Метод обратных дифференциальных операторов с использованием ортогональных полиномов и специальных функций для решения некоторых типов дифференциальных уравнений и физических задач

К. В. Жуковский

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

Статья поступила 09.11.2014, подписана в печать 12.01.2015.

Представлен общий операторный метод решения широкого круга задач, описываемых некоторыми классами дифференциальных уравнений, на основе развитой техники оператора обратной производной. Сконструированы и применены обратные дифференциальные операторы для решения ряда дифференциальных уравнений. Получены операторные тождества с участием оператора обратной производной, интегральных преобразований и обобщенных форм ортогональных полиномов и специальных функций. Приведены примеры решения различных уравнений в частных производных типа теплопроводности, диффузии, Фоккера–Планка и др. с помощью операторного метода. Продемонстрировано применение операторного подхода к решению ряда физических задач, связанных в том числе с движением заряженных частиц во внешнем поле.

Ключевые слова: обратный оператор, обратная производная, экспоненциальный оператор, дифференциальное уравнение, полиномы Лагерра и Эрмита, специальные функции.

УДК: 530.1, 53.01, 51-72, 51-73. PACS: 02.30.–f; 41.85.Ja, 03.65.Db, 05.60.Cd.

Введение

Дифференциальные уравнения играют чрезвычайно важную роль в математике и в физике, так как они описывают очень широкий спектр физических явлений. Поэтому построение решений дифференциальных уравнений представляет крайне важную задачу. В последние годы развитие науки и совершенствование технологий привело к появлению новых источников синхротронного излучения (СИ), ондуляторного излучения (ОИ) и лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) [1–4]. Это определило повышенный интерес к исследованию излучения ультрарелятивистских частиц, движущихся во внешних магнитных полях. Дальнейшее развитие в области техники ускорителей и в сфере применения синхротронного и ондуляторного излучений в рентгеновском диапазоне [5, 6] требует более строгого и математически выверенного описания их свойств с учетом особенностей источников излучения. Похожая ситуация складывается и в других областях науки и техники. Действительно, с одной стороны, в связи с возросшими возможностями вычислительной техники моделирование различных процессов и явлений как в фундаментальной науке, так и в ее прикладных отраслях часто проводится с помощью численных методов. При этом можно получить численное или соответствующее ему графическое описание поведения системы. Тем не менее для глубокого понимания происходящих явлений и правильного объяснения и описания исследуемых процессов необходимо рассмотреть аналитические решения.

Недавние исследования ондуляторного излучения с применением обобщенных форм специальных функций типа Бесселя и Эйри [7–11] позволили аналитически описать влияние постоянных компонент магнитного поля, характеристик ондуляторов и электронных пучков на свойства ОИ, а также смоделировать их влияние на характеристики ЛСЭ [12]. При этом примерялись операторная экспонента, разложения в ряды по ортогональным полиномам Эрмита и Лагерра [13] и их расширенные формы со многими индексами и переменными [14, 15]. Последние использовались также при решении целого ряда других физических проблем (см., например, [16, 17]); операторная экспонента широко применяется при моделировании процессов во многих областях физики [18–26]. В этом контексте удобно использовать операторные соотношения и для определения полиномов [13, 27]. С применением обратных функций, обратных дифференциальных операторов и интегральных преобразований ниже будут получены решения различных дифференциальных уравнений, встречающихся в физике, включая уравнения дробной размерности. Роль последних в современной физике все возрастает, хотя и остается не вполне очевидной [28]. Заметим, что многие уравнения физики, в частности, физики ускорителей и другие уравнения, связанные с движением и излучением частиц, приобретают компактный и удобный вид с использованием операторных обозначений. Так, например, в физике ЛСЭ встречается уравнение Колсона, которое в пределе слабого сигнала имеет следующий вид [34, 35]: $\frac{da}{d\tau} = i\pi g_0 \int\limits_0^\tau \tau' a\left(\tau - \tau'\right) \exp\left[-i\nu\tau'\right] d\tau'$, где g_0 — коэффициент усиления ЛСЭ в режиме слабого сигнала, a — безразмерная амплитуда напряженности поля Колсона. С использованием оператора обратной производной (1) это уравнение приобретает следующий вид: $e^{i\nu\tau} D_\tau a(\tau) = i\pi g_0 D_\tau^{-2}\left[e^{i\nu\tau} a(\tau)\right]$.

Подобная ситуация складывается и при исследовании ОИ с учетом непериодичности поля и потерь при распространении пучков электронов. Так, недавно полученные аналитические решения для ОИ с учетом указанных выше потерь [11] описывают интенсивность, спектр и форму линии ОИ с помощью модифицированных и обобщенных специальных функций типа Бесселя и Эйри [36–38]. При этом форма линии спонтанного излучения в ондуляторе отличается от обычного вида $\sin x/x$ и определяется обобщением функции Эйри [39], которая представима в виде ряда полиномов Эрмита трех переменных или в более удобном операторном виде.

1. Обратные дифференциальные и экспоненциальные операторы и решение дифференциальных уравнений

Решения различных типов дифференциальных уравнений с помощью операторной техники были получены, например, в [15, 29–31]. В рамках общепринятых обозначений $D = d/dx$ обратной производной от $f(x)$ будет $F(x) = D^{-1}f(x)$, так что $F'(x) = f(x)$. Действие оператора обратной производной порядка n — интегрального оператора — задано следующим образом (см., например, [32, 33]):

$$D_x^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-\xi)^{n-1}f(\xi)\,d\xi \qquad (n \in N = \{1,2,3,\ldots\}), \quad (1)$$

причем $D_x^0 f(x) = f(x)$ и $D_x^{-n}\boldsymbol{1} = \frac{x^n}{n!}$ $(n \in N_0 = N \cup \{0\})$. Нетрудно показать, что $\psi(D)e^{\alpha x}f(x) = e^{\alpha x}\psi(D+\alpha)f(x)$, $(\psi(D))^{-1}e^{\alpha x}f(x) = e^{\alpha x}(\psi(D+\alpha))^{-1}f(x)$, а также что

$$F(x) = (\psi(D+\alpha))^{-1}f(x) = e^{-\alpha x}(\psi(D))^{-1}e^{\alpha x}f(x). \quad (2)$$

В частности, для производной порядка n имеем $F(x) = (D+\alpha)^{-n}f(x) = e^{-\alpha x}D^{-n}e^{\alpha x}f(x)$.

Решения неоднородных дифференциальных уравнений обычно строятся с помощью функции Грина [32]. Альтернативная этому возможность представляется с помощью оператора обратной производной. Например, для следующего уравнения:

$$\left(\beta^2 - (D+\alpha)^2\right)^{\nu}F(x) = f(x), \quad D + \alpha \equiv \widetilde{D}, \quad (3)$$

где ν — произвольный вещественный параметр, а α и β — константы, найдем частный интеграл

$$F(x) = \left(\beta^2 - \widetilde{D}^2\right)^{-\nu}f(x), \quad (4)$$

применив известное операторное тождество [27, 33]

$$\widehat{q}^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \exp(-\widehat{q}t)t^{\nu-1}\,dt, \quad \min\{\mathrm{Re}(q), \mathrm{Re}(\nu)\} > 0. \quad (5)$$

В частности, для оператора $\widehat{q} = \beta^2 - \widetilde{D}^2$ оно дает следующий результат:

$$\left(\beta^2 - \widetilde{D}^2\right)^{-\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \exp\left(-\beta^2 t\right)t^{\nu-1}\exp\left(t\widetilde{D}^2\right)f(x)\,dt.$$

Дальнейшие действия по вычислению $F(x)$ зависят от конкретной задачи. Один из путей решения заключается в следующем. К дифференциальному оператору второго порядка $t\widetilde{D}^2$ в экспоненте применяется интегральное представление [40]

$$\exp\left(\widehat{p}^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\xi^2 + 2\xi\widehat{p}\right)d\xi, \quad (6)$$

где в нашем случае $\widehat{p} = \sqrt{t}\,\widetilde{D}$. Тогда с учетом действия оператора трансляции $\exp(\eta(D+\alpha))f(x) = \exp(\eta\alpha)f(x+\eta)$ получаем после замены переменных $t = \tau^2$ и $\eta = x + 2\xi\sqrt{t}$ следующий явный вид частного решения (4) для уравнения (3):

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}\int_0^\infty t^{2(\nu-1)}\exp\left(-(\beta\tau)^2\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\eta - x}{2\tau}\right)^2 + \alpha(\eta - x)\right)f(\eta)\,d\eta\,d\tau. \quad (7)$$

Очевидно, что для (3) с $\alpha = 0$ имеем

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \exp(-\beta^2 t)t^{\nu-1}\widehat{S}f(x)\,dt, \quad (8)$$

где введено обозначение для экспоненциального дифференциального оператора [33]

$$\widehat{S} = \exp\left(tD_x^2\right) \equiv \exp\left(tD^2\right). \quad (9)$$

Используя операторное соотношение Глейшера [33] для $f(x) = \exp\left(-x^2\right)$ в виде

$$\widehat{S}f(x) = \exp\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\exp\left(-x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{1+4y}}\exp\left(-\frac{x^2}{1+4y}\right), \quad (10)$$

немедленно получаем частное решение нашего уравнения

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\beta^2 t\right)t^{\nu-1}}{\sqrt{1+4t}}\exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right)dt.$$

Другой подход к операторному решению уравнения (3) заключается в совместном использовании техники экспоненциального оператора, обратной производной и преобразований Гаусса. Применяя (2), где $\psi^{-1}(D) = \left(\beta^2 - D^2\right)^{-\nu}$, с учетом (3), (8) и (9) получаем последовательное действие оператора $\exp(\partial_x^2)$ на $\exp(\alpha x)$ и на $g(x)$:

$$\exp\left(y\partial_x^2\right)\exp(\alpha x)g(x) = \exp(\alpha x)\exp\left(\alpha^2 y\right)\exp(2\alpha y\partial_x)\exp\left(y\partial_x^2\right)g(x), \quad (11)$$

где y и α — параметры, не зависящие от x. Это приводит к следующему решению (3):

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty t^{\nu-1}\exp\left\{-(\beta^2 - \alpha^2)t\right\}\widehat{\Theta}\widehat{S}f(x)\,dt, \quad (12)$$

где $\widehat{\Theta}$ — хорошо известный оператор трансляции

$$\widehat{\Theta} = \exp(2\alpha t D_x) \equiv \exp\left(2\alpha t\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \widehat{\Theta}f(x) = f(x + 2\alpha t), \quad (13)$$

а оператор теплопроводности $\widehat{S}$ (см. (9)) часто встречается в задачах, связанных с распространением тепла

[16, 17, 33]. Его действие может быть удобно представлено в интегральном виде с помощью обычного преобразования Гаусса–Вейерштрасса:

$$Fi(x,t) \equiv \widehat{S}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right\} f(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом, подынтегральное выражение в решении (12) уравнения (3), не считая фазы и постоянного множителя, отвечающего за размерность уравнения ν, есть не что иное, как результат последовательного действия операторов теплопроводности $\widehat{S}$ и оператора трансляции $\widehat{\Theta}$ на функцию $f(x)$. Об этом свидетельствует его явный вид

$$F(x,t) \equiv \widehat{\Theta}\widehat{S}f(x) = Fi(x+2\alpha t, t) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x+2\alpha t-\xi)^2}{4t}\right\} f(\xi)\, d\xi. \quad (14)$$

С учетом вышесказанного решение уравнения (3) принимает свой окончательный вид

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int\limits_{0}^{\infty} t^{\nu-1} \exp\{-t(\beta^2-\alpha^2)\} F(x,t)\, dt.$$

Для функции Гаусса $f(x) = \exp(-x^2)$, применяя (10), получаем простое решение

$$F(x) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\exp\{-(\beta^2-\alpha^2)t\}\, t^{\nu-1}}{\sqrt{1+4t}} \exp\left\{-\frac{(x+2\alpha t)^2}{1+4t}\right\} dt.$$

Итак, мы показали на простейших примерах, как использование оператора обратной производной и операторной экспоненты позволяет быстро получить решения для отдельных классов дифференциальных уравнений. Далее мы применим использованный выше подход с обратными дифференциальными операторами в сочетании с разложением по ортогональным полиномам для решения более сложных математических и физических задач, описываемых дифференциальными уравнениями.

2. Операторный подход и ортогональные полиномы для решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим некоторые ортогональные полиномы и их обобщенные формы с операторной точки зрения, которая больше подходит для наших целей, чем традиционное представление в виде рядов. Недавние исследования семейств ортогональных полиномов Эрмита, Лагерра и др. с помощью операторной техники (см., например, [14, 15, 30]) выявили их связи с операторной экспонентой, содержащей различные дифференциальные операторы. В контексте нашего подхода задание полиномов Эрмита двух переменных с помощью операторных соотношений [14] является более удобным, чем задание в виде рядов [41]:

$$H_n(x,y) = \exp\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) x^n, \quad H_n(x,y) = n! \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{x^{n-2r}y^r}{(n-2r)!\, r!}. \quad (15)$$

У этих полиномов следующая производящая функция:

$$\exp(xt+yt^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x,y), \quad (16)$$

и они сводятся к хорошо известным полиномам одной переменной $H_n(z)$

$$H_n(x,y) = (-i)^n y^{n/2} H_n\left(\frac{ix}{2\sqrt{y}}\right) = i^n (2y)^{n/2} He_n\left(\frac{x}{i\sqrt{2y}}\right). \quad (17)$$

Отметим полезное соотношение для полиномов Эрмита [41] $z^n H_n(x,y) = H_n(xz, yz^2)$.

Полиномы Лагерра двух переменных тоже могут быть заданы с помощью операторного соотношения [14], что иногда более удобно, чем их задание в виде рядов:

$$L_n(x,y) = \exp\left(-y\frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{(-x)^n}{n!} = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r y^{n-r} x^r}{(n-r)!(r!)^2}. \quad (18)$$

Они также сводятся к широко известным полиномам Лагерра одной переменной [33]

$$L_n(x,y) = y^n L_n\left(\frac{x}{y}\right), \quad L_n(x) = y^{-n} L_n(xy,y) = L_n(x,1). \quad (19)$$

Однако введение второй переменной полиномах Эрмита и Лагерра в (17) и (19) позволяет рассматривать их как решения уравнений в частных производных с соответствующими начальными условиями

$$\partial_y L_n(x,y) = -(\partial_x x \partial_x) L_n(x,y), \quad \text{где} \quad L_n(x,0) = \frac{(-x)^n}{n!},$$
$$\partial_y H_n(x,y) = \partial_x^2 H_n(x,y), \quad \text{где} \quad H_n(x,0) = x^n$$

для полиномов Лагерра $L_n(x,y)$ и для полиномов Эрмита $H_n(x,y)$ соответственно.

Отметим также некоммутативность следующих дифференциальных операторов:

$$_LD_x = \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial D_x^{-1}} = -\widehat{P} \quad \text{и} \quad \widehat{M} = y - D_x^{-1},$$
$$[_LD_x, D_x^{-1}] = -1, \quad (20)$$

где $\partial_x x \partial_x$ иногда называют производной Лагерра $_LD_x$ [30]. Из (20) следует, что полиномы Лагерра могут быть выражены через оператор обратной производной: $L_n(x,y) = \left(y - D_x^{-1}\right)^n\{1\}$, а из этого с учетом (18) следует, что они удовлетворяют следующему операторному соотношению:

$$\exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial D_x^{-1}}\right) L_n(x,y) = L_n(x, y-\alpha). \quad (21)$$

Детальное исследование математических соотношений между различными семействами полиномов и их связь с оператором D_x^{-1}, экспоненциальным оператором и представлениями операторов $\widehat{M}$ и $\widehat{P}$ остается за рамками настоящей работы.

Ниже мы сосредоточимся на использовании обратных дифференциальных операторов и ортогональных полиномов для решения отдельных дифференциальных задач. Для начала рассмотрим уравнение (3) с функцией $f(x)=x^k$. Используем операторное соотношение (2) для сдвига обратного оператора и соотношение

$$\exp\left(yD_x^2\right)x^k e^{\alpha x} = e^{(\alpha x+\alpha^2 y)}H_k(x+2\alpha y, y),$$

связывающее экспоненциальный оператор и интересующую нас степенную функцию $f(x)$ с полиномами Эрмита двух переменных. Оно возникает как следствие другого известного операторного соотношения

$$\exp\left(y\frac{\partial^m}{\partial x^m}\right)f(x) = f\left(x+my\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\right)\{1\}$$

и производящей функции для полиномов Эрмита (16). Теперь запишем частный интеграл (4) для уравнения (3) с начальным условием $f(x)=x^k$ в следующем виде:

$$F(x) = \left(\beta^2-(D_x+\alpha)^2\right)^{-\nu}x^k = \\ = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty e^{-t(\beta^2-\alpha^2)}t^{\nu-1}H_k(x+2\alpha t, t)\,dt. \quad (22)$$

Подынтегральное выражение содержит полиномы Эрмита со сдвинутым аргументом, что может быть получено и непосредственно из общей формы решения (12) и из операторного определения для полиномов Эрмита (15). Частное решение для уравнения (3) со степенной функцией $f(x)=x^k$ и $\alpha=0$, $\beta=0$, очевидно, следуют из (22). Отметим, что в решении (7) можно развязать между собой два интеграла с помощью полиномов Эрмита двух переменных при условии сходимости интегралов по η:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}\sum_{n=0}^\infty\int\limits_0^\infty \tau^{2(\nu-1)}\exp\left(-\beta^2\tau^2\right)H_n\left(\alpha, -\frac{1}{4\tau^2}\right)d\tau\times \\ \times\frac{1}{n!}\int\limits_{-\infty}^\infty(\eta-x)^n f(\eta)\,d\eta.$$

Теперь рассмотрим еще одно дифференциальное уравнение

$$(\beta-\partial_x x\partial_x)^\nu F(x) = f(x). \quad (23)$$

С операторной точки зрения его решение запишется в следующем виде:

$$F(x) = (\beta-\partial_x x\partial_x)^{-\nu}f(x) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp(-\beta t)t^{\nu-1}\exp(t\cdot {}_LD_x)f(x)\,dt. \quad (24)$$

В частном случае $\beta=1$, $\nu=1$ интегральное представление (24) решения уравнения с производной Лагерра (23) формально сводится к преобразованию Лапласа

$$\frac{1}{1-\widehat{D}_x} = \int\limits_0^\infty \exp\left(-s\left(1-\widehat{D}_x\right)\right)ds$$

с заменой ${}_LD_x \leftrightarrow D_x$ для дифференциального оператора ${}_LD_x$ в экспоненте в (24). Для $f(x)=x^n$ в (24) получаем, привлекая полиномы Лагерра, следующее решение:

$$(\beta-{}_LD_x)^{-\nu}x^n = \frac{n!}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp(-\beta t)t^{n+\nu-1}L_n(x/t)\,dt.$$

Более того, с помощью операторного метода и с привлечением полиномов Лагерра возможно написать решение для уравнения (23) с произвольной функцией $f(x)$, если только она может быть представлена в виде разложения по обычным полиномам Лагерра $f(x)=\sum\limits_{n=0}^\infty c_n L_n(x)$. Тогда решение (24) уравнения (23) с учетом операторного соотношения (21) может быть записано в виде следующего интеграла от рядов обычных полиномов Лагерра $L_n(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp(-\beta t)t^{\nu-1}\sum_{n=0}^\infty c_n L_n(x, 1-t)\,dt.$$

Для экспоненциальной функции $f(x)=\exp(-\gamma x)$ можно воспользоваться обобщенной формой операторного соотношения Глейшера [31]

$$\exp(-t\cdot {}_LD_x)\cdot\exp(-\gamma x) = \frac{1}{1-\gamma t}\exp\left(-\frac{\gamma x}{1-\gamma t}\right) \quad (25)$$

и немедленно получить следующий результат:

$$(\beta-{}_LD_x)^{-\nu}\exp(-\gamma x) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp(-\beta t)t^{\nu-1}\frac{1}{1+\gamma t}\exp\left(-\frac{\gamma x}{1+\gamma t}\right)dt. \quad (26)$$

Другой интересный случай представляет решение уравнения типа (3) с производной Лагерра ${}_LD_x$ вместо обычной производной ∂_x. Так для функции $f(x)=W_0(-x^2,2)$, где $W_n(x,m)=\sum\limits_s^\infty \frac{x^s}{s!(ms+n)!}$ — частный случай функции Бесселя–Райта [33], в соответствии с (5) можем написать следующее решение:

$$\left(\beta^2-\left(\partial_x x\partial_x\right)^2\right)^{-\nu}W_0\left(-x^2,2\right) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\beta^2 t\right)t^{\nu-1}\exp\left(t\cdot {}_LD_x^2\right)W_0\left(-x^2,2\right)dt.$$

Используя операторное определение для полиномов Лагерра (18) и следующее представление для обобщенного операторного соотношения типа Глейшера [30] применительно к $W_n(x,m)$

$$\exp\left({}_LD_x^2\right)W_0\left(-x^2,2\right) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}W_0\left(-\frac{1}{1+4t},2\right),$$

получим, наконец, частный интеграл для нашего уравнения в виде

$$\left(\beta^2-(\partial_x x\partial_x)^2\right)^{-\nu}W_0\left(-x^2,2\right) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\beta^2 t\right)t^{\nu-1}\frac{1}{\sqrt{1+4t}}W_0\left(-\frac{1}{1+4t},2\right)dt.$$

Более того, используя развитый выше формализм, можно написать решения и для других видов дифференциальных уравнений. Например, дифференциальный оператор

$$\breve{D}_x = x\partial_x^2 + (\alpha+1)\partial_x$$

связан с обобщенными полиномами Лагерра двух переменных

$$L_n^{(\alpha)}(x,y) = \exp\left[-\breve{D}_x\right]\left\{\frac{(-x)^n}{n!}\right\}.$$

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(x\partial_x^2 + (\alpha+1)\partial_x\right)^\nu F(x) = f(x).$$

Из операторного соотношения (5) получаем действие оператора, обратного к $\breve{D}_x^{\nu}$, на $f(x)$:

$$\breve{D}_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp(-\beta t)t^{\nu-1}\exp\left(t\breve{D}_x\right)f(x)\,dt.$$

Для функции $f(x) = x^n$ получим, привлекая обобщенные полиномы Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x,y)$:

$$\breve{D}_x^{-\nu} x^n = \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp(-\beta t)t^{\nu-1}L_n^{(\alpha)}(x,-t)\,dt.$$

Для другой функции $f(x) = \exp(-\gamma x)$, используя уже встречавшееся ранее операторное соотношение Глейшера (25), получим для уравнения с оператором $\breve{D}_x$ решение в виде

$$\breve{D}_x^{-\nu} exp(-\gamma x) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \exp(-\beta t)t^{\nu-1}\frac{1}{(1+\gamma t)^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{\gamma x}{1+\gamma t}\right)dt.$$

3. Примеры решения некоторых физических задач

Метод обратных дифференциальных и экспоненциальных операторов находит многочисленные применения для решения физических задач. Выше рассмотрены примеры решения отдельных типов уравнений с модифицированными дифференциальными операторами. Другие примеры задач типа диффузии, теплопроводности и некоторых их обобщений рассматривались в работах [29–31]. Уравнение типа Блэка–Шоулза, встречающегося в финансовых моделях:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}A(x,t) = x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}A(x,t) + \lambda x\frac{\partial}{\partial x}A(x,t) - \mu A(x,t), \\ g(x) = A(x,0), \tag{27}$$

где ρ, λ и μ — постоянные коэффициенты и $g(x) = A(x, t{=}0)$ — функция начального условия, может быть легко решено, если выделить полный квадрат оператора $\overline{D} = x\partial_x$. Решение (28) в виде операторной экспоненты $A(x,t) = \exp\left\{\rho t\left(\left(\overline{D}+\lambda/2\right)^2 - \varepsilon\right)\right\}g(x)$, где $\varepsilon = \mu + (\lambda/2)^2$, с учетом операторного соотношения (6), примененного к $\exp\left(a\overline{D}\right)$ и с учетом $\exp(ax\partial_x)f(x) = f\left(e^a x\right)$, записывается следующим образом:

$$A(x,t) = \frac{\exp(-\rho\varepsilon t)}{\sqrt{\pi}}\times \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\sigma^2 + \sigma\alpha\frac{\lambda}{2\rho}\right]g(x\exp(\sigma\alpha))\,d\sigma, \tag{28}$$

где $\alpha = \alpha(t) = 2\sqrt{\rho t}$. Для начального условия $g(x) = x^n$ решение уравнения (27) имеет простой вид $A(x,t) = x^n\exp\left\{\rho t\left(n^2 + \lambda n - \mu\right)\right\}$, а для начального условия $g(x) = \ln x$ решение также принимает элегантный вид: $A(x,t) = (\ln x + \rho t\lambda)\exp(-\rho t\mu)$.

Отметим, что для решения уравнения типа Блэка–Шоулза с производной Лагерра ${}_LD_x$ (20) можно использовать полиномы Лагерра (18), операторные правила Глейшера [31], соотношения (10), (25), (23), (24) и операторную технику, представленную нами выше. Конкретные решения этого уравнения будут предложены в последующих публикациях.

Движение частицы в постоянном электрическом поле описывается уравнением Шрёдингера следующего вида:

$$i\,\partial_\tau\Psi(x,\tau) = -\partial_x^2\Psi(x,\tau) + bx\,\Psi(x,\tau), \tag{29}$$

которое легко может быть решено операторным методом подобно решению уравнения (3) с привлечением операторов (9) и (13) и правила (11). Нетрудно убедиться, что последовательное преобразование амплитуды начальной вероятности $f(x)$ операторами $\widehat{\widehat{S}} = \exp(i\tau\,\partial_x^2)$, $\widehat{\widehat{S}}f(x) \equiv f(x, i\tau)$, $\widehat{\widehat{\Theta}} = \exp(b\tau^2\,\partial_x)$, $\widehat{\widehat{\Theta}}f(x,\tau) = f(x{+}b\tau^2, \tau)$ приводит к решению уравнения (29) — амплитуды вероятности — в следующем виде:

$$\Psi(x,\tau) = \exp(-i\Phi(x,\tau;b))\widehat{\widehat{\Theta}}\,\widehat{\widehat{S}}f(x) = \\ = \exp(-i\Phi(x,\tau;b))\frac{1}{2\sqrt{i\pi\tau}}\times \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(x+b\tau^2-\xi\right)^2}{4i\tau}\right)f(\xi)\,d\xi, \tag{30}$$

где Φ — фаза. Отметим, что в (30), как и в (14), без каких-либо предположений о характере начальной функции $f(x)$ мы получили в качестве решения (29) последовательное действие операторов теплопроводности $\widehat{S}$ и трансляции $\widehat{\Theta}$ на функцию начального условия $f(x)$ [42]. При этом $\widehat{S}$ по существу является оператором эволюции свободной частицы.

Интересно решение следующего обобщенного уравнения теплопроводности:

$$\partial_t F(x,t) = \partial_x^2 F(x,t) + \beta x F(x,t) \tag{31}$$

с функцией Эйри [43] $f(x) = \mathrm{Ai}(x/C) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\cos\left(\zeta^3/3 + \right.$ $\left.+\,\zeta x/C\right)d\zeta$ $(C = \mathrm{const})$ в качестве начального условия $F(x,0) = f(x)$. Уравнение (31) содержит дополнительное линейное по пространственной координате слагаемое. Решая (31) по аналогии с решением уравнения Шрёдингера, получаем действие оператора эволюции на функцию начального условия $f(x)$: $F(x,t) = e^{\Phi(x,t;\beta)}\widehat{\Theta}\widehat{S}f(x) = e^{\Phi(x,t;\beta)}f(x+\beta t^2, t)$, где $\Phi(x,t;\beta) = \frac{1}{3}\beta^2 t^3 + \beta t x$, $\widehat{\Theta} = e^{\beta t^2 \partial_x}$, $\widehat{S} = e^{t\partial_x^2}$. Итак, решение уравнения (31) с начальным условием в виде функции Эйри $f(x) = \mathrm{Ai}(x/C)$ записывается через $\mathrm{Ai}(x,t) \equiv \widehat{S}\,\mathrm{Ai}\left(\frac{x}{C}\right) = e^{t\partial_x^2}\,\mathrm{Ai}\left(\frac{x}{C}\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\frac{1}{3}\left(\zeta^3 + \frac{\zeta x}{C}\right)\exp\left\{-\frac{\zeta^2 t}{C^2}\right\}d\zeta$ как результат действия оператора теплопроводности $\widehat{S}$. Под действием же оператора трансляции $\widehat{\Theta}$, сдвигающего переменную x, решение окончательно принимает следующий вид:

$$F(x,t) = e^{\Phi(x,t,\beta)}\,\mathrm{Ai}(x+\beta t^2, t) = = e^{\Phi(x,t,\beta)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\frac{1}{3}\left(\zeta^3 + \frac{\zeta(x+\beta t^2)}{C}\right)\exp\left\{-\frac{\zeta^2 t}{C^2}\right\}d\zeta. \tag{32}$$

Заметим, что решение (32) обобщенного уравнения теплопроводности имеет ярко выраженное затухание амплитуды колебаний без сколько-нибудь значительного расплывания пакета.

Выберем теперь функцию Эйри в качестве начального условия уравнения Шрёдингера (29) и воспользуемся соотношением, сводящим функцию Эйри двух переменных к функции Эйри одной переменной: $\mathrm{Ai}(x, i\tau) = e^{i\Delta(x,\tau)}\,\mathrm{Ai}\left(\frac{C^3 x - \tau^2}{C^4}\right)$, где $\Delta(x,\tau) = \frac{\tau}{C^6}\left(\frac{2}{3}\tau^2 - C^3 x\right)$. Под действием оператора $\widehat{S}\,\mathrm{Ai}(x,z) = e^{i\Delta(x,\tau)}\,\mathrm{Ai}(A^3 x - \tau^2, z)$ решение уравнения Шрёдингера $\Psi(x,\tau) = e^{-i\Phi(x,\tau;b)}\,\mathrm{Ai}(x + b\tau^2, i\tau)$ выражается через функции Эйри одной переменной: $\Psi(x,\tau) = e^{-i\Phi(x,\tau;b)}e^{i\Theta(x+b\tau^2,\tau)}\,\mathrm{Ai}\left(\frac{x}{C} + \left(\frac{b}{C} - \frac{1}{C^4}\right)\tau^2\right)$. Видно, что распространение пакета Эйри в поле постоянной силы не приводит к его расплыванию [45]. Таким образом, не считая несущественной для наших целей общей фазы, мы получили важный результат — динамика пакета Эйри в постоянном электростатическом поле сводится к простой трансляции пакета:

$$|\Psi(x,\tau)|^2 = \left|\mathrm{Ai}\left(\frac{x}{C} + \left(\frac{b}{C} - \frac{1}{C^4}\right)\tau^2\right)\right|^2, \tag{33}$$

т. е. пакет неизменной формы (33) движется равноускоренно. Это кажущееся противоречие [45] снимается тем, что функция Эйри не является квадратично интегрируемой и центроид $\langle x\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ пакета Эйри не может быть определен. Подчеркнем, что свойство квадратичной интегрируемости очень важно в квантовой механике. Без него невозможно говорить о средней координате частицы, средних значениях других наблюдаемых. Можно только вести речь об абстрактных точках и их динамике, например об ускорении точки, где значение функции Эйри равно нулю.

Уравнения типа Фоккера–Планка встречаются при моделировании распространения пучков электронов, в частности для ЛСЭ. Так, при моделировании поведения пучков в ускорителях и накопительных кольцах с учетом эффектов диффузии и демпфирования используется оператор $(2t/\tau)\left(\sigma_\varepsilon^2\partial_x^2 + \partial_x x\right)$, где τ — характерное время демпфирования электронного пучка за счет синхротронного излучения электронов в поворотных магнитах а σ_ε — отклонение от так называемого равномерного распределения. Диффузионный и демпфирующий процессы в конце концов уравновешивают друг друга и приводят к стационарному решению. Оператор эволюции для этой задачи состоит из операторов $\widehat{A} = (2t/\tau)\sigma_\varepsilon^2\partial_x^2$ и $\widehat{B} = (2t/\tau)\partial_x x$. Их коммутатор дает $[\widehat{A},\widehat{B}] = (4t/\tau)\sigma_\varepsilon^2\widehat{A}$, и после упорядочивания в экспоненте получаем

$$U(t) = \exp\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = \exp\left(\frac{1 - \exp\left(-(4t/\tau)\sigma_\varepsilon^2\right)}{(4t/\tau)\sigma_\varepsilon^2}\widehat{A}\right)\exp\widehat{B}. \tag{34}$$

Итак, решая одномерное уравнение для динамики пучка в ЛСЭ

$$\partial_t F(x,t) = \alpha\,\partial_x^2 F(x,t) + \beta\,\partial_x x F(x,t), \tag{35}$$

для начального Гауссова распределения $f(x) = \exp\left(-x^2\right)$, обычного для пучков в ускорителях, получаем следующее решение (35) ($\alpha = (2t/\tau)\sigma_\varepsilon^2$, $\beta = (2t/\tau)$, $\alpha/\beta = \sigma_\varepsilon^2$):

$$\begin{gathered} F(x,t)\big|_{f(x)=\exp(-x^2)} = \frac{1}{\sqrt{\eta(t)}}\exp\left(-\frac{x^2}{\eta(t)}\right), \\ \eta(t) = 2\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-2\beta t} + \frac{\beta}{2\alpha}e^{-2\beta t}\right). \end{gathered} \tag{36}$$

В отличие от уравнения Шредингера, функция начального условия $f(x)$ преобразуется в (36) лишь одним оператором $\widehat{S}$, но зависимость от времени здесь более сложная.

Выводы

С помощью операторного метода получены решения для различных классов дифференциальных уравнений. При этом использовались обратные дифференциальные операторы и экспоненциальные операторы, широко применялись операторные тождества и интегральные преобразования. Использование обобщенных форм полиномов Лагерра и Эрмита позволило написать решения в наиболее общих случаях для нескольких видов дифференциальных уравнений в виде разложения в ряды по полиномам указанных выше типов. Использование при этом операторных определений и представлений позволило применить их для решения сложных математических задач и проблем, возникающих при моделировании физических процессов, а также установить связь расширенных форм семейств полиномов со специальными функциями, с которыми часто более удобно проводить вычисления. Показано, как инвертирование дифференциальных операторов и применение обратной производной открывает путь к непосредственному получению аналитических решений и позволяет продвинуться в решении сложных математических проблем и понимании связанных с ними физических процессов.

Таким образом, проведенное нами исследование показало, что операторный подход в сочетании с интегральными преобразованиями, использованием расширенных форм ортогональных полиномов и специальных функций и операторных соотношений представляет собой мощный инструмент для исследования широкого спектра физических проблем, в особенности описываемых дифференциальными уравнениями.

Список литературы

1. *Михайлин В.В.* // Успехи физ. наук. 2013. **183**, № 4. С. 433 (*Mikhailin V.V.* // Phys. Usp. 2013. **56**. P. 412).
2. *Кулипанов Г.Н.* // Успехи физ. наук. 2007. **177**, № 4. С. 384 (*Kulipanov G.N.* // Phys. Usp. 2007. **50**. P. 368).
3. *Рагозин Е.Н., Собельман И.И.* // Успехи физ. наук. 2004. **174**, № 2. С. 207 (*Ragozin E.N., Sobel'man I.I.* // Phys. Usp. 2004. **47**. P. 195).
4. *Duke P.J.* Synchrotron Radiation Production and Properties. N. Y., 2000.
5. *Margaritondo G., Ribic P.R.* // J. Synchrotron Rad. 2011. **18**. P. 101.
6. *Feldhaus J., Sonntag B.* // Springer Series in Optical Sciences. 2009. **134**. P. 91.
7. *Жуковский К.В., Михайлин В.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. № 2. С. 41 (*Zhukovsky K.V., Mikhailin V.V.* // Moscow University Phys. Bull. 2005. **60**, N 2. P. 50).
8. *Dattoli G., Mikhailin V., Ottaviani P.-L., Zhukovsky K.* // J. Appl. Phys. 2006. **100**. P. 084507.
9. *Zhukovsky K.V.* Undulator Radiation in Multiple Magnetic Fields. Synchrotron: Design, Properties and Applications. N. Y., 2012.
10. *Zhukovsky K.V.* // J. Surf. Invest.: X-ray, Synchrotron Neutron Tech. 2014. **8**, N 3. P. 422.
11. *Zhukovsky K.V.* // Prog. Electromag. Res. 2014. **B59**. P. 245.
12. *Zhukovsky K.V.* // J. of Electromagn. Waves and Applications. 2015. **29**, N 1. P. 132.
13. *Appèl A., Fériet J.K. de* // Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques; Polynômes d'Hermite. P., 1926.
14. *Dattoli G.* // J. Comput. Appl. Math. 2000. **118**. P. 111.
15. *Dattoli G., Srivastava H.M., Zhukovsky K.* // J. Comput. Appl. Math. 2005. **182.** P. 165.
16. *Haimo D.T., Markett C.* // J. Math. Anal. Appl. 1992. **168**. P. 89.
17. *Haimo D.T., Markett C.* // J. Math. Anal. Appl. 1992. **168**. P. 289.
18. *Жуковский К.В., Даттоли Д.* // Ядерная Физика. 2008. **71**, № 10. С. 1838 (*Zhukovsky K.V., Dattoli D.* // Physics of Atomic Nuclei. 2008. **71**, N 10. C. 1807).
19. *Dattoli G., Zhukovsky K.* // Eur. Phys. J. 2007. **C50**. P. 817.
20. *Dattoli G., Zhukovsky K.* // Eur. Phys. J. 2008. **C55**. P. 547.
21. *Dattoli G., Zhukovsky K.* // Eur. Phys. J. 2007. **C52**, N 3. P. 591.
22. *Жуковский К.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 3. С. 49 (*Zhukovskij K.V.* // Moscow University Phys. Bull. 2001. **56**, N 3. P. 64).
23. *Zhukovsky K.V.* // AIChE J. 2003. **49**, N 12. P. 3029.
24. *Zhukovsky K.* // AIChE J. 2006. **52**, N 7. P. 2356.
25. *Жуковский К.В., Жуковский В.Ч.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 5. С. 23 (*Zhukovskij K.V., Zhukovskij V.Ch.* // Moscow University Phys. Bull. 2002. **57**, N 5. P. 32).
26. *Zhukovsky K., Pozio A.* // J. Power Sources, 2004. **130**. P. 95.
27. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G.* Higher Transcendental Functions. Vol. II. N. Y.; Toronto; L., 1953.
28. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006.
29. *Zhukovsky K.* // The Scientific World J. 2014. **2014**. Art. 454865.
30. *Dattoli G., Srivastava H.M., Zhukovsky K.* // Integral Transform. Spec. Funct. 2006. **17**, N 1. P. 31.
31. *Dattoli G., Srivastava H.M., Zhukovsky K.V.* // Appl. Math. Comput. 2007. **184**. P. 979.
32. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.
33. *Srivastava H.M., Manocha H.L.* A Treatise on Generating Functions. N. Y.; Chichester; Brisbane; Toronto, 1984.
34. *Dattoli G.* Lectures on Free Electron Lasers. B., 1993.
35. *Colson W.B., Gallardo L.C., Bosco P.M.* // Phys. Rev. 1986. **A34**. P. 4875.
36. Даттоли Д., Михайлин В.В., Жуковский К.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 5. С. 33 (*Dattoli G., Mikhailin V.V., Zhukovsky K.V.* // Moscow University Phys. Bull. 2009. **64**, N 5. P. 507).
37. *Zhukovsky K.* // J. Electromagnet. Wave. 2014. **28**, N 15. P. 1869.
38. *Zhukovsky K.V.* // J. Surf. Invest.: X-ray, Synchrotron Neutron Tech. 2014. **8**, N 5. P. 1068.
39. *Dattoli G., Mikhailin V.V., Zhukovsky K.* // J. Appl. Phys. 2008. **104**. P. 124507.
40. *Wolf K.B.* Integral Transforms in Science and Engineering. N.-Y., 1979.
41. *H.W. Gould, A.T. Hopper* // Duke Math. J. 1962. **29**. P. 51.
42. *Avron J.E., Herbst I.W.* // Commun. Math. Phys. 1977. **52**. P. 239.
43. *Vallée O., Soares M.* Airy Functions and Application to Physics. L., 2004.
44. *Zhukovsky K.V., Dattoli G.* // Appl. Math. Comput. 2011. **217**. P. 7966.
45. *Berry M.V., Balazs N.J.* // Amer. J. Phys. 1979. **47**. P. 264.

A method of inverse differential operators using orthogonal polynomials and special functions for solving some types of differential equations and physical problems

K. V. Zhukovsky

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.

A general operational method, which is based on the developed technique of the inverse derivative operator, for solving a wide range of problems described by some classes of differential equations is represented. The inverse derivative operators for solving a number of differential equations are constructed and used. The operational identities are derived with the use of the inverse derivative operator, integral transformations, and generalized forms of orthogonal polynomials and special functions. Examples of solving various partial differential equations, such as equations of heat conduction and diffusion, as well as the Fokker–Planck equation, etc. are given. The application of the operational approach to solving a number of physical problems, among them problems related to the motion of charged particles in external field, is demonstrated.

Keywords: inverse operator, inverse derivative, exponential operator, differential equation, Laguerre and Hermite polynomials, special functions.
PACS: 02.30.–f; 41.85.Ja, 03.65.Db, 05.60.Cd.
Received 9 November 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2015).

Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович — докт. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник;
тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.