О новых точных решениях задачи электростатики проводников

П. А. Поляков[a], Н. Е. Русакова[b], Ю. В. Самухина[c]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] polyakovpa@mail.ru, [b] rusakova@physics.msu.ru, [c] samukhina@physics.msu.ru

Статья поступила 04.07.2014, подписана в печать 27.07.2014.

Найден новый класс проводящих фигур, допускающих аналитическое решение основной задачи электростатики. Получены аналитические формулы для поверхностной плотности распределения заряда для трех фигур этого класса.

Ключевые слова: задача электростатики, аналитическое решение, поверхностная плотность распределения заряда.
УДК: 537.2. PACS: 41.20.Cv.

Введение

Известно считанное количество аналитических решений задач электростатики, которые подробно рассматриваются в классических учебниках, например [1, 2]. Может показаться, что этими примерами исчерпаны все возможные точные решения и для всех остальных задач электростатики решения могут быть получены либо приближенно, либо численно. Тем не менее до настоящего времени находятся новые оригинальные решения, например [3–20]. В настоящей работе предлагается новый класс нетривиальных аналитических решений задач электростатики заряженных проводников в вакууме.

1. Постановка задачи

Для определения указанного нового класса аналитических решений рассмотрим стандартную постановку задачи электростатики для заряженного проводящего тела в вакууме, а именно уравнение Лапласа для потенциала электростатического поля φ и граничное условие Дирихле, задающее постоянное значение потенциала на поверхности проводящего тела φ_Σ:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\varphi_\Sigma = \text{const}\,. \tag{2}$$

Хорошо известно, что в сферической системе координат уравнению Лапласа (1) во внешней области будет удовлетворять функция, определяемая суммой ряда по шаровым функциям [21]:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}}\cdot Y_n^k(\theta,\phi), \tag{3}$$

где $Y_n^k(\theta,\phi)$ — сферические функции [1].

Решению уравнения Лапласа будет также удовлетворять любая конечная сумма ряда (3). Решение внешней граничной задачи Коши (1), (2) будет получено, если нам удастся подобрать такие коэффициенты a_{nk}, при которых потенциал (3) на поверхности Σ нашего проводящего тела будет равен заданной константе φ_Σ в любой точке поверхности, т. е.

$$\varphi_\Sigma = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}}\cdot Y_n^k(\theta,\phi). \tag{4}$$

Выражение (4) относительно обратного радиуса $1/r$ является полиномом степени $n+1$, поэтому решение уравнения (4) для общего случая имеет аналитический вид только для полиномов не старше 4-го порядка, т. е. когда $n \leqslant 3$. В этом случае имеется 4 аналитических решения задачи Коши (1), (2) для замкнутых фигур, определяемых равенством (4). Форма поверхности этих фигур $(r = r(\theta,\varphi))$ задается аналитическими выражениями, определяемыми корнями соответствующих полиномиальных уравнений. В частности, при $n=0$ имеем случай однородно заряженной сферы. В настоящей работе рассмотрены новые аналитические решения для случаев $n=1$ и $n=2$. Подробно проанализированы три новые проводящие фигуры, для которых найдены точные аналитические формулы, описывающие поверхностную плотность распределения заряда.

В случае, когда нет зависимости от полярного угла ϕ (осесимметричный случай), формула (3) преобразуются к виду [1]

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{3} a_n\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \tag{5}$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра порядка n, $a_n = a_{nk}$ при $k=0$.

2. Уравнение поверхности и поверхностное распределение заряда для осесимметричного случая при $n = 1$

Для осесимметричного случая при $n=1$ из (5) имеем следующее уравнение поверхности:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a_0}{r} \pm \frac{a_1}{r^2}P_1(\cos\theta)\right) = \varphi, \quad \phi\in[0;2\pi), \tag{6}$$

где ε_0 — электрическая постоянная, a_1 и a_0 — некоторые постоянные, φ — постоянный потенциал поверхности рассматриваемой фигуры. Параметр a_0 имеет смысл суммарного электрического заряда q, распределенного по поверхности, задаваемой уравнением (6).

Разделим обе части равенства (6) на величину $a_0/4\pi\varepsilon_0 r_0$, равную потенциалу проводящей сферы радиуса r_0 с суммарным зарядом $q = a_0$. Тогда уравнение поверхности (6) примет следующий безразмерный вид:

$$\Psi x^2 - x \mp kP_1(\cos\theta) = 0, \tag{7}$$

где

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad k = \frac{a_1}{a_0 r_0}, \quad \Psi = \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\varphi}{q/(4\pi\varepsilon_0 r_0)}. \tag{8}$$

При выборе знаков «+» и «−» имеем две идентичные фигуры, зеркально симметричные относительно друг друга. Для определенности ограничимся знаком «−». Данное уравнение имеет два корня, но физический смысл имеет только один. В результате из (7) получим следующее уравнение поверхности в ранее введенных безразмерных сферических координатах:

$$x(\theta) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\Psi k \cos\theta}}{2\Psi}, \quad \phi \in [0; 2\pi), \tag{9}$$

где

$$1 + 4\Psi k P_1(\cos\theta) \geqslant 0. \tag{10}$$

Соотношение (10) накладывает ограничения на значения параметров Ψ и k.

Исследуем далее распределение плотности заряда на поверхности (9). Известно, что напряженность электрического поля, создаваемого проводником вблизи его поверхности, равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = |\nabla\varphi|, \tag{11}$$

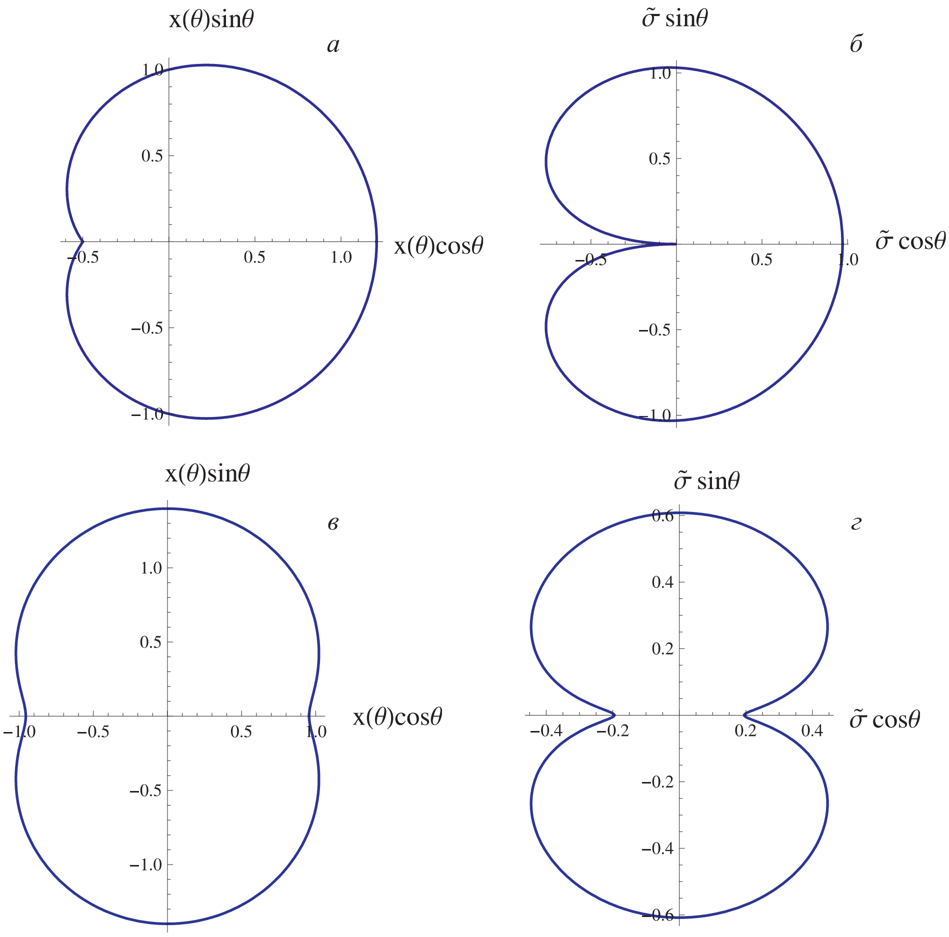
где σ — плотность распределения зарядов по поверхности проводника. Из (11) для плотности заряда для безразмерных величин (8) получим

$$\sigma = \frac{q}{4\pi r_0^2}\sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2}. \tag{12}$$

Введем безразмерную плотность заряда $\widetilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0$, где $\sigma_0 = q/4\pi r_0^2$ — плотность распределения заряда по поверхности сферического проводника радиуса r_0. Тогда, используя введенные выше обозначения, получим из (12) окончательную формулу для безразмерной поверхностной плотности распределения заряда:

$$\widetilde{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{1}{x^2(\theta)} + \frac{2k\cos\theta}{x^3(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{k\sin\theta}{x^3(\theta)}\right)^2}. \tag{13}$$

На рисунке, *а, б* приведены форма поверхности (9) и распределение заряда по поверхности фигуры (13) соответственно при значениях параметров $\Psi = 1$ и $k = 0.25$ в сечении плоскостью, перпендикулярной плоскости Oxy (ось z на рисунке горизонтальна). Эти значения параметров являются критическими, при превышении данных значений полученная поверхность будет разрывной.



Осесимметричный случай при $n = 1$. Форма поверхности тела вращения, определяемая формулой (9), в сечении плоскостью, перпендикулярной плоскости xy (*а*); распределение заряда по поверхности тела вращения, определяемое формулой (13), в сечении плоскостью, перпендикулярной плоскости xy (*б*). Осесимметричный случай при $n = 2$. Форма поверхности тела вращения, определяемая формулой (16), в сечении плоскостью, перпендикулярной плоскости xy (*в*); распределение заряда по поверхности тела вращения, определяемое формулой (17), в сечении плоскостью, перпендикулярной плоскости xy (*г*)

3. Уравнение поверхности и поверхностное распределение заряда для осесимметричного случая при $n = 2$

Для осесимметричного случая при $n = 2$ из (5) имеем следующее уравнение поверхности:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a_0}{r} \pm \frac{a_2}{r^3}P_2(\cos\theta)\right) = \varphi.$$

Введем безразмерные параметры

$$\kappa = \varepsilon/r_0^2, \quad \varepsilon = a_2/a_0. \tag{14}$$

С учетом (14) уравнение поверхности примет вид

$$\Psi x^3 - x^2 \mp \kappa P_2(\cos\theta) = 0. \tag{15}$$

А. Рассмотрим случай со знаком «+»:

$$\Psi x^3 - x^2 + \kappa P_2(\cos\theta) = 0.$$

Данное уравнение имеет три корня, два из которых мнимые. Действительный корень определяется выражением

$$x_1(\theta) = \frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi\left(L(\theta) + \sqrt{-4 + L^2(\theta)}\right)^{1/3}} + \frac{\left(L(\theta) + \sqrt{-4 + L^2(\theta)}\right)^{1/3}}{3\cdot 2^{1/3}\Psi}, \tag{16}$$

где введено обозначение $L(\theta) = 2 - \frac{27}{2}\Psi^2\kappa(-1 + 3\cos^2\theta)$. При этом существует ограничение на параметры Ψ и κ:

$$-4 + \left(2 - 27\Psi^2\kappa(-1 + 3\cos^2\theta)\right)^2 \geqslant 0.$$

Произведя расчеты, аналогичные разделу 2, получим окончательную зависимость безразмерной плотности распределения заряда по поверхности тела от азимутального угла, параметра κ и безразмерного потенциала Ψ:

$$\widetilde{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{3\kappa(-1 + 3\cos^2\theta)}{2x_1^4(\theta)} - \frac{1}{x_1^2(\theta)}\right)^2 + \frac{9\kappa^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{x_1^8(\theta)}}, \tag{17}$$

где $x_1(\theta)$ определяется формулой (16).

На рисунке, *в, г* показаны форма поверхности фигуры (16) и поверхностное распределение заряда (17) при критических значениях параметров $\kappa = 0.25$, $\Psi = 0.76$ в сечении плоскостью, перпендикулярной плоскости Oxy (ось z на рисунке горизонтальна).

Б. Рассмотрим случай, когда в уравнении (15) перед параметром κ стоит знак «$-$»:

$$\Psi x^3 - x^2 - \kappa P_2(\cos\theta) = 0. \tag{18}$$

Данное уравнение имеет 3 корня, два из которых мнимые. Из (18) получаем следующее уравнение поверхности в безразмерных сферических координатах:

$$x_2(\theta) = \frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi\left(M(\theta) + \sqrt{-4 + M^2(\theta)}\right)^{1/3}} + \frac{\left(M(\theta) + \sqrt{-4 + M^2(\theta)}\right)^{1/3}}{3\cdot 2^{1/3}\Psi}, \tag{19}$$

где введено обозначение $M(\theta) = 2 + \frac{27}{2}\Psi^2\kappa(-1 + 3\cos^2\theta)$.

Аналогично описанному выше алгоритму получим выражение для безразмерной плотности распределения заряда по поверхности данной фигуры вращения:

$$\widetilde{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{3\kappa(-1 + 3\cos^2\theta)}{2x_2^4(\theta)} + \frac{1}{x_2^2(\theta)}\right)^2 + \frac{9\kappa^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{x_2^8(\theta)}},$$

где $x_2(\theta)$ определяется формулой (19).

Заключение

Таким образом, в настоящей работе показано, что существует конечный класс новых аналитических решений задач электростатики, который определяется возможностью аналитического решения уравнения для полинома N-й степени. В общем случае аналитическое решение возможно для полиномов не старше 4-го порядка.

В работе показано, что имеются новые трехмерные проводящие фигуры, которые допускают решение задачи электростатики. Подробно исследованы три фигуры (одна несимметричная и две симметричные). Для этих фигур получены аналитические формулы для поверхностной плотности распределения заряда. Исследованы особенности распределения заряда и построены соответствующие графики.

Список литературы

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. 4-е изд. М., 2005.
2. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М., 1954.
3. *Polyakov P.A., Rusakova N.E., Samukhina Yu.V., Giudjenov I.* // Math. and Natural Sci. 2013. **3**. P. 33.
4. *Поляков П.А., Русакова Н.Е., Самухина Ю.В.* // Сборник трудов 21-й Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». 2013.
5. *Lekner J.* // J. of Electrostatics. 2010. **68**. P. 299.
6. *Ping Zhu, Yi Jie Zhu.* // J. of Electrostatics. 2012. **70**. P. 25.
7. *Kolikov K., Ivanov D., Epitropov Y., Bozhkov S.* // J. of Electrostatics. 2012. **70**. P. 91.
8. *Ciftia O.* // J. of Electrostatics. 2013. **71**. P. 102.
9. *Le Ru E.C., Etchegoin P.G.* // J. Chem. Phys 2009. **1309**. P. ???.
10. *Jiang Z.* // J. of Electrostatics. 2003. **58**. P. 247.
11. *Giuliani G.F., Vignale G.* ???. Cambridge University Press, 2005. P. 13.
12. *Bernu B., Delyon F., Duneau M., Holzmann M.* // Phys. Rev. B. 2008. **78**. P. 245110.
13. *Ciftja O.* // J. Math. Phys. 2011. **52**. P. 122105.
14. *Ciftja O.* // Phys. Lett. 2010. **A 374**. P. 981.
15. *Ciftja O.* // Eur. J. Phys. 2011. **32.** P. 55.
16. *Ciftja O.* // Mod. Phys. Let. 2009. **B 23**. P. 3055.
17. *Aghamohammadi A.* // Eur. J. Phys. 2011. **32**. P. 633.
18. *Ishizuki M.I., Takemiya H., Okunishi T., Takeda K.* // Phys. Rev. B. 2012. **85**. P. 155316.
19. *Akbar S., Lee I.-H.* // Phys. Rev. B. 2001. **63**. P. 165301.
20. *Zhu P.* // J. Yunnan Noumal Univ. 2005. P. 42.
21. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. Пер. с англ. под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Карамзиной. М., 1979.

On new exact solutions to the problem of electrostatics of conductors

P. A. Polyakov[a], **N. E. Rusakova**[b], **Yu. V. Samukhina**[c]

Department of General Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]*polyakovpa@mail.ru,* [b]*rusakova@physics.msu.ru,* [c]*samukhina@physics.msu.ru.*

A new class of conducting figures that allow an analytical solution of a main task of electrostatics was found. Analytical formulas for the surface density of the charge for three figures of this class were obtained.

Keywords: the problem of electrostatics, analytical solution, surface charge density.
PACS: 41.20.Cv.
Received 4 July 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2014).

Сведения об авторах

1. Поляков Пётр Александрович — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-14-89; e-mail: polyakovpa@mail.ru.
2. Русакова Наталья Енчуновна — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (495) 939-14-89, e-mail: rusakova@physics.msu.ru.
3. Самухина Юлия Владимировна — аспирант; e-mail: samukhina@physics.msu.ru.