Задачи с малым параметром и распространение фронтов в теории галактического динамо

Е. А. Михайлов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

Статья поступила 07.11.2014, подписана в печать 28.11.2014.

Исследован вопрос о распространении магнитного поля на периферию галактического диска и возможности его переноса с помощью динамо-волны. Для этого рассмотрена система из двух уравнений с малым параметром при старших производных. Ее существенной особенностью является то, что при определенном значении независимой переменной происходит смена устойчивости корней вырожденного уравнения. Для данной задачи численно получены скорости распространения переходных слоев, исследован вопрос о возможности их проникновения за пределы точки смены устойчивости. Кроме того, изучено близкое по смыслу скалярное уравнение, для которого могут быть получены асимптотические оценки скорости распространения фронта, хорошо согласующиеся с результатами численного моделирования.

Ключевые слова: магнитные поля галактик, динамо-волна, задачи с малым параметром.
УДК: 517.958. PACS: 02.30.Jr.

Введение

Вопрос о существовании магнитных полей на больших расстояниях от центра галактики является весьма важным с астрофизической точки зрения. Твердо установлено [1], что на расстояниях до 10–15 кпк от центра галактики присутствуют поля напряженностью порядка 1 мкГс. Тем не менее было бы неправильным считать, что галактический диск имеет жесткую границу: плотность межзвездного газа, движения которого и определяют генерацию магнитных полей [2], достаточно плавно спадает по мере удаления от центра, поэтому логично предположить, что поле тоже проникает достаточно далеко и превышает значение межгалактического фона, составляющего порядка 10^{-9} мкГс [3]. Генерация поля определяется механизмом динамо, работа которого связана с совокупным действием дифференциального вращения и альфа-эффекта. Этот механизм имеет пороговый характер и работает лишь при определенных значениях параметров, описывающих межзвездную среду [2]. Как правило, в центральных областях галактик этот порог превышен, а на периферии все обстоит несколько хуже: действие альфа-эффекта серьезно ослаблено. Однако следует учитывать другую возможность, когда поле генерируется в центральных частях галактики и там возникает волна, выносящая его во внешние области. Кроме того, представляет интерес ситуация, когда в центральных частях галактики образуются два концентрических кольца с противоположными направлениями магнитного поля [4]. Подобные явления качественно исследовались в [5], некоторые оценки получены также в [6]. Существование таких волн для конкретных параметров межзвездной среды Млечного Пути подтверждается результатами моделирования [7]. Тем не менее многие детали данного процесса в случае больших расстояний от центра галактики, где значения параметров находятся на границе или даже ниже порога генерации магнитного поля, остаются неясными.

С другой стороны, в математике хорошо известны процессы нелинейного распространения волн [8–11]. Часто они возникают в нелинейных параболических уравнениях, содержащих малый параметр при лапласиане. Такие уравнения встречаются в различных задачах физики, химии и биологии. То же самое можно сказать и про уравнения магнитной гидродинамики, описывающие эволюцию космических магнитных полей. В роли малого параметра там выступает коэффициент турбулентной диффузии, характеризующий диссипацию крупномасштабного магнитного поля. В ряде случаев для подобных уравнений могут быть получены асимптотические разложения, помогающие понять природу таких явлений, как распространение фронтов в галактиках. Для более сложных задач результаты могут быть уточнены численно.

Мы рассматриваем модельную задачу об эволюции магнитного поля в галактике, численно решая систему из двух уравнений с малым параметром (каждая из неизвестных функций характеризует одну из компонент магнитного поля). Данная задача характерна тем, что в определенной точке происходит смена устойчивости: устойчивые корни становятся неустойчивыми и уходят в комплексную область, а неустойчивый корень становится устойчивым. Моделирование показывает, что фронт может проникнуть на небольшое расстояние за пределы точки смены устойчивости.

Далее рассматривается упрощенная скалярная задача, для которой могут быть получены асимптотические скорости распространения волны. Результаты сравниваются с численным моделированием, проведенным для разных значений малого параметра, входящего в задачу. Показано, что результаты, полученные асимптотически и численно, совпадают с очень большой точностью.

1. Уравнения галактического динамо

Если учесть соленоидальность магнитного поля и ввести безразмерные переменные (время измерять в h^2/η, расстояния в радиусах галактики R), то основ-

ные уравнения динамо для компонент B_r и B_φ в рамках планарного приближения примут вид [13, 14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_\alpha \left(1 - \frac{B^2}{B^{*2}}\right) B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_r + \lambda^2 \Delta_r B_r; \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= R_\omega r \frac{\partial \Omega}{\partial r} B_r - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \Delta_r B_\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Параметр R_α характеризует действие альфа-эффекта, R_ω — дифференциальное вращение, $\lambda = h/R$ — полутолщину диска, B^* — поле насыщения, определяемое плотностью энергии турбулентных движений. Как правило, полагают, что $R_\alpha = O(1)$, $R_\omega = O(10)$, $\lambda = O(10^{-2})$. Таким образом, в ряде случаев λ может выступать как малый параметр, описывающий возникновение контрастных структур и движение переходных слоев в галактике.

Возможность роста магнитного поля определяется в первую очередь соотношением между коэффициентами R_α и R_ω. В том случае если $R_\alpha R_\omega > 7$, в линейной области $B \ll B^*$ происходит устойчивая генерация поля за времена, сопоставимые с временем жизни галактики. В противном случае поле затухает либо его рост крайне медленный. Эти коэффициенты меняются в зависимости от расстояния до центра галактики: в центральных областях, как правило, их произведение превышает порог генерации, за счет чего возникает магнитное поле, наличие которого подтверждается наблюдениями [1]. Однако во внешних областях галактики коэффициенты имеют намного меньшие значения. Таким образом, рост магнитного поля в этих областях навряд ли возможен. Тем не менее результаты численного моделирования [7] показывают, что в центральной области может сформироваться фронт, который движется в сторону возрастания r и переносит магнитное поле, сгенерированное в центральных частях галактики, в ее внешние части. Вопрос о формировании и распространении таких фронтов является основным для настоящего исследования.

2. Математическая задача и анализ ее численных решений

Путем преобразований, приводящих задачу (1) к более удобному виду, и небольших упрощений, связанных с тем, что мы исследуем случай больших расстояний от центра галактики, систему уравнений (1) можно привести к виду

$$u_t = -A(x)v\left(1 - \frac{u^2+v^2}{U^2(x)}\right) - u + \varepsilon^2 u_{xx}, \quad v_t = -B(x)u - v + \varepsilon^2 v_{xx} \tag{2}$$

с условиями

$$\begin{gathered} u(0,t) = u_0, \quad v(0,t) = v_0, \quad u(x,t) \to 0, \\ v(x,t) \to 0 \ \text{ при } \ x \to \infty, \\ u(x,0) = f(x), \quad v(x,0) = g(x). \end{gathered} \tag{3}$$

Из физических соображений следует [7], что функции $A(x)$, $B(x)$ и $U(x)$ монотонно затухают с ростом x. Положим $\varepsilon = 0$ и рассмотрим стационарные решения задачи (2) ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$):

$$0 = -A(x)v\left(1 - \frac{u^2+v^2}{U^2(x)}\right) - u, \quad 0 = -B(x)u - v.$$

Решения (φ, ψ) выглядят следующим образом:

$$\varphi_1(x) = U(x)\sqrt{\frac{A(x)B(x)-1}{A(x)B(x)(1+B^2(x))}},$$

$$\psi_1(x) = -U(x)\sqrt{\frac{B(x)(A(x)B(x)-1)}{A(x)(1+B^2(x))}},$$

$$\varphi_2(x) = 0,$$

$$\psi_2(x) = 0,$$

$$\varphi_3(x) = -U(x)\sqrt{\frac{A(x)B(x)-1}{A(x)B(x)(1+B^2(x))}},$$

$$\psi_3(x) = U(x)\sqrt{\frac{B(x)(A(x)B(x)-1)}{A(x)(1+B^2(x))}}.$$

При $AB > 1$ решения 1 и 3, подставленные в (2), устойчивы, нулевое решение 2 неустойчиво. Физически это означает, что любое небольшое магнитное поле будет усиливаться механизмом динамо вплоть до достижения определенного предельного значения. В тех областях, где $AB < 1$, ситуация меняется: устойчивым становится только нулевое решение 2, а решения 1 и 3 уходят в комплексную область и не имеют физического смысла.

Результаты численного моделирования показывают (рис. 1), что при определенных начальных условиях в области, где $AB > 1$, может образоваться переходный слой, соединяющий два решения (φ_1, ψ_1) и (φ_3, ψ_3). Данный слой может достаточно медленно двигаться в сторону возрастания x, что с астрофизической точки зрения соответствует распространению динамо-волны во внешние области галактики. Возникает вопрос о том, сможет ли данный фронт распространиться за пределы точки смены устойчивости x_{ch}. С другой стороны, отдельный интерес представляет вычисление скорости распространения данного фронта. Эта задача решалась численно. Рассматривались следующие значения входящих в задачу функций:

$$A(x) = \exp(-0.3466x), \quad B(x) = 2\exp(-0.3466x),$$
$$U(x) = \exp(-x).$$

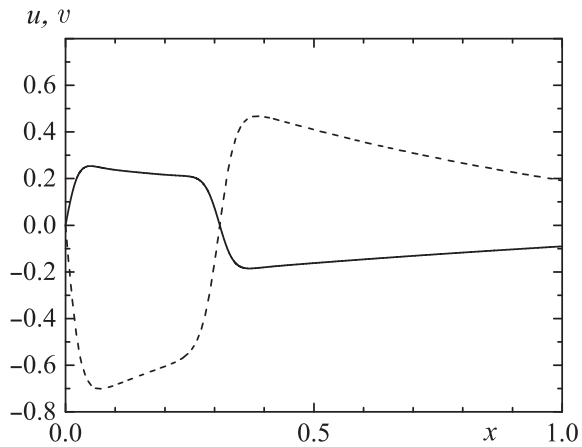

Рис. 1. Типичное поведение решения задачи (2): $\varepsilon = 0.02$, $t = 50$. Сплошная линия показывает u, пунктирная — v

Значение малого параметра ε варьировалось, принимая в разных случаях значения порядка 10^{-2}. При таких начальных условиях точка смены устойчивости $x_{\text{ch}} \approx 1$. Для решения задачи использовались следующие начальные и граничные условия:

$$u(0,t) = v(0,t) = 0, \quad u(x,0) = 0,$$
$$v(x,0) = \begin{cases} -0.05 & \text{при } 0.1 < x < 0.2, \\ 0.05 & \text{при } 0.3 < x < 0.4, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases} \tag{4}$$

На начальном этапе происходит рост функций u и v в областях $(0.1, 0.2)$ и $(0.3, 0.4)$, их значения там становятся близкими к стационарным. Затем формируется переходный слой между двумя стационарными решениями, локализованный на начальном этапе в окрестности точки $x_{\text{fr}} = 0.25$. После этого фронт начинает смещаться влево. Мы вычислили скорости распространения фронта для различных ε, полученные значения проиллюстрированы в таблице. С большой точностью зависимость скорости распространения фронта w от малого параметра ε описывается квадратичным законом: $w(\varepsilon) \approx 31\varepsilon^2$. Был изучен также вопрос о возможности распространения фронта за пределы точки смены устойчивости $x > x_{\text{ch}}$. Численный расчет показывает, что переход фронта в данную область возможен (рис. 2), а глубина проникновения растет с увеличением ε.

Скорость распространения переходного слоя между устойчивыми корнями w и переходного слоя между устойчивым и неустойчивым корнем ω

Задача	Двумерная система (2)		Скалярное уравнение (6)	
ε	w	ω	w	ω
0.01	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$1.40 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^{-2}$
0.02	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$
0.03	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$4.0 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-2}$
0.04	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-2}$
0.05	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^{-2}$

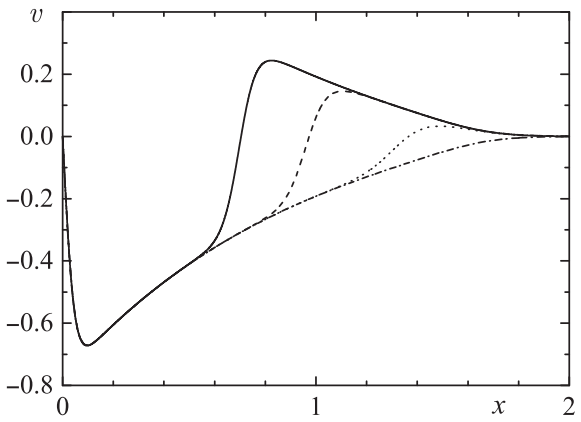

Рис. 2. Распространение фронта, соединяющего устойчивые корни, за пределы точки смены устойчивости при $\varepsilon = 0.03$. Сплошная линия показывает момент времени $t = 160$, пунктирная — $t = 240$, штриховая — $t = 320$, штрихпунктирная — $t = 400$

Другая важная для приложений задача связана с переходным слоем, соединяющим устойчивое при $x < x_{\text{ch}}$ решение $(\varphi_3(x), \psi_3(x))$ и неустойчивое нулевое решение. В данном случае интерес представляют те же вопросы: скорость ω распространения переходного слоя вправо и возможность его проникновения в область $x > x_{\text{ch}}$. Для этого численно решалась задача (2) с условиями вида

$$u(0,t) = v(0,t) = 0, \quad u(x,0) = 0,$$
$$v(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.1, \\ 0.05 & \text{при } 0.1 < x < 0.2, \\ 0 & \text{при } x > 0.2. \end{cases} \tag{5}$$

На рис. 3 показан процесс распространения фронта для разных моментов времени. Отметим, что переходный слой проникает в правую область на небольшое расстояние, где через определенное время останавливается. Глубина проникновения оказывается тем большей, чем больше ε, стабилизировавшиеся решения показаны на рис. 4. Скорости ω распространения фронта в окрестности точки $x = 0.5$ проиллюстрированы в таблице. С большой точностью зависимость можно аппроксимировать законом $\omega = 1.34\varepsilon$.

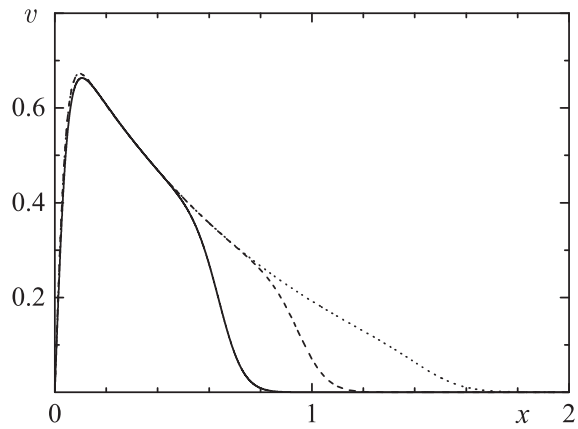

Рис. 3. Распространение фронта, соединяющего устойчивый и неустойчивый корни, при $\varepsilon = 0.03$. Сплошная линия показывает момент времени $t = 10$, пунктирная — $t = 20$, штриховая — $t = 50$

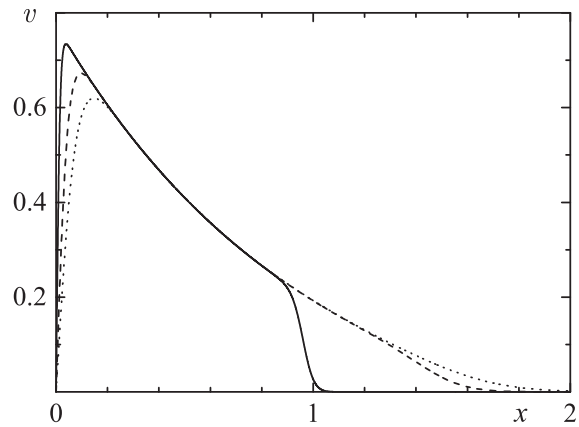

Рис. 4. Конечная конфигурация поля при начальных условиях вида (5). Сплошная линия — $\varepsilon = 0.01$, пунктирная — $\varepsilon = 0.03$, штриховая — $\varepsilon = 0.05$

3. Скалярная задача и построение асимптотики

Построение асимптотики и вычисление скорости распространения фронта в двумерной задаче (2) представляет определенные сложности. В то же время качественно поведение магнитного поля может быть описано и более простым скалярным уравнением

$$u_t = \gamma(x)\left(1-u^2\right)u + \varepsilon^2 u_{xx}. \tag{6}$$

С помощью перехода к другому масштабу времени $t' = t/\varepsilon^2$ задачу можно свести к стандартному виду

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 u_{t'} = \varepsilon^2 u_{xx} + f(x,u), \\ f(x,u) = \gamma(x)(1-u^2)u \end{gathered} \tag{7}$$

с граничными условиями

$$u(0,t') = 0, \quad u(x,t') \to 0 \ \text{ при } \ x \to \infty,$$

где $\gamma(x)$ монотонно убывает с ростом x (возможно, принимая также отрицательные значения). Введем растянутую переменную $\tau = \frac{x-x^*}{\varepsilon}$, где x^* — точка локализации погранслоя. Решения будем искать в виде следующих комбинаций [15]:

$$\begin{aligned} u^{(-)} &= \overline{u}^{(-)}(x,t',\varepsilon) + Q^{(-)}(\tau,\varepsilon) + R^{(-)} \ \text{ при } \ x < x^*, \\ u^{(+)} &= \overline{u}^{(+)}(x,t',\varepsilon) + Q^{(+)}(\tau,\varepsilon) + R^{(+)} \ \text{ при } \ x > x^*, \end{aligned} \tag{8}$$

где $Q^{(\pm)}$ — погранслойные функции, описывающие поведение решения в окрестности точки x^*, $R^{(\pm)}$ описывают поведение решения вблизи границ области, а стационарные решения имеют вид

$$\overline{u}^{(-)} = -1, \quad \overline{u}^{(+)} = 1.$$

При $x < x^*$:

$$f = -2\gamma(x)Q^{(-)}\left(1+Q^{(-)}\right)\left(2+Q^{(-)}\right),$$

а производная решения по времени выглядит так [15]:

$$u_{t'} = \frac{\partial}{\partial t'}Q^{(-)}(\tau) = Q'^{(-)}(\tau)\frac{\partial \tau}{\partial t'} = -\frac{1}{\varepsilon}wQ'^{(-)}.$$

Тогда в нулевом порядке получаем уравнение

$$Q''^{(-)}(\tau) - 2\gamma(x_0)Q^{(-)}(\tau)\left(1+Q^{(-)}\right)\left(2+Q^{(-)}\right) = 0.$$

Аналогичное уравнение можно составить и для $x > x^*$. Решения для пограничных функций в нулевом порядке выглядят следующим образом:

$$Q_0^{(-)} = 1 + \operatorname{th}\left(\tau\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right), \quad Q_0^{(+)} = -1 + \operatorname{th}\left(\tau\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right).$$

Введем функцию

$$\Phi(\tau) = \frac{\partial Q_0}{\partial \tau} = -\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\tau\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right)}.$$

Неоднородность преобразуется к виду

$$f(\overline{u}_0(x) + Q_0(\tau), x) = \gamma(x)\frac{\operatorname{th}\left(\tau\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\tau\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right)}.$$

Скорость движения фронта может быть найдена при помощи интеграла [16]:

$$w_0' = -\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_x\left(\overline{u}_0(x) + Q_0(\tau), x_0\right)\tau\Phi(\tau)\,d\tau}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi^2(\tau)\,d\tau}. \tag{9}$$

При вычислении интеграла (9) получается результат $w_0' = -\frac{1}{2}\gamma'(x_0)/\gamma(x_0)$. При возврате к «физическому» времени t получим в нулевом порядке скорость распространения фронта, равную $w_0 = -\frac{\varepsilon^2}{2}\gamma'(x_0)/\gamma(x_0)$. Проверим полученные результаты численно, рассмотрев задачу (6) с коэффициентом $\gamma(x) = \exp(-x)$ и начальными условиями вида

$$u(x,0) = \begin{cases} 0.05 & \text{при } \ 0.1 < x < 0.2, \\ -0.05 & \text{при } \ 0.3 < x < 0.4, \\ 0 & \text{при остальных } \ x. \end{cases} \tag{10}$$

Значение малого параметра ε принимало различные величины порядка 10^{-2}. Численные результаты показаны в таблице и соответствуют аналитической формуле, которая при таком выборе $\gamma(x)$ даст $w_0 = \frac{\varepsilon^2}{2}$. Таким образом, характер зависимости (скорость квадратична по ε) повторяет то, что было получено в предыдущем разделе для двумерной задачи.

Другой вопрос связан с распространением фронта, соединяющего устойчивое решение $u = 1$ и неустойчивое решение $u = 0$. Скорость распространения фронта для таких уравнений была получена, например, в [5], где утверждается, что $\omega \approx 2\varepsilon\sqrt{\gamma(x)}$, т. е. скорость распространения переходного слоя зависит от x. Мы решили также численную задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \begin{cases} 0.05 & \text{при } \ 0.1 < x < 0.2, \\ 0 & \text{при остальных } \ x. \end{cases} \tag{11}$$

Скорость распространения переходного слоя в окрестности точки $x = 0.5$ согласно аналитической формуле должна составлять величину $\omega \approx 1.2\varepsilon$. Результаты численного моделирования (см. таблицу) вполне близки к этому результату.

Заключение

Нами исследована задача распространения фронта магнитного поля во внешние области галактики. Показано, что динамо-волна может переносить магнитное поле в том числе и во внешние области галактики, где невозможна его самостоятельная генерация. Также изучен процесс движения во внешние части галактики переходного слоя между областями, в которых направление поля противоположно. Для простейшего скалярного случая получены асимптотические скорости распространения фронтов, характер зависимости которых от малого параметра ε очень близок к тому, что получено в результате компьютерного моделирования как для скалярного, так и для более сложного двумерного случая. Продемонстрировано, что скорость распространения переходного слоя между двумя устойчивыми решениями пропорциональна ε^2, между устойчивым и неустойчивым — ε.

Автор выражает благодарность профессору Д. Д. Соколову и профессору Н. Н. Нефёдову за ценные рекомендации при подготовке работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 13-01-00200) и Программы поддержки аспирантов и молодых ученых без степени Фонда некоммерческих программ «Династия».

Список литературы

1. *Beck R., Brandenburg A., Moss D.* et al. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1996. **34**. P. 155.
2. *Arshakian T., Beck R., Krause M., Sokoloff D.* // Astron. Astrophys. 2009. **494**. P. 21.
3. *Neronov A., Semikoz D.* // Phys. Rev. D. 2009. **80**. 123012.
4. *Moss D., Stepanov R., Arshakian T.* et al. // Astron. Astrophys. 2012. **537**. P. 68.
5. *Moss D., Shukurov A., Sokoloff D.* // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. 1998. **89**. P. 285.
6. *Sokoloff D., Petrov A., Moss D.* // Proc. of the Int. Conf. «Plasma Turbulence and Energetic Particles in Astrophysics». Cracow, Poland, 1999. P. 92.
7. *Mikhailov E., Kasparova A., Beck R.* et al. // Astron. Astrophys. 2014. **568**. A66.
8. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* // Бюлл. МГУ. Матем. и мех. 1937. **1**, № 6. С. 1.
9. *Nefedov N., Sakamoto K.* // Hiroshima Mathematical J. 2003. **33**, N 3. P. 391.
10. *Нефёдов Н.Н., Никитин А.Г., Петрова М.А., Рекке Л.* // Дифференц. уравн. 2011. **47**. С. 1305.
11. *Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R.* // J. of Mathem. Analysis and Applications. 2013. **405**. P. 90.
12. *Phillips A.* // Geophys. Astrophys. Fluid. Dynam. 2001. **94**. P. 135.
13. *Moss D.* // Mon. Not. R. Astr. Soc. 1995. **275**. P. 191.
14. *Михайлов Е.А.* // Письма в Астрон. журн. 2013. **39**. С. 474.
15. *Божевольнов Ю.В., Нефёдов Н.Н.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, № 2. С. 276.
16. *Volkov V.T., Nefedov N.N.* Lecture Notes in Computer Science. B., 2013. **8236**. P. 524.

Problems with a small parameter and propagation of fronts in the galactic dynamo theory

E. A. Mikhailov

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.

Propagation of the magnetic field to the periphery of the galactic disc and the possibility of its transfer using a dynamo wave are studied. For this purpose, a system of two equations with a small parameter of high-order derivatives is considered. Its important feature is that for a certain value of the independent variable the stability of the roots of the degenerate equation changes. For this problem the numerical velocity values of transition layers are obtained. The problem of their possible penetration beyond the bounds of the point of stability change is studied. A similar scalar equation is studied, for which asymptotic estimates of the front propagation velocity can be obtained. These estimates are in good agreement with the numerical simulation results.

Keywords: magnetic fields of galaxies, dynamo wave, problems with a small parameter.
PACS: 02.30.Jr.
Received 7 November 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2015).

Сведения об авторе

Михайлов Евгений Александрович — аспирант; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.