,\\
w(B_H^{(2)}, \overline{B}^{(1)}, t_0) &= \left|\langle B_H^{(2)}|\langle \overline{B}^{(1)}|\Psi(t_0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\widetilde{p}\right|^2,\\
w(B_H^{(2)}, B^{(1)}, t_0) &= \left|\langle B_H^{(2)}|\langle B^{(1)}|\Psi(t_0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left|q\right|^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Подстановка вероятностей (9) в формулу (8) приводит к неравенству

$$|q|^2 - |\widetilde{p}|^2 \leqslant |\widetilde{p} - q|^2, \tag{10}$$

которое после переопределения p и q через параметр CP-нарушения ε совпадает с неравенством, полученным ранее в работе [28] для осцилляций нейтральных K-мезонов.

Поскольку нет однозначной связи между проекциями состояний на различные направления, то можно предположить, что $b_+ \to B$ и $b_- \to \overline{B}$. Тогда неравенство (4) переходит в следующее:

$$w(B_1^{(2)}, B^{(1)}, t_0) \leqslant w(B_1^{(2)}, B_H^{(1)}, t_0) + w(B_H^{(2)}, B^{(1)}, t_0), \tag{11}$$

из которого с учетом (9) следует неравенство

$$|\widetilde{p}|^2 - |q|^2 \leqslant |\widetilde{p} - q|^2. \tag{12}$$

Неравенства (10) и (12) единообразно можно записать следующим образом:

$$\left||\widetilde{p}|^2 - |q|^2\right| \leqslant |\widetilde{p} - q|^2. \tag{13}$$

Равенство достигается при $|\widetilde{p}| = |q|$ или при $|p| = |q|$, что соответствует случаю нейтральных B-мезонов. Все возможные переопределения «направлений» и проекций состояний B-мезонов на эти «направления» приводят к неравенству (13). В работах [31, 32] предполагалось, что неравенство (10) можно нарушить специальным выбором нефизической фазы α. Однако очевидно, что выполнение неравенств (10), (12) и (13) не зависит от α, как и должно быть для любых проверяемых в эксперименте взаимосвязей между физическими наблюдаемыми в квантовой теории. Поэтому статические НБфВ (4), написанные в терминах осцилляций нейтральных B-мезонов (8), (11), и аналогичные им неравенства не нарушаются и, следовательно, не дают возможности экспериментально проверить принцип дополнительности Н. Бора.

Теперь рассмотрим зависящие от времени НБфВ (6), записанные для системы нейтральных B-мезонов. Заметим, что при выводе формулы (6) нигде не было использовано условие нормировки вероятностей на единицу. Поэтому неравенство (6) справедливо для распадающихся частиц, когда нормировка векторов состояния зависит от времени. Пусть $a_+ \to B_1$, $a_- \to B_2$, $b_+ \to \overline{B}$, $b_- \to B$, $c_+ \to B_H$ и $c_- \to B_L$, как при выводе неравенств (8) и (11). Эволюция состояний $|B_L\rangle$ и $|B_H\rangle$ во времени элементарна:

$$|B_L(t)\rangle = e^{-im_L t - \Gamma_L t/2}|B_L\rangle, \quad |B_H(t)\rangle = e^{-im_H t - \Gamma_H t/2}|B_H\rangle.$$

Она следующим образом определяет эволюцию состояний $|B(t)\rangle$ и $|\overline{B}(t)\rangle$:

$$\begin{cases}
|B(t)\rangle = g_+(t)|B\rangle - \dfrac{q}{p}g_-(t)|\overline{B}\rangle,\\
|\overline{B}(t)\rangle = -\dfrac{p}{q}g_-(t)|B\rangle + g_+(t)|\overline{B}\rangle.
\end{cases}$$

Из этих формул легко найти эволюцию состояния $|B_1(t)\rangle$

$$|B_1(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(g_+(t) + \frac{p}{q}e^{i\alpha}g_-(t)\right)|B\rangle - \right.$$
$$\left. - \left(g_+(t)\,e^{i\alpha} + \frac{q}{p}g_-(t)\right)|\overline{B}\rangle\right),$$

где $g_\pm(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-iE_H t} \pm e^{-iE_L t}\right)$. Для функций $g_\pm(t)$ выполняются следующие соотношения:

$$|g_\pm(t)|^2 = \frac{e^{-\Gamma t}}{2}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right) \pm \cos(\Delta m t)\right),$$
$$g_+(t)g_-{}^*(t) = \frac{e^{-\Gamma t}}{2}\left(-\mathrm{sh}\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right) + i\sin(\Delta m t)\right),$$

где $\Gamma = (\Gamma_H + \Gamma_L)/2$, $\Delta\Gamma = \Gamma_H - \Gamma_L$ и $\Delta m = m_H - m_L$. Учитывая начальное условие (7), для волновой функции $B\overline{B}$-пары в произвольный момент времени можно написать

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i(m_H+m_L)t}\,e^{-\Gamma t}|\Psi(t_0)\rangle. \tag{14}$$

Для нейтральных B-мезонов $\left(\frac{q}{p}\right)^2 = e^{2i\alpha}$ [43]. Эксперимент дает следующее значение для модуля этого отношения [43]:

$$\left|\frac{q}{p}\right| = 1.0017 \pm 0.0017.$$

Поэтому, учитывая условие нормировки при $t = t_0$, с достаточной для наших целей точностью можно принять, что $|p|^2 \approx |q|^2 \approx 1/2$. Дальнейшие вычисления будут проводиться для случая, когда $q/p = e^{i\alpha}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&w\left(B_1^{(2)}(0) \to B_1^{(2)}(t)\right) = \left|\langle B_1(t)|B_1\rangle\right|^2 = e^{-\Gamma t}\,e^{-\Delta\Gamma t/2},\\
&w\left(B_2^{(2)}(0) \to B_1^{(2)}(t)\right) = \left|\langle B_1(t)|B_2\rangle\right|^2 = 0,\\
&w\left(\overline{B}^{(1)}(0) \to \overline{B}^{(1)}(t)\right) = \left|\langle \overline{B}(t)|\overline{B}\rangle\right|^2 = |g_+(t)|^2,\\
&w\left(B^{(1)}(0) \to \overline{B}^{(1)}(t)\right) = \left|\langle \overline{B}(t)|B\rangle\right|^2 = |g_-(t)|^2,\\
&w\left(B_1^{(2)}, \overline{B}^{(1)}, t\right) = \left|\langle B_1^{(2)}|\langle \overline{B}^{(1)}|\Psi(t)\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}e^{-2\Gamma t}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подстановка (9) и (15) в (6) дает зависящее от времени НБфВ в следующем виде:

$$1 \leqslant e^{-\Delta\Gamma t}. \tag{16}$$

Если $\Delta\Gamma = \Gamma_H - \Gamma_L > 0$, то неравенство (16) нарушается при любых значениях $t > 0$. Заметим, что неравенство (16) не противоречит статическому неравенству (13), поскольку при $q/p = e^{i\alpha}$ последнее также переходит в равенство.

Таким образом, хотя стационарное НБфВ в рассматриваем примере не нарушается ни при каком выборе p и q, нестационарное НБфВ при $q/p = e^{i\alpha}$ нарушается при любых значениях $t > 0$, если $\Delta\Gamma = \Gamma_H - \Gamma_L > 0$. Последнее условие для систем нейтральных $B_{d,s}$-мезонов экспериментально подтверждено [43].

Заключение

В работе при помощи колмогоровского формализма теории вероятности и принципа локального реализма получены зависящие от времени неравенства Белла в форме Вигнера (6). Эти неравенства можно использовать как в нерелятивистской квантовой механике при наличии классического внешнего поля, так и в квантовой теории поля, где принципиально невозможно исключить зависящее от времени взаимодействие между полями.

Рассмотрен пример применения неравенства (6) к задаче об осцилляциях нейтральных B-мезонов. Показано, что, несмотря на отсутствие нарушения статического неравенства (4) в рассматриваемом примере, зависящее от времени неравенство (6) может нарушаться при $t > 0$.

Авторы выражают благодарность доктору физ.-мат. наук С. П. Баранову (ФИАН имени П. Н. Лебедева) за многочисленные обсуждения вопросов, связанных с проверкой неравенств Белла в физике частиц, доктору А. Гринбауму (CEA-Saclay, Франция) за познавательные дискуссии по основам квантовой теории и К. Т. Алистеру (ЦЕРН) за создание благоприятной атмосферы, способствовавшей глубокому и плодотворному обсуждению предмета настоящей работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3042.2014.2) и Минобрнауки РФ (грант 14.610.21.0002).

Список литературы

1. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* // Phys. Rev. 1935. **47**. P. 777.
2. *Bohr N.* // Phys. Rev. 1935. **48**. P. 696.
3. *Bell J.S.* // Physics. 1964. **1**. P. 195.
4. *Bell J.S.* // Rev. Mod. Phys. 1966. **38**. P. 447.
5. *Wiseman H.* // Nature. 2014. **510**. P. 467.
6. *Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A., Holt R.A.* // Phys. Rev. Lett. 1969. **23**. P. 880.
7. Quantum Mechanics Versus Local Realism / Ed. by F. Selleri. N. Y.; L., 1988.
8. The Einstein–Podolsky–Rozen Paradox in Atomic, Nuclear and Particle Physics / Ed. by A. Afriat, F. Selleri. Science, 1999.
9. *Auletta G.* Foundations and Interpretations of Quantum Mechanics. Singapore, 2001.
10. Quantum (Un)speakables / Ed. by R. A. Bertlmann, A. Zeilinger. Springer, 2002.
11. *Reid M.D., Drummond P.D., Bowen W.P.* et al. // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**. P. 1727.
12. *Rosset D., Bancal J.D., Gisin N.* // arXiv:1404.1306 [quant-ph].
13. *Wigner E.P.* // Amer. J. Phys. 1970. **38**. P. 1005.
14. *Wigner E.P.* Symmetries and Reflections. Bloomington; L., 1970.
15. *Muynck W.M. de* // Phys. Lett. A. 1986. **114**. P. 65.
16. *Белинский А. В.* // Успехи физ. наук. 1994. **164**. С. 231.
17. *Nikitin N., Toms K.* // Phys. Rev. A. 2010. **82**. P. 032109.
18. *Leggett A.J., Garg A.* // Phys. Rev. Lett. 1985. **54**. P. 857.
19. *Kofler J., Brukner C.* // Phys. Rev. Lett. 2007. **99**. P. 180403.
20. *Aharonov Y., Albert D.Z., Vaidman L.* // Phys. Rev. Lett. 1988. **60**. P. 1351.
21. *Korotkov A.N., Jordan A.N., Buttiker M.* // Phys. Rev. Lett. 2006. **97**. P. 026805.
22. *Cole G.D., Wilson-Rae I., Werbach K.* et al. // Nature Comm. 2011. **2**. P. 231.
23. *Kofler J., Brukner C.* // Phys. Rev. A. 2013. **87**. P. 052115.

24. *Gangopadhyay D., Home D., Roy A.S.* // Phys. Rev. A. 2013.**88**. P. 022115.
25. *Privitera P., Selleri F.* // Phys. Lett. B. 1992. **296**. P. 261.
26. *Selleri F.* // Phys. Rev. A. 1997. **56**. P. 3493.
27. *Foadi R., Selleri F.* // Phys. Rev. A. 2000. **61**. P. 012106.
28. *Uchiyama F.* // Phys. Lett. A. 1997. **231**. P. 295.
29. *Bramon A., Nowakowski M.* // Phys. Rev. Lett. 1999. **83**. P. 1.
30. *Benatti F., Floreanini R.* // Eur. Phys. J. C. 2000. **13**. P. 267.
31. *Bertlmann R.A., Hiesmayr B.C.* // Phys. Rev. A. 2001. **63**. P. 062112.
32. *Bertlmann R.A., Grimus W., Hiesmayr B.C.* // Phys. Lett. A. 2001. **289**. P. 21.
33. *Genovese M., Novero C., Predazzi E.* // Found. Phys. 2002. **32**. P. 589.
34. *Bramon A., Escribano R., Garbarino G.* // Found. Phys. 2006. **36**. P. 563.
35. *Hiesmayr B.C., Di Domenico A., Curceanu C.* et al. // Eur. Phys. J. C. 2012. **72**. P. 1856.
36. *Donadi S., Bassi A., Curceanu C.* et al. // Found. Phys. 2013. **43**. P. 813.
37. *Андреев В.А., Манько В.И., Манько О.В., Щукин Е.В.* // ТМФ. 2006. **146**. С. 172; *Андреев В.А.* // ТМФ. 2009. **158**. С. 234.
38. *Khrennikov A.Yu.* // Nuovo Cimento. B. 1999. **115**. P. 179.
39. *Khrennikov A.Yu.* Interpretations of Probability. Utrecht, 1999.
40. *Khrennikov A.Yu.* // J. Math. Phys. 2000. **41**. P. 1768.
41. *Khrennikov A.Yu.* // J. Math. Phys. 2000. **41**. P. 5934.
42. *Griffiths R.B.* // Amer. J. Phys. 2011. **79**. P. 954; *Maudlin T.* // Amer. J. Phys. 2011. **79**. P. 966.
43. *Beringer J.* et al. (Particle Data Group Collaboration) // Phys. Rev. D. 2012. **86**. P. 010001.

Time-dependent Bell inequalities in a Wigner form

N. V. Nikitin[1,a], **V. P. Sotnikov**[1,b], **K. S. Toms**[2,c]

[1] *Department of Atomic Nucleus Physics and Quantum Theory of Collisions, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

[2] *Department of Physics and Astronomy, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico 87131, USA.*

E-mail: [a] *nnikit@mail.cern.ch,* [b] *sotnikov@physics.msu.ru,* [c] *ktoms@mail.cern.ch.*

We propose time-dependent Bell inequalities in a Wigner form, which expand the possibilities of experimental verification of Bohr's principle of complementarity in the relativistic domain and for nonstationary quantum-mechanical systems. Derivation of the proposed inequalities is based entirely on the Kolmogorov axiomatics of probability theory and the locality hypothesis. Violation of the obtained inequalities is considered in the framework of quantum theory based on the example of oscillations of neutral B mesons.

Keywords: Bell inequalities, Wigner inequalities, local realism, oscillations of heavy mesons.
PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ud.
Received 30 July 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2014).

Сведения об авторах

1. Никитин Николай Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-50-32, e-mail: nnikit@mail.cern.ch.
2. Сотников Василий Петрович — аспирант; тел.: (495) 939-50-32, e-mail: sotnikov@physics.msu.ru.
3. Томс Константин Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник ун-та Нью-Мексико (США); e-mail: ktoms@mail.cern.ch.