ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Гидродинамическое приближение задачи пространственного заряда в терминах функции плотности заряда ρ и поля скоростей v

Н. Г. Иноземцева[1,a], Н. П. Репникова[2,b]

[1] *Международный университет природы, общества и человека «Дубна». Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, д. 19.*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статичтики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
E-mail: [a] *nginozv@mail.ru,* [b] *natalia.repnikova@mail.ru*

Статья поступила 26.11.2014, подписана в печать 16.12.2014.

В работе предложена постановка задачи пространственного заряда в рамках гидродинамического приближения. Предложенная постановка сформулирована в терминах функции плотности заряда ρ и векторного поля скоростей среды $\boldsymbol{v}$ (ρv-постановка). В отличие от Dv-постановки ρv-постановка может использоваться для несимметричных распределений плотности заряда. Описан формальный вид решения краевой задачи и рассмотрены его свойства.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, математическая физика, эффект пространственного заряда.
УДК: 537.8, 532. PACS: 02.60.Lj, 47.11.–j, 41.20.–q.

Введение

Рассмотрению проблемы многих взаимодействующих частиц посвящены работы [1–7]. При моделировании динамики пучка высокой интенсивности в ускорительной физике одной из наиболее вычислительно емких задач является учет эффекта пространственного заряда [8–12]. Задача пространственного заряда является нелинейной, так как для расчета плотности распределения частиц пучка в следующий момент времени требуется знание распределения собственного электрического поля пучка, которое зависит от самого распределения частиц. Из-за сложной геометрии установки и разнообразных параметров пучков задачу пространственного заряда приходится решать численно с использованием различных приближений и методов. Среди численных методов наибольшее распространение получил «метод крупных частиц» [13–19]. При создании программного кода является актуальным и практически значимым вопрос корректности работы программы [20]. Если существует модельная задача с точным решением, то на ней можно проверить корректность работы программного кода. Но не всегда удается найти точное решение нелинейной задачи, поэтому каждое такое решение является важным.

В работах [21–23] предложено рассмотрение задачи пространственного заряда в рамках гидродинамического приближения относительно вектора электрического поля $\boldsymbol{D}$ и поля скоростей среды $\boldsymbol{v}$. Для такой Dv-постановки (1) формально построено точное решение в виде ряда [21], а также рассмотрены особенности численного решения задачи [22–23]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(p,t)+\boldsymbol{v}(p,t)\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{D}(p,t)=\operatorname{rot}[\boldsymbol{V}_0(t),\boldsymbol{D}(p,t)],\quad p\in\Omega,\\
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}(p,t)+(\boldsymbol{v}(p,t),\nabla)\boldsymbol{v}(p,t)=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}(p,t), \qquad (1)\\
\boldsymbol{V}_0(t)=\boldsymbol{v}_0+t\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}^e,\quad \boldsymbol{D}(p,t)=\boldsymbol{D}^e+\boldsymbol{D}^s(p,t),\\
\boldsymbol{D}|_{t=0}=\boldsymbol{D}_0(p),\quad \boldsymbol{v}|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0,
\end{gathered}
$$

где символом $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ обозначено векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, символом $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ обозначено скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, символ ∇ — дифференциальный оператор набла, ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума, $\boldsymbol{v}_0$ — постоянный вектор начальной скорости. Переменная p соответствует пространственным координатам (x,y,z), а переменная t — времени. Вектор-функция $\boldsymbol{D}(p,t)$ — вектор электрического поля; $\boldsymbol{v}(p,t)$ — векторное поле скоростей среды; $\boldsymbol{D}^e$ — внешнее постоянное электрическое поле; $\boldsymbol{D}^s$ — собственное электрическое поле пучка. Постоянная $\alpha=q/m$ задает соотношение между зарядом и массой частиц. Ω — область, в которой рассматривается решение системы. Эта система в совокупности с начальными условиями приводит к постановке задачи Коши (1), описывающей своим решением эволюцию функции распределения плотности заряда под действием собственного электрического поля.

Одним из ограничений Dv-постановки (1) является рассмотрение только сферически-симметричных распределений плотности частиц. Реальные распределения плотности заряда, с которыми приходится работать при моделировании динамики пучка в ускорителях, имеют гораздо более сложную структуру. Поэтому в этой работе рассматривается модифицированная Dv-постановка задачи пространственного заряда, которую будем названа ρv-постановкой задачи учета эффекта пространственного заряда.

1. Постановка задачи

Для работы с несимметричными распределениями требуется заменить первое уравнение в Dv — постановки (1) на уравнение, не зависящее от собственного магнитного поля пучка. Такое уравнение получается путем взятия оператора div от уравнения Максвелла $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}=\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$, где $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$. В результате получится уравнение непрерывности для функции плотности заряда ρ

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{2}$$

С точки зрения численных расчетов такое уравнение решать проще, так как уравнение записано для скалярной, а не для векторной величины, также отсутствует правая часть, которая ранее содержала ротор. Для замыкания системы уравнений в постановку задачи необходимо добавить уравнение связи между функцией плотности заряда ρ и электрическим полем $\boldsymbol{D}$. В рамках используемого приближения будем считать выполненными следующие условия:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = -\varepsilon_0 \nabla u, \tag{3}$$

где

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad u|_\Gamma = u^0. \tag{4}$$

Здесь u — функция скалярного электрического потенциала; величина u^0 задает значение потенциала на границе Γ, ограничивающей область Ω, в которой будет решаться краевая задача. В каждый момент времени потенциал на границе u^0 может менять свое значение, например, если пучок проходит через ускоряющее поле, где потенциал на электродах меняется со временем. Отметим, что для нахождения потенциала u можно использовать как краевое условие первого рода (задачу Дирихле (4)), так и краевое условие второго (задача Неймана) или третьего рода (смешанное условие). Выбор краевого условия определяется типом рассматриваемой физической задачи.

В результате ρv-постановка начально-краевой задачи пространственного заряда принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\rho(p,t) + \operatorname{div}[\rho(p,t)\boldsymbol{v}(p,t)] = 0, \quad p \in \Omega,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}(p,t) + (\boldsymbol{v}(p,t), \nabla)\boldsymbol{v}(p,t) =\\
&\qquad = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}(\boldsymbol{D}_s(p,t) + \boldsymbol{D}_e(p,t)) + \alpha[\boldsymbol{v}(p,t), \boldsymbol{B}_e(p)],\\
&\boldsymbol{D}_s(p,t) = -\varepsilon_0 \nabla u(p,t),\\
&\Delta u(p,t) = -\frac{\rho(p,t)}{\varepsilon_0},\\
&u|_\Gamma = u^0(p,t), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(p), \quad \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0(p),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho_0(p)$ — начальное распределение плотности заряда, $\boldsymbol{v}_0(p)$ — начальное распределение скоростей среды. Отметим, что в (5) нигде не налагаются условия на симметричное распределение плотности заряда.

2. Построение решения ρv-задачи

По аналогии с Dv-постановкой [5] покажем, что ρv-постановка допускает решения в виде разложения в степенной ряд по времени, а именно

$$\begin{aligned}
\rho(p,t) &= \rho(p,0) + t \cdot \rho_t(p,0) + \frac{t^2}{2}\rho_{tt}(p,0) + \ldots =\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \rho}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!},\\
\boldsymbol{v}(p,t) &= \boldsymbol{v}(p,0) + t \cdot \boldsymbol{v}_t(p,0) + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{v}_{tt}(p,0) + \ldots =\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Подставим представление для плотности заряда из (6) в первое уравнение постановки (5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k \rho}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \\ + \operatorname{div}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \rho}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m \rho}{\partial t^m}(p,0)\frac{t^m}{m!}\right] = 0. \tag{7}$$

Соберем члены при одинаковых степенях t, получим

$$t^0\colon \quad \rho_t(p,0) + \operatorname{div}[\rho(p,0)\boldsymbol{v}(p,0)] = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) является верным тождеством, так как соответствует первому уравнению в (5) для момента времени $t=0$. Далее

$$t^1\colon \quad \rho_{tt}(p,0) + \operatorname{div}[\rho(p,0)\boldsymbol{v}_t(p,0)] + \operatorname{div}[\rho_t(p,0)\boldsymbol{v}(p,0)] = 0. \tag{9}$$

Перепишем выражение (9) в виде

$$t^1\colon \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_t(p,t) + \operatorname{div}[\rho(p,t)\boldsymbol{v}(p,t)]\right]\Big|_{t=0} = 0. \tag{10}$$

Из первого уравнения постановки (5) следует, что выражение в квадратных скобках (10) равно нулю для любого момента времени t, следовательно, производная по времени от такого выражение тоже равна нулю. Следовательно, равенство (9) является верным. Для второй степени t

$$t^2\colon \quad \frac{\rho_{ttt}}{2!} + \frac{\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}_{tt})}{2!} + \frac{\operatorname{div}(\rho_t\boldsymbol{v})_t}{1!1!} + \frac{\operatorname{div}(\rho_{tt}\boldsymbol{v})}{2!} = 0, \tag{11}$$

или

$$t^2\colon \quad \frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_{tt} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})_t + \operatorname{div}(\rho_t\boldsymbol{v})\right\}\Big|_{t=0} = \\ = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\rho_t + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]\Big|_{t=0} = 0. \tag{12}$$

Из первого уравнения постановки (5) следует, что выражение в квадратных скобках (12) равно нулю при любом значении t, из чего следует верность тождества (11). Аналогичные результаты получатся и для остальных степеней по t.

Проделаем аналогичную процедуру со вторым уравнением из постановки (5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \\ + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!}, \nabla\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!} = \\ = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \boldsymbol{D}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!} + \alpha\left[\frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)\frac{t^k}{k!}, \boldsymbol{B}_e(p)\right]. \tag{13}$$

Приравняем члены при одинаковых степенях t:

$$t^0\colon \quad \boldsymbol{v}_t(p,0) + (\boldsymbol{v}(p,0), \nabla)\boldsymbol{v}(p,0) = \\ = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}(p,0) + \alpha[\boldsymbol{v}(p,0), \boldsymbol{B}_e(p)]. \tag{14}$$

Выражение (7) соответствует второму уравнению в постановке (5) для начального момента времени. Следовательно, выражение (7) является верным тождеством. Для остальных степеней t получаются аналогичные результаты. Следовательно, решение (5) формально можно искать в виде рядов (6).

Покажем, что коэффициенты $\frac{\partial^k \boldsymbol{v}}{\partial t^k}(p,0)$ и $\frac{\partial^k \rho}{\partial t^k}(p,0)$ в разложении (6) выражаются через производные по координатам от начальных условий $\rho_0(p)$ и $\boldsymbol{v}_0(p)$, а также через производные по времени от известной функции $u_0(p,t)$. Из уравнения (8) и (14) следует

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t}(p,0) = -\operatorname{div}[\rho_0(p)\boldsymbol{v}_0(p)], \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(p,0) = -(\boldsymbol{v}_0(p),\nabla)\boldsymbol{v}_0(p) + \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}_0(p) + \alpha[\boldsymbol{v}_0(p), \boldsymbol{B}_e(p)],\end{gathered} \tag{15}$$

где $\boldsymbol{D}_0(p) = \boldsymbol{D}_s(p,0) + \boldsymbol{D}_e(p,0)$ — вектор-функция, которую можно определить по формуле (3), решив краевую задачу (4) в начальный момент времени. Из выражения (9) следует

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(p,0) = -\operatorname{div}[\rho(p,0)\boldsymbol{v}_t(p,0)] - \operatorname{div}[\rho_t(p,0)\boldsymbol{v}(p,0)]. \tag{16}$$

С учетом (15) выражение (16) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(p,0) = \operatorname{div}[\rho_0(p)(\boldsymbol{v}_0(p),\nabla)\boldsymbol{v}_0(p)] - \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\operatorname{div}[\rho_0(p)\boldsymbol{D}_0(p)] + \\ + \operatorname{div}[\operatorname{div}[\rho_0(p)\boldsymbol{v}_0(p)]\boldsymbol{v}_0(p)] - \alpha\operatorname{div}(\rho_0(p)[\boldsymbol{v}_0(p), \boldsymbol{B}_e(p)]).\end{gathered} \tag{17}$$

Аналогично для $\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2}(p,0)$ получается выражение

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2}(p,0) = \big((\boldsymbol{v}_0(p),\nabla)\boldsymbol{v}_0(p),\nabla\big)\boldsymbol{v}_0(p) - \frac{\alpha}{\varepsilon_0}(\boldsymbol{D}_0(p),\nabla)\boldsymbol{v}_0(p) - \\ - \alpha\big([\boldsymbol{v}_0(p), \boldsymbol{B}_e(p)],\nabla\big)\boldsymbol{v}_0(p) + (\boldsymbol{v}_0(p),\nabla)(\boldsymbol{v}_0(p),\nabla)\boldsymbol{v}_0(p) - \\ - \frac{\alpha}{\varepsilon_0}(\boldsymbol{v}_0(p),\nabla)\boldsymbol{D}_0(p) - \alpha(\boldsymbol{v}_0(p),\nabla)[\boldsymbol{v}_0(p), \boldsymbol{B}_e(p)] + \\ + \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}_t(p,0) - \alpha[(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}_e(p)] + \\ + \frac{\alpha^2}{\varepsilon_0}[\boldsymbol{D}_0(p), \boldsymbol{B}_e(p)] + \alpha^2[[\boldsymbol{v}_0(p), \boldsymbol{B}_e(p)], \boldsymbol{B}_e(p)].\end{gathered} \tag{18}$$

Величина $\boldsymbol{D}_t$ в (18) определяется из решения краевой задачи для начального момента времени

$$\begin{gathered}\Delta u_t(p,t) = -\frac{\rho_t(p,t)}{\varepsilon_0}, \quad u_t|_\Gamma = w(p,t), \\ \boldsymbol{D}_t(p,t) = -\varepsilon_0 \nabla u_t(p,t).\end{gathered} \tag{19}$$

Величина ρ_t в (19) известна из соотношения (15), а величина $w(p,t)$ задает изменение потенциала $u(p,t)$ на границе. В случае если потенциал на границе не меняется, т. е. граница находится под постоянным потенциалом, тогда $w(p,t) = 0$. Если потенциал меняется, например граница находится под ВЧ потенциалом, тогда $w(p,t) = U_m \cos(\omega_{\mathrm{RF}} t + \varphi)$, где U_m — амплитуда потенциала, ω_{RF} — ВЧ-частота, φ — начальный сдвиг фазы.

Данную процедуру можно повторять необходимое число раз, тем самым получая коэффициенты разложения, которые будут выражаться через все более и более высокие порядки пространственных производных от начальных условий. В результате коэффициенты разложения (6) выражаются через производные по координатам от начальных условий.

Заключение

В работе предложена ρv-постановка задачи учета эффекта пространственного заряда. В отличие от Dv-постановки ρv-постановка позволяет рассматривать произвольные распределения плотности заряда. Найден формальный вид решения в виде степенных рядов. Эволюция системы на больших временах t определяется высшими порядками пространственных производных от начальных условий. Полученное представление решения (6) с коэффициентами типа (15) и (17), (18) может быть использовано при численном решении задачи пространственного заряда в ρv-постановке при оптимизации параметров ускорительной установки.

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л., 1946.
2. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М., 1968.
3. *Боголюбов Н.Н. (мл.), Садовников Б.И.* Некоторые вопросы статистической механики. М., 1975.
4. *Боголюбов Н.Н. (мл.), Садовников Б.И., Шумовский А.С.* Математические методы статистической механики модельных систем. М., 1989.
5. *Садовников Б.И., Иноземцева Н.Г., Масленников И.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 1. С. 22 (*Inozemtseva N.G., Maslennikov I.I., Sadovnikov B.I.* // Moscow University Phys. Bull. 2013. **68**, N 1, P. 21).
6. *Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И.* // ЭЧАЯ. 1987. **18**. № 4. С. 53.
7. *Иноземцева Н.Г., Масленников И.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 3. С. 25 (*Inozemtseva N.G., Maslennikov I.I.* // Moscow University Phys. Bull. **68**, N 3. P. 201).
8. *Perepelkin E.E., Vorozhtsov A.S., Vorozhtsov S.B., Onischenko L.M.* // Proc. of RuPAC 2006. Novosibirsk, Russia. P. 348.
9. *Perepelkin E.E., Vorozhtsov S.B., Vorozhtsov A.S.* et al. // CNS-REP-76. 2006. University of Tokyo. P. 57.
10. *Perepelkin E., Vorozhtsov S.B., Vorozhtsov A.S.* et al. // RIKEN Accelerator Progress Report. 2009. **42**. P. 147.
11. *Perepelkin E., Vorozhtsov S.B., Vorozhtsov A.S.* et al. // RIKEN Accelerator Progress Report. 2007. **41**. P. 92.
12. *Perepelkin E., Vorozhtsov S.* // Proc. of the XXI Russian Accelerator Conf. (RuPAC-2008). Zvenigorod, Russia. September 28 — October 3. P. 40.
13. *Harlow F.H.* // Proc. of Symp. in Applied Mathematics. 1963. **15**. P. 269.
14. *Greengard L.* Cambridge: MIT Press, 1988.
15. *Hockney R., Eastwood J.* Bristol: Institute of Physics Publishing, 1992.
16. *Potts D., Steidl G.* // SIAM J. Sci. Comput. 2003. N 24. P. 2013.
17. *Steidl G.* // Adv. Comput. Math. 1998. N 9. P. 337.
18. *van der Geer S., de Loos M.* PhD Thesis. TU Eindhoven, 2001.
19. *Poplau G., Rienen U. van, Loos M.J. de, Geer S.B. van der* // Proc. of EPAC 2002 (Paris). P. 1658.
20. *Perepelkin E., Vorozhtsov S.* // Proc. of the XXI Russian Accelerator Conf. (RuPAC-2008). Zvenigorod, Russia. September 28 — October 3. P. 41.

21. *Садовников Б.И., Перепёлкин Е.Е., Репникова Н.П., Иноземцева Н.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2014. № 6. С. 53.
22. *Perepelkin E.E., Inozemtseva N.G., Zhavoronkov A.A.* // World J. of Cond. Matter Phys. 2014. N 4. P. 33.
23. *Sadovnikov B.I., Zhavoronkov A.A.* // J. of Appl. Math. and Phys. 2014. N 2. P. 495.

Hydrodynamic approximation of the space charge problem in terms of the charge density, ρ, and the velocity field, v

N. G. Inozemtseva[1,a], **N. P. Repnikova**[2,b]

[1] *Dubna International University for Nature, Society and Man. Dubna, Moscow Region 141980, Russia.*
[2] *Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *nginozv@mail.ru,* [b] *natalia.repnikova@mail.ru.*

The space-charge problem is considered in the hydrodynamic approximation. The problem is formulated in terms of the charge-density, ρ, and the vector velocity field, v (the ρv statement). In contrast to the Dv statement, the ρv statement can be used for asymmetric charge-density distributions. A formal solution to a boundary value problem is described and its properties are considered.

Keywords: nonlinear equations, mathematical physics, space-charge effect.
PACS: 02.60.Lj, 47.11.–j, 41.20.–q.
Received 26 November 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2015).

Сведения об авторах

1. Иноземцева Наталья Германовна — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: nginozv@mail.ru.
2. Репникова Надежда Павловна — аспирант; e-mail: natalia.repnikova@mail.ru.