Учет эффекта пространственного заряда в гидродинамическом приближении

Е. Е. Перепёлкин[1,a], Н. Г. Иноземцева[2,b], Н. П. Репникова[1], М. Б. Садовникова

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

[2] *Международный университет природы, общества и человека «Дубна». Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, д. 19.*

E-mail: [a] *perepelkin.evgeny@phys.msu.ru,* [b] *nginozv@mail.ru*

Статья поступила 10.07.2014, подписана в печать 19.08.2014.

Предложена новая модель исследования влияния заряда пучка на эволюцию функции распределения плотности заряда. Рассматривается сферически симметричное распределение плотности заряда пучка, находящегося во внешнем однородном постоянном электрическом поле. Ставится новая нелинейная краевая задача об учете влияния собственного электрического поля пучка на эволюцию функции распределения плотности заряда. Решения такой задачи могут являться тестами в практически используемых методах расчета.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, ускорительная физика, эффект пространственного заряда.

УДК: 537.8, 532. PACS: 02.60.Lj, 47.11.–j, 41.20.–q.

Введение

Для учета эффекта пространственного заряда пучка используются различные модели [1, 2]. Среди них метод крупных частиц, метод моментов, решение уравнения Власова [3], а также различные варианты гибридных методов. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Например, решение кинетического уравнения Власова дает общую картину поведения пучка, однако приводит к необходимости решать сложную вычислительную задачу в шестимерном пространстве. Метод крупных частиц имеет широкое применение и содержит большое число моделей частиц [5–14]. Однако основная трудность этого метода заключается в правильном выборе модели частицы, а также в определении достаточного числа крупных частиц, которые используются в моделировании и, в частности, для корректного определения функции распределения плотности частиц.

На основе сказанного выше возникает вопрос о выборе параметров модели и о точности получаемых результатов. Поэтому видится интересным нахождение точных аналитических решений нелинейной задачи учета эффекта пространственного заряда [4]. Такие решения могут являться тестами для используемых в реальных расчетах методов, таких, например, как метод крупных частиц [15–22]

1. Постановка задачи

Рассмотрим сферически симметричное распределение плотности заряда пучка, находящегося во внешнем постоянном однородном электрическом поле $\boldsymbol{D}^e$. Помимо внешнего поля существуют собственные электромагнитные поля $\boldsymbol{D}^s$ и $\boldsymbol{H}^s$, вызванные эффектом пространственного заряда пучка. Будем рассматривать модель, когда влиянием собственного магнитного поля $\boldsymbol{H}^s$ на фокусировку пучка можно пренебречь по сравнению с кулоновским взаимодействием частиц. Пусть в начальный момент все частицы в пучке имеют одну и ту же скорость $\boldsymbol{v}_0$. Постановка задачи сводится к нахождению поведения описанной системы с течением времени. Заметим, что при сделанных предположениях распределение плотности заряда в таком пучке всегда будет сферически симметричным. Данный факт существенно облегчает нахождение точного решения.

Задачу будем решать в области $\Omega \subset R^3$. Запишем уравнение Максвелла для электрического поля:

$$\boldsymbol{D}_t + \boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{D}(p,t)$ — электрическое поле, заданное в каждой точке области Ω и зависящее от времени; $\boldsymbol{j}(p,t)$ — плотность тока, вызванная перетеканием заряда внутри пучка; $\boldsymbol{H}(p,t) = \boldsymbol{H}^s(p,t)$ — магнитное поле, создаваемое плотностью тока $\boldsymbol{j}(p,t)$.

Плотность тока может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{j}(p,t) = \rho_e(p,t)\boldsymbol{v}(p,t), \tag{2}$$

где $\rho_e(p,t)$ — плотность заряда в точке $p \in \Omega$ в момент времени t, а $\boldsymbol{v}(p,t)$ — скорость потока заряженных частиц в точке $p \in \Omega$ в момент времени t. Отметим, что в силу симметрии пучка скорость $\boldsymbol{v}(p,t)$ может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{v}(p,t) = \boldsymbol{V}_0(t) + \boldsymbol{u}(p,t),\ \boldsymbol{V}_0(t) = \boldsymbol{v}_0 + t\frac{q}{m\varepsilon_0}\boldsymbol{D}^e,$$

где $\boldsymbol{V}_0$ — скорость центра масс; $\boldsymbol{u}(p,t)$ — скорость в собственной системе координат пучка, а q и m — заряд и масса частицы соответственно.

Запишем магнитное поле, создаваемое таким пучком. В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа

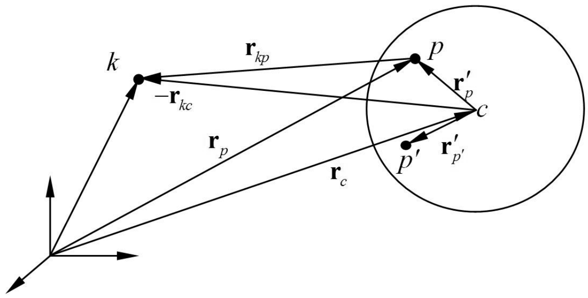
$$\boldsymbol{H}^s(k,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\left[\boldsymbol{j}(p,t), \nabla_p\frac{1}{r_{kp}}\right]\,d\omega_p =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\left[\boldsymbol{u}(p,t)\rho_e(p,t), \frac{\boldsymbol{r}_{kp}}{r_{kp}^3}\right]\,d\omega_p +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\left[\boldsymbol{V}_0\rho_e(p,t),\,\frac{\boldsymbol{r}_{kp}}{r^3_{kp}}\right]\,d\omega_p, \quad (3)$$

где символом $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ обозначено векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Покажем, что первый интеграл в выражении (3) равен нулю. В силу сферической симметрии пучка $\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{r}'_p$, где $\boldsymbol{r}'_p$ — радиус вектор из центра сферы к точке p (рисунок).



Интегрирование по области Ω

Для каждой точки p существует точка p', в которой значение подынтегральной функции $\frac{\rho_e(p,t)}{r^3_{kp}}[\boldsymbol{u}(p,t),\boldsymbol{r}_{kc}]$ совпадает по модулю со значением подынтегральной функции в точке p, но противоположно по знаку, поэтому

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\rho_e(p,t)}{r^3_{kp}}[\boldsymbol{u}(p,t),\boldsymbol{r}_{kc}]\,d\omega_p=0.$$

В результате выражение (3) примет вид

$$\boldsymbol{H}^s(k,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\left[\boldsymbol{V}_0,\,\rho_e(p,t)\frac{\boldsymbol{r}_{kp}}{r^3_{kp}}\right]\,d\omega_p=$$

$$=\left[\boldsymbol{V}_0,\,\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\rho_e(p,t)\frac{\boldsymbol{r}_{kp}}{r^3_{kp}}\,d\omega_p\right]=[\boldsymbol{V}_0(t),\boldsymbol{D}^s(k,t)]\,. \quad (4)$$

Учитывая уравнение Максвелла

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho_e \quad (5)$$

и используя формулы (4), (2) и (1), окончательно получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}^s+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{D}^s=\operatorname{rot}[\boldsymbol{V}_0,\boldsymbol{D}^s]\,. \quad (6)$$

Полученное уравнение (6) задает связь между электрическим полем $\boldsymbol{D}^s$ и скоростью потока заряда $\boldsymbol{v}$ в точке $p\in\Omega$ в момент времени t. Данное уравнение содержит два неизвестных, поэтому для его разрешения необходимо второе уравнение.

Второе уравнение может быть получено из закона сохранения момента движения $\boldsymbol{P}$. Для начала запишем закон сохранения массы M:

$$M=\int\limits_{\delta V}\rho_m\,d\omega,$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}=\int\limits_{\delta V}\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\,d\omega=-\int\limits_{\delta S}\rho_m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{S}=-\int\limits_{\delta V}\operatorname{div}(\rho_m\boldsymbol{v})\,d\omega, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_m\boldsymbol{v})=0.$$

Здесь ρ_m — плотность вещества, а интегрирование производилось по элементарному объему δV с площадью поверхности δS. Теперь запишем закон сохранения момента движения в предположении, что внешних сил нет и частицы между собой не взаимодействуют, получим

$$P_i=\int\limits_{\delta V}\rho_m v_i\,d\omega,\quad i=1,2,3,$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t}=\int\limits_{\delta V}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m v_i)\,d\omega=-\int\limits_{\delta S}(\rho_m v_i)v_j\,dS_j= \quad (8)$$

$$=-\int\limits_{\delta V}\nabla_j(\rho_m v_i)v_j\,d\omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m v_i)+\nabla_j(\rho_m v_i)v_j=0.$$

Рассмотрим случай, когда есть взаимодействие. Исходя из второго закона Ньютона, для одной частицы можно записать

$$\frac{d\widetilde{P}_i}{dt}=F_i, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на частицу с массой m и зарядом, т. е. $\boldsymbol{F}=\frac{q}{\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{D}^s+\boldsymbol{D}^e\right)$. Проинтегрируем по элементарному объему δV выражение (9) и учтем уравнение (8). Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m v_i)+\nabla_j(\rho_m v_i)v_j=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\left(D^s_i+D^e_i\right). \quad (10)$$

Распишем выражение (10) с учетом (7):

$$\rho_m\frac{\partial v_i}{\partial t}+\underbrace{v_i\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+v_i\nabla_j(\rho_m v_j)}_{=0}+\rho_m v_j\nabla_j(v_i)=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\left(D^s_i+D^e_i\right),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\nabla_j(v_i)=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}F_i, \quad (11)$$

где $\alpha=\frac{\rho_e}{\rho_m}=\frac{q}{m}$. Окончательно в векторной форме выражение (11) примет вид

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v}=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{D}^s+\boldsymbol{D}^e\right). \quad (12)$$

В результате получаем систему из двух уравнений (6) и (12) относительно неизвестных функций $\boldsymbol{v}(p,t)$ и $\boldsymbol{D}^s(p,t)$ с начальными условиями типа Коши:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(p,t)+\boldsymbol{v}(p,t)\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{D}(p,t)=\\ \qquad=\operatorname{rot}[\boldsymbol{V}_0(t),\boldsymbol{D}(p,t)],\quad p\in\Omega,\\ \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}(p,t)+(\boldsymbol{v}(p,t),\nabla)\boldsymbol{v}(p,t)=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}(p,t),\\ \boldsymbol{D}|_{t=0}=\boldsymbol{D}_0(p),\quad \boldsymbol{v}|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0,\\ \boldsymbol{V}_0(t)=\boldsymbol{v}_0+t\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}^e,\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^e+\boldsymbol{D}^s.\end{cases} \quad (13)$$

Полученную постановку необходимо дополнить условием на границе S области Ω, например $\left(\frac{\partial(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})}{\partial n}\right)\Big|_S=\frac{\partial\left(\boldsymbol{D}^s,\boldsymbol{n}\right)}{\partial n}\Big|_S=0$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к поверхности.

С физической точки зрения есть некая непрерывная среда, состоящая из однотипных заряженных частиц с отношением заряда к массе, равным α. Для этой среды в каждой точке области $p \in \Omega$ и момент времени t определена функция электрического поля $\boldsymbol{D}^s(p,t)$ и функция скорости потока заряда $\boldsymbol{v}(p,t)$. Данные функции могут быть найдены из решения краевой задачи (13). В результате, найдя $\boldsymbol{D}^s(p,t)$, можно получить плотность заряда $\rho(p,t)$ в каждой точке в любой момент времени по формуле (5). Полученную постановку задачи (13) будем для краткости называть DV-постановкой.

2. Построение решения DV-задачи

Рассмотрим вопрос существования решения задачи (13). Попробуем построить решение (13) в виде разложения в ряд по времени, т. е. ищем решение в виде

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(p,t) &= \boldsymbol{D}(p,0) + t\cdot\boldsymbol{D}_t(p,0) + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{D}_{tt}(p,0) + \ldots = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{D}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!}, \\
\boldsymbol{v}(p,t) &= \boldsymbol{v}(p,0) + t\cdot\boldsymbol{v}_t(p,0) + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{v}_{tt}(p,0) + \ldots = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Подставим (14) в постановку задачи (13), получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{D}}{\partial t^k}(p,0)\,\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{div}\frac{\partial^k \boldsymbol{D}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!} = \\
&= \operatorname{rot}\left[\boldsymbol{v}_0 + \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}^e t, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{D}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!}\right].
\end{aligned}$$

Соберем члены при одинаковых степенях t, получим

$$t^0: \quad \boldsymbol{D}_t(p,0) + \boldsymbol{v}(p,0)\operatorname{div}\boldsymbol{D}(p,0) = \operatorname{rot}[\boldsymbol{V}_0(0), \boldsymbol{D}(p,0)].$$

Данное равенство является верным тождеством, так как соответствует первому уравнению в (13) в момент времени $t=0$.

$$\begin{aligned}
t^1:\ &\boldsymbol{D}_{tt}(p,0) + \boldsymbol{v}_t(p,0)\operatorname{div}\boldsymbol{D}(p,0) + \boldsymbol{v}(p,0)\operatorname{div}\boldsymbol{D}_t(p,0) = \\
&= \operatorname{rot}([\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{D}_t(p,0)]) + \operatorname{rot}\left(\left[\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}^e, \boldsymbol{D}(p,0)\right]\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Перепишем выражение (15) в виде

$$\begin{aligned}
t^1:\ &\frac{\partial}{\partial t}\big[\boldsymbol{D}_t(p,t) + \boldsymbol{v}(p,t)\operatorname{div}\boldsymbol{D}(p,t) - \\
&- \operatorname{rot}[\boldsymbol{V}_0(t), \boldsymbol{D}(p,t)]\big]\big|_{t=0} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

В силу (13) выражение в квадратных скобках (16) равно нулю при любом t, следовательно, производная от него тоже будет равна нулю, т. е. получим верное тождество. Аналогичные выражения можно получить и для остальных степеней t. Проверим теперь для второго уравнения из (13) данные равенства, получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \\
&+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!}, \nabla\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!} = \\
&= \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{D}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Приравниваем члены при одинаковых степенях t:

$$t^0: \quad \boldsymbol{v}_t(p,0) + (\boldsymbol{v}(p,0),\nabla)\boldsymbol{v}(p,0) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}(p,0). \tag{17}$$

Получаем верное тождество, так как выражение (17) совпадает со вторым уравнением в постановке (13) в момент времени $t=0$. Для остальных степеней t получаются аналогичные результаты. Следовательно, решение (13) формально можно искать в виде (14), при условии, что начальные условия $\boldsymbol{v}(p,0)$ и $\boldsymbol{D}(p,0)$ обладают достаточной степенью гладкости.

Далее необходимо определить коэффициенты в разложениях (14). Для этого воспользуемся самими уравнениями (13). Например, в ряде для электрического поля $\boldsymbol{D}$ коэффициентами являются производные по времени, но их можно выразить из самого уравнения, которому удовлетворяет $\boldsymbol{D}$, т. е.

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}(p,0) = -\boldsymbol{v}(p,0)\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{D}(p,0) + \operatorname{rot}[\boldsymbol{V}_0(0), \boldsymbol{D}(p,0)].$$

Или, если воспользоваться начальными условиями, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}(p,0) = -\boldsymbol{v}_0\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{D}_0(p) + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{D}_0(p)], \tag{18}$$

т. е. первый коэффициент ряда для электрического поля полностью выражается через начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$ и пространственные производные начального распределения электрического поля $\boldsymbol{D}_0(p)$, которые известны. Для решения $\boldsymbol{v}$ имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(p,0) = -(\boldsymbol{v}_0,\nabla)\boldsymbol{v}_0 + \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}_0(p) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}_0(p). \tag{19}$$

Итак, получаем результат, аналогичный выражению (18): первый коэффициент в разложении в ряд решения $\boldsymbol{v}$ выражается через начальные условия. Получим выражение для второго коэффициента решения $\boldsymbol{D}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2}(p,0) &= -\boldsymbol{v}_t(p,0)\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{D}_0(p) - \boldsymbol{v}_0\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{D}_t(p,0) + \\
&+ \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{D}_t(p,0)] + \operatorname{rot}\left[\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}^e, \boldsymbol{D}(p,0)\right].
\end{aligned} \tag{20}$$

Величина $\boldsymbol{D}_t(p,0)$ известна из (18), а значение $\boldsymbol{v}_t(p,0)$ — из (19). Аналогичную операцию можно проделать для скорости:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2}(p,0) = -(\boldsymbol{v}_t(p,0),\nabla)\boldsymbol{v}_0 - (\boldsymbol{v}_0,\nabla)\boldsymbol{v}_t(p,0) + \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}_t(p,0).$$

Данную процедуру можно повторять необходимое число раз, тем самым получая коэффициенты разложения, которые будут выражаться через все более и более высокие порядки пространственных производных от начальных условий.

Таким образом, если в качестве начального распределения плотности частиц взять некую аналитическую функцию, то можно получить эволюцию функции распределения плотности заряда от времени.

Заключение

В работе дана новая постановка задачи, описывающая эволюцию функции распределения плотности заряда сферически симметричной системы. Найден формальный вид решения в виде степенных рядов. Эволюция системы на больших временах t определяется высшими порядками пространственных производных от начальных условий.

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л., 1946.
2. *Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И.* // ЭЧАЯ. 1987. **18**, №4. С. 53.
3. *Harlow F.H.* // Proc. of Symp. in Appl. Math. 1963. **15**. P. 269.
4. *Perepelkin E.E., Inozemtseva N. G., Zhavoronkov A. A.* // World J. of Condensed Matter Phys. 2014. N 4. P. 33.
5. *Greengard L.* The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems. Cambridge, 1988.
6. *Greengard L., Rokhlin V.* // J. Comput. Phys. 1987. N 73. P. 325.
7. *Hockney R., Eastwood J.* Computer Simulation Using Particles. Bristol, 1992.
8. *Potts D., Steidl G.* // SIAM J. Sci. Comput. 2003. N 24. P. 2013.
9. *Potts D., Steidl G., Nieslony A.* // Numer. Math.. 2004. N 98. P. 329.
10. *Potts D., Steidl G., Steidl G., Tasche M.* // Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications / Ed. by J. J. Benedetto and P. J. S. G. Ferreira. Boston: Birkhauser, 2001. P. 247.
11. *Steidl G.* // Adv. Comput. Math. 1998. N 9. P. 337.
12. *Geer S. van der, Loos M. de.* The General Particle Tracer Code. Design, Implementation and Application: PhD thesis. TU Eindhoven, 2001.
13. *Hackbusch W.* Multi-Grid Methods and Applications. Berlin, 1985.
14. *Poplau G., Rienen U. van, Loos M.J. de, Geer S.B. van der* // Proc. of EPAC. 2002. Paris. P. 1658.
15. *Perepelkin E.E., Vorozhtsov A.S., Vorozhtsov S.B., Onischenko L.M.* // Proc. of RuPAC. 2006. Novosibirsk, Russia. P. 348.
16. *Vorozhtsov S.B., Vorozhtsov A.S., Perepelkin E.E.* et al. // CNS-REP-76. 2006. University of Tokyo. P. 57.
17. *Perepelkin E., Vorozhtsov S. B., Vorozhtsov A.S.* et al. // RIKEN Accelerator Progress Report. 2009. **42**. P. 147.
18. *Perepelkin E., Vorozhtsov S.B., Vorozhtsov A.S.* et al. // RIKEN Accelerator Progress Report 2007. **41**. P. 92.
19. *Perepelkin E., Vorozhtsov S.* // Proc. of the XXI Russian Accelerator Conference (RuPAC-2008). Zvenigorod, Russia. September 28 — October 3. P. 40.
20. *Kaplan A.E., Dubetsky B.Y., Shkolnikov P.L.* // Phys. Rev. Lett. 2003. N 91. P. 143.
21. *Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Perepelkin E.E.* // Doklady Akademii Nauk. 2013. **452**, N 6. P. 608.
22. *Staats J., Weiland T., Kostial S., Richter A.* // Proc. of the 1999 Particle Accelerator Conf. PAC'99. New York. P. 2740.

A hydrodynamic approach to modeling the space charge problem

E. E. Perepelkin[1,a], N. G. Inozemtseva[2,b], N. P. Repnikova[1], M. B. Sadovnikova[1]

[1]*Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

[2]*Dubna International University for Nature, Society and Man. Dubna, Moscow Region 141980, Russia.*

E-mail: [a]perepelkin.evgeny@phys.msu.ru, [b]nginozv@mail.ru.

A new model is suggested to investigate the influence of a beam charge on the evolution of the charge-density distribution function. The spherically symmetric charge-density distribution of a beam acting on an external homogeneous constant electric field is considered. A new nonlinear boundary problem that takes the influence of a beam's electric field on the evolution of the charge-density distribution function into account is formulated. The solutions of such a problem can be used as tests in calculation methods that are applied in practice.

Keywords: nonlinear equations, acceleration physics, effect of charge distribution.
PACS: 02.60.Lj, 47.11.–j, 41.20.–q.
Received 10 July 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2014).

Сведения об авторах

1. Перепёлкин Евгений Евгеньевич — докт. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; e-mail: perepelkin.evgeny@phys.msu.ru.
2. Иноземцева Наталья Германовна — докт. физ.-мат. наук, доцент, профессор; e-mail: nginozv@mail.ru.
3. Репникова Надежда Павловна — аспирант; e-mail: natalia.repnikova@mail.ru.
4. Садовникова Марианна Борисовна — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник; e-mail: m.b.sadovnikova@phys.msu.ru.