

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

**Применение теории контрастных структур для описания поля скорости ветра в пространственно-неоднородном растительном покрове**

Н. Т. Левашова<sup>1,a</sup>, Ю. В. Мухартова<sup>1,b</sup>, М. А. Давыдова<sup>1,c</sup>,  
Н. Е. Шапкина<sup>1</sup>, А. В. Ольчев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

<sup>2</sup>Институт проблем экологии и эволюции имени А. Н. Северцова РАН.

Россия, 119071, Москва, Ленинский пр-т, д. 33.

E-mail: <sup>a</sup> natasha@npanalytica.ru, <sup>b</sup> muhartova@yandex.ru, <sup>c</sup> m.davydova@bk.ru

Статья поступила 05.11.2014, подписана в печать 28.01.2015.

Для решения задачи обтекания воздушным потоком некоторого препятствия в виде лесополосы предложена двумерная математическая модель, основанная на теории контрастных структур. С помощью численных расчетов получены поля скорости ветра при обтекании лесных полос различных пространственных размеров и вертикальных структур.

*Ключевые слова:* турбулентный обмен, контрастные структуры, уравнение Навье–Стокса.

УДК: 51-73. PACS: 02.30.Jr.

**Введение**

Задача адекватного описания процесса турбулентного обмена между пространственно неоднородным растительным покровом и приземным слоем атмосферы является чрезвычайно важной при изучении процессов переноса тепла, водяного пара, углекислого газа и других парниковых газов между земной поверхностью и атмосферой.

Большинство существующих моделей турбулентного переноса основаны на решении системы двух уравнений — векторного уравнения Навье–Стокса и скалярного уравнения неразрывности. Первое в общем виде может быть записано как

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{V} + \mathbf{F}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$  — скорость ветра,  $\rho$  — плотность воздуха,  $p$  — атмосферное давление,  $\nu\Delta\mathbf{V}$  — слагаемое, обусловленное процессами диффузии,  $\nu$  — кинематическая вязкость, слагаемое  $\mathbf{F}$  описывает внешние воздействия, оказывающие влияние на движение воздушного потока. Уравнение неразрывности является следствием закона сохранения массы вещества и в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{V}) = 0. \quad (2)$$

Систему уравнений (1), (2) необходимо решить относительно трех компонент вектора скорости  $u, v, w$  и давления  $p$ . Компоненты скорости ветра и давление характеризуются значительными флуктуациями во времени, что значительно затрудняет решение системы уравнений (1) и (2). Эта проблема может быть решена с использованием разложения Рейнольдса, когда скорости ветра и давление рассматриваются как суммы средних значений этих величин за некоторый промежуток времени

и их отклонений от среднего:  $u = U + u'$ ,  $v = V + v'$ ,  $w = W + w'$ ,  $p = \langle p \rangle + p'$ . Величины  $U, V, W$  и  $\langle p \rangle$  соответствуют средним значениям компонент скорости и давления, а величины  $u', v', w', p'$  — их отклонениям. В результате использования осреднения Рейнольдса в уравнениях (1) и (2) получается система из четырех уравнений, в которой неизвестными являются средние значения компонент скорости и давления, а также, величины  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$ ,  $\langle u'v' \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle$ ,  $\langle v'w' \rangle$ , называемые моментами второго порядка (угловые скобки означают осреднение). Использование дополнительных уравнений, выражающих неизвестные величины через моменты более высокого порядка, обычно приводит к увеличению количества неизвестных параметров, которое можно уменьшить, лишь используя совокупность определенных дополнительных допущений, позволяющих замкнуть систему уравнений. Порядок моментов, при выводе уравнений для которых используются дополнительные допущения и уравнения, в том числе эмпирические, определяет порядок замыкания системы уравнений.

В современных моделях переноса используются разные способы замыкания для решения этой системы уравнений [1–4]. Наиболее простая группа моделей основана на гипотезе Буссинеска [5], согласно которой турбулентный поток некоторой величины  $s$  по аналогии с молекулярным переносом считается пропорциональным градиенту этой величины,  $\langle u's' \rangle = -K_s \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial x}$ ,  $\langle vs' \rangle = -K_s \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial y}$ ,  $\langle ws' \rangle = -K_s \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial z}$ . Усреднение слагаемого  $-(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}$  в уравнении Навье–Стокса с последующим применением гипотезы Буссинеска, приводит к появлению в этих уравнениях слагаемых вида  $\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial U}{\partial z})$  (и аналогичных для двух других компонент скорости).

Эти слагаемые играют роль диффузионных членов. Они характеризуют турбулентную диффузию, которая в условиях хорошо выраженной турбулентности на 3–4 порядка превосходит величину молекулярной диффузии  $\nu\Delta\mathbf{V}$ , которой поэтому при данных условиях можно пренебречь. Кроме того, в уравнениях для компонент скорости возникают слагаемые, которые имеют смысл турбулентной кинетической энергии и ее диссипации. Для этих величин на основании дополнительных полуэмпирических допущений составляются еще два уравнения, образуя замыкание порядка 1.5 [6, 7].

В модели, предлагаемой в настоящей статье, для решения задачи обтекания воздушным потоком некоторого препятствия в виде лесополосы мы будем учитывать приток энергии и ее поглощение в системе при помощи теории диссипативных контрастных структур (КС). Контрастными структурами называются функции, графики которых имеют резкие переходные слои, локализованные в пространстве. Идея применения теории КС возникла на том основании, что графики функций, описывающих компоненты скорости ветра, имеют резкие переходные слои на границе раздела различных типов растительности. Использование теории КС, таким образом, может позволить решить проблему замыкания без привлечения дополнительных уравнений (замыкание первого порядка). Кроме того, с развитием теории контрастных структур этот подход позволит определить условия, при которых система уравнений движения и неразрывности будет описывать стационарное распределение воздушных потоков в случае неоднородного растительного покрова. В настоящей работе мы опирались только на имеющиеся результаты по существованию устойчивого стационарного решения в случае одного уравнения, реакция–диффузия–адвекция [8, 9]. Для проверки адекватности разработанной модели результаты расчетов были сопоставлены с имеющимися литературными данными [1–4] о поле скорости ветра вблизи наветренных и подветренных краев лесозащитных полос разной пространственной структуры.

### 1. Модель

Для решения задачи обтекания воздушным потоком препятствия в виде лесополосы выберем плоскость, перпендикулярную препятствию, и сделаем предположение об однородности растительности в направлении, перпендикулярном выбранной плоскости. Задачу получения близкого к стационарному поля скоростей ветра будем решать методом стационарирования, поэтому изначально поставим двумерную начально-краевую задачу для системы из трех уравнений относительно усредненных компонент скорости ветра и давления — двух уравнений движения и уравнения неразрывности.

Запишем уравнения движения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( K_x \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( K_z \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} \right) - \frac{\partial U}{\partial t} = \\ = U \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}} + W \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tilde{x}} + F_1(U, W, \tilde{x}, \tilde{z}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( K_x \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( K_z \frac{\partial W}{\partial \tilde{z}} \right) - \frac{\partial W}{\partial t} = \\ = U \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}} + W \frac{\partial W}{\partial \tilde{z}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tilde{z}} + F_2(U, W, \tilde{x}, \tilde{z}), \end{aligned} \quad (3)$$

а уравнение неразрывности в виде  $\text{div } \mathbf{V} = 0$ . Здесь  $\mathbf{V}$  — усредненное значение скорости ветра за некоторый промежуток времени,  $U$  и  $W$  — ее горизонтальная и вертикальная компоненты соответственно,  $K_x$  и  $K_z$  — коэффициенты турбулентной диффузии, а функции  $F_1$  и  $F_2$  описывают взаимодействие воздушного потока с растительностью. Размерные пространственные координаты и время отмечены тильдой.

Для системы (3) рассматривается начально-краевая задача в области  $\Pi = \{-a \leq \tilde{x} \leq a; 0 \leq \tilde{z} \leq b\}$  с дополнительными условиями вида

$$\begin{aligned} U|_{\tilde{z}=0} = W|_{\tilde{z}=0} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\substack{\tilde{x}=-a \\ \tilde{x}=a}} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\substack{\tilde{x}=-a \\ \tilde{x}=a}} = \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=b} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=b} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$U|_{t=0} = U^0(\tilde{x}, \tilde{z}), \quad W|_{t=0} = 0.$$

Здесь  $U^0(\tilde{x}, \tilde{z})$  — заданное начальное распределение горизонтальной компоненты скорости ветра, используемое при численном расчете методом стационарирования.

Считаем, что лесной массив сосредоточен в области  $D = \{0 \leq \tilde{z} \leq \tilde{h}, \tilde{x}_1 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_2\}$ , где  $h \approx 20$  м — высота растительности,  $-a < \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < a$ . Численный расчет проводится для значений  $a = 100$  м,  $b = 50$  м при разных значениях ширины лесополосы: 80 и 40 м.

Запишем систему уравнений в безразмерном виде. В качестве масштабов измерения скорости, длины и времени примем соответствующие единицы, указанные в [10]. За масштаб измерения скорости примем динамическую скорость  $u_* \approx 0.3$  м/с, за масштаб длины — длину Монино–Обухова  $L \approx 7.3$  м, за масштаб времени — величину  $t_* = L/u_* \approx 24.3$  с. Введем малый параметр  $\varepsilon = 0.1$  и приведем турбулентные коэффициенты к безразмерному виду  $k_x = \frac{K_x}{\varepsilon u_* L}$ ,  $k_z = \frac{K_z}{\varepsilon u_* L}$ , а также введем безразмерные величины  $u = U/u_*$ ,  $u^0 = U^0/u_*$ ,  $w = W/u_*$ ,  $\mathbf{V} = \{u; w\}$ ,  $x = \tilde{x}/L$ ,  $z = \tilde{z}/L$ ,  $t = \tilde{t}/t_*$ ,  $x_{1,2} = \tilde{x}_{1,2}/L$ ,  $h = \tilde{h}/L$  и  $\partial P/\partial x$ ,  $\partial P/\partial z$ . Последние две величины представляют собой результат обезразмеривания слагаемых  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tilde{x}}$  и  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tilde{z}}$ , входящих в правые части (3).

Задача (3)–(4), переписанная в безразмерных величинах, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \\ = u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + F_1(u, w, x, z) \right), \\ \varepsilon k_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon k_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial t} = \\ = u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{\partial P}{\partial z} + F_2(u, w, x, z) \right), \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad -\frac{a}{L} < x < \frac{a}{L}, \quad 0 < z < \frac{b}{L}, \quad t > 0. \quad (5)$$

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-a/L} = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=-a/L} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=b/L} = \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=b/L} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u^0(x, z), \quad w|_{t=0} = 0.$$

**2. Выбор неоднородности в правой части уравнений исходя из теории контрастных структур**

При моделировании процесса взаимодействия воздушных потоков с растительностью в настоящей работе используется описание, характерное для диссипативных контрастных структур [11] в активных средах, т. е. в средах, далеких от состояния термодинамического равновесия. Для таких сред характерно наличие бистабильного и возбудимого элементов. Бистабильный элемент имеет два устойчивых состояния, между которыми возможны переходы при наличии достаточно интенсивного внешнего воздействия [12]. Возбудимый элемент имеет одно устойчивое состояние, из которого он может быть выведен в результате внешнего воздействия. В случае наличия обратной связи между возбудимым и бистабильным элементом переключение бистабильного элемента играет роль внешнего воздействия на возбудимый элемент. Проведем следующую аналогию: горизонтальная компонента скорости ветра играет роль бистабильного элемента, т. е. имеет два устойчивых состояния: скорость ветра на открытой местности  $u_{\text{open}}$  и скорость ветра внутри леса  $u_{\text{forest}}$ . Вертикальная компонента скорости ветра играет роль возбудимого элемента и имеет одно устойчивое состояние  $w = 0$ . Начальное условие зададим таким образом, чтобы оно играло роль внешнего воздействия, которое переключает состояния бистабильного элемента с уровня  $u_{\text{forest}}$  на уровень  $u_{\text{open}}$ . В роли обратной связи выступает уравнение неразрывности.

Бистабильные среды хорошо описываются при помощи уравнений параболического типа с кубической нелинейностью [13]. Именно такая нелинейность выбирается в предлагаемой модели для описания взаимодействия горизонтального воздуш-

ного потока с растительностью. Будем считать, что в вертикальном направлении это взаимодействие описывается силой аэродинамического трения.

Исходя из вышесказанного выбираем неоднородности в правых частях системы (5) следующим образом:

$$F_x(u, w, x, z) = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_1(u, w, x, z) = C_d \tilde{s}(x, z)(u - u_{\text{open}})(u - u_{\text{forest}})(u - \phi(x, z)), \quad (6)$$

$$F_z(u, w, x, z) = -\frac{\partial P}{\partial z} + F_2(u, w, x, z) = -C_d \tilde{s}(x, z)w\sqrt{u^2 + w^2}.$$

Функция  $\tilde{s}(x, z)$  — безразмерная функция плотности растительного покрова:  $\tilde{s}(x, z) = L \cdot s(x, z)$ , где  $s(x, z)$  — функция плотности растительного покрова, измеряемая в  $(\text{м}^2/\text{м}^3)$ ,  $C_d \approx 0.2 \div 0.8$  — безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления элементов растительности воздушному потоку. Вдали от границ раздела разных сообществ для низкой растительности безразмерная горизонтальная компонента скорости принимается равной  $u_{\text{open}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z+z_{0g}}{z_{0g}}$ . Здесь  $z_{0g} = 0.03$  м — параметр шероховатости травы [10],  $\kappa \approx 0.4$  — постоянная Кармана.

Поле скорости ветра над лесом и внутри него описывается с помощью кусочно-непрерывной функции

$$u_{\text{forest}} = \begin{cases} u_h(h) \exp\left(\alpha\left(\frac{z}{h} - 1\right)\right), & z < h, \\ u_h(z), & z \geq h. \end{cases}$$

где  $u_h(z) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z-d}{z_{0f}}$ ,  $d$  — высота слоя вытеснения, которая рассчитывается согласно уравнению

$$1 - \frac{d}{h} = \frac{1}{\sqrt{7.5 \cdot \text{LAI}}} \left(1 - e^{-\sqrt{7.5 \cdot \text{LAI}}}\right);$$

безразмерный параметр LAI (leaf area index), определяемый как отношение площади поверхности листьев растений к площади земной поверхности, вычисляется как  $\text{LAI} = \int_0^h C_d \cdot s(x, z) dz$ ,  $z_{0f} = 1.5 \div 2$  м — параметр шероховатости для леса;  $\alpha = h\tilde{s}(x, z)$ .

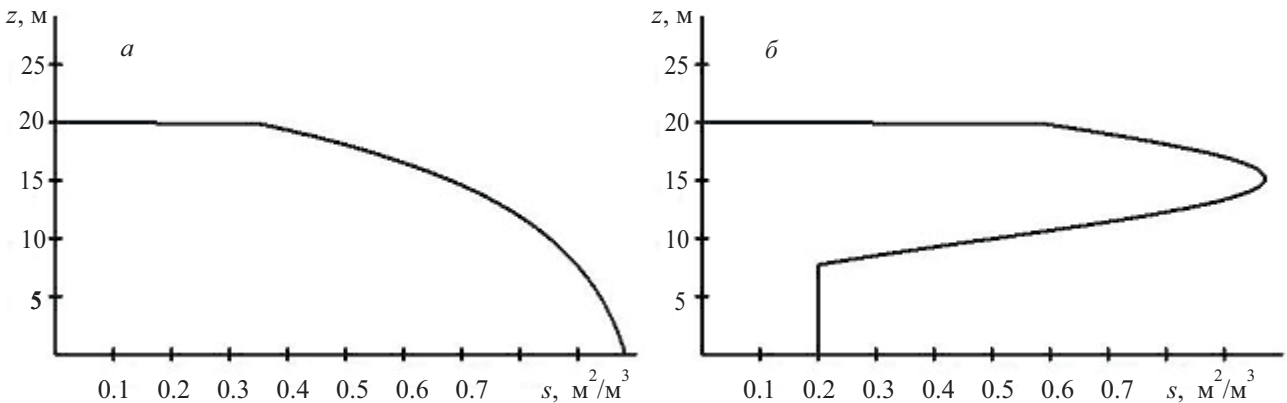


Рис. 1. Плотность растительного покрова  $s(x, z)$ : а — для лесополосы с густым подлеском, б — для лесополосы без подлеска

Для описания структуры растительности внутри лесополосы в работе были рассмотрены два вида функций  $s(x, z)$ . График функции  $s(x, z)$  ( $\text{м}^2/\text{м}^3$ ) для лесополосы с густыми кронами и густым подлеском представлен на рис. 1, а; аналитическое выражение для этой функции записывалось как

$$s = \begin{cases} 0.7 \cdot (1.5 - e^{(z-h)}) \times \\ \times \min \left( \left( e^{-32(x-x_1)(x-x_2)/(x_1-x_2)^2} - 1 \right), 1 \right), & (x, z) \in D, \\ 0, & (x, z) \notin D. \end{cases}$$

Для лесополосы из деревьев с высокими стволами, густыми кронами и редким подлеском  $s(x, z)$  ( $\text{м}^2/\text{м}^3$ ) принималась равной

$$s(x, z) = \begin{cases} 1.16 \times \\ \times \max \left( e^{-(z-z_1)^2} - 0.02 \cdot e^{-0.1(z-z_2)^2}, 0.17 \right) \times \\ \times \min \left( \left( e^{-32(x-x_1)(x-x_2)/(x_1-x_2)^2} - 1 \right), 1 \right), & (x, z) \in D, \\ 0, & (x, z) \notin D. \end{cases}$$

Здесь  $z_{1,2} = \tilde{z}_{1,2}/L$ ,  $\tilde{z}_1 = 15$  м,  $\tilde{z}_2 = 5$  м. График функции плотности растительного покрова для этого случая представлен на рис. 1, б.

Стационарные контрастные структуры возникают в диссипативной среде. Они существуют за счет притока энергии извне и ее диссипации внутри среды. В данном случае роль диссипативной среды играет лес. Возмущение, распространяющееся в направлении переноса воздушных масс, затухает, когда достигает препятствия в виде высоких деревьев в лесополосе.

Далее для определенности будем предполагать, что воздушный поток движется в направлении горизонтальной оси на открытой местности над поверхностью травы.

Вблизи прямых  $x = x_1$  на границе раздела открытая местность — лес и  $z = h$ , на верхней границе леса распределение горизонтальной компоненты скорости имеет резкий переходный слой от состояния  $u_{\text{open}}(z)$  к состоянию  $u_{\text{forest}}(z)$ , т.е. может быть рассмотрено как контрастная структура. Для описания стационарного распределения такого вида воспользуемся математическим аппаратом теории контрастных структур [14–16]. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2 k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \\ = \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon w \frac{\partial u}{\partial z} + F_x(u, w, x, z), \end{aligned} \quad (7)$$

которое получено из первого уравнения системы (5) с неоднородностью (6) путем умножения на  $\varepsilon$ .

Проведем растяжение масштаба вблизи прямой  $x = x_1$ :  $\xi = \frac{x-x_1}{\varepsilon}$ . Произведем в (7) замену переменных  $x = x_1 + \varepsilon \xi$ ,  $u(x, z) \leftrightarrow \tilde{u}(\xi, z)$ ,  $w(x, z) \leftrightarrow \tilde{w}(\xi, z)$ , тогда приходим к следующему уравнению, описывающему горизонтальную компоненту скорости ветра вблизи прямой  $x = x_1$ :

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 k_z \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \varepsilon \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \\ + C_d \tilde{s}(x_1 + \varepsilon \xi, z) (\tilde{u} - u_{\text{open}}) (\tilde{u} - \phi(x_1 + \varepsilon \xi, z)) (\tilde{u} - u_{\text{forest}}), \\ - \frac{a - \tilde{x}_1}{\varepsilon L} < \xi < \frac{a - \tilde{x}_1}{\varepsilon L}, \quad 0 < z < \frac{b}{L}. \end{aligned} \quad (8)$$

При описании переходов между двумя устойчивыми состояниями среды основную роль играет присоединенная система уравнений [8]. Для того чтобы получить присоединенную систему, следует положить в (8)  $\varepsilon = 0$ . Тогда получим уравнение

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \\ + C_d \tilde{s}(x_1, z) (\tilde{u} - u_{\text{open}}) (\tilde{u} - \phi(x_1, z)) (\tilde{u} - u_{\text{forest}}), \\ - \infty < \xi < \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = y, \\ k_x \frac{dy}{d\xi} = \tilde{u}y + \\ + C_d \tilde{s}(x, z) (\tilde{u} - u_{\text{open}}) (\tilde{u} - \phi(x, z)) (\tilde{u} - u_{\text{forest}}), \\ - \infty < \xi < \infty, \quad -a/L < x < a/L, \quad 0 < z < b/L, \end{aligned} \quad (10)$$

которая при  $x = x_1$ ,  $0 \leq z \leq b/L$  эквивалентна уравнению (9). Система (10) называется присоединенной для уравнения (7), переменные  $x$  и  $z$  выступают в роли параметров.

На рис. 2 изображен эскиз фазового портрета линеаризованной системы, отвечающей (10) на фазовой плоскости  $(\tilde{u}, y)$ . На фазовом портрете отмечены три точки покоя. Точки 1 и 3 являются седлами, а точка 2 — фокусом. Если решение имеет вид стационарной контрастной структуры, то на фазовой плоскости существуют кривые, соединяющие точки покоя. Такие кривые в литературе называются сепаратрисами [14]. Будем выбирать функцию  $\phi(x, z)$  таким образом, чтобы при  $x = x_1$ ,  $0 < z < h$  выполнялись неравенства  $u_{\text{forest}} < u_{\text{open}} < \phi(x_1, z)$ . В этом случае седлами 1 и 3 являются точки  $(u_{\text{forest}}, 0)$  и  $(\phi(x_1, z), 0)$  соответственно, а фокусу 2 соответствует точка  $(u_{\text{open}}, 0)$ . Начальное возмущение  $u = u_{\text{open}}$  беспрепятственно распространяется в области  $(x, z) \notin D$ , поскольку в этой области нет растительности, и уравнение является однородным. Правее точки  $x_1$  плотность растительного покрова  $\tilde{s}(x, z)$ , а вместе с ней и неоднородность в правой

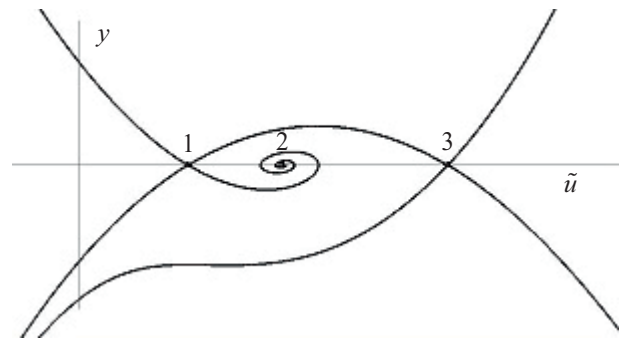


Рис. 2. Эскиз фазового портрета присоединенной системы

части уравнения становится значительной, и решение притягивается к устойчивой точке покоя неоднородного уравнения  $u = u_{\text{forest}}$ . То есть происходит переход между фокусом 2 и седлом 1 по сепаратрисе, соединяющей эти точки покоя и отвечающей значениям  $y < 0$  на фазовой плоскости. Если к тому же выбрать функцию  $\phi(x, z)$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $u_{\text{open}} < \phi(x_2, z) < u_{\text{forest}}$  при  $0 < z < h - \delta z$ , то на фазовом портрете при значениях параметров  $x = x_2$ ,  $0 < z < h - \delta z$  точки  $(u_{\text{forest}}, 0)$  и  $(u_{\text{open}}, 0)$  будут являться седлами 1 и 3 соответственно, а точка  $(\phi(x_2, z), 0)$  — фокусом. На фазовой плоскости существует сепаратриса, соединяющая седла, и возможен переход от седловой точки 1  $(u_{\text{forest}}, 0)$  к седловой точке 3  $(u_{\text{open}}, 0)$  при  $y > 0$ , а при выполнении дополнительных условий, сформулированных в [8], этот переход является стационарным. Величина  $\delta z$  выбирается из физических соображений в ходе численных экспериментов. Аналогичным образом можно описать переходный слой от значения  $u = u_{\text{open}}$  к значению  $u = u_{\text{forest}}$  вблизи отрезка  $\{z=h, x_1 \leq x \leq x_2\}$ .

Примером функции  $\phi(x, z)$ , может служить

$$\phi(x, z) = 17 e^{-Bx^2} e^{-0.1z^2}.$$

Коэффициент  $B$  зависит от ширины лесополосы и подбирается в ходе численных экспериментов. В настоящей работе приведены примеры расчета для лесополосы шириной 40 м при  $B = 0.025$  и 80 м при  $B = 0.009$ .

### 3. Численный расчет

Начальное распределение поля скорости ветра на наветренных и подветренных участках лесополосы, а также внутри нее зададим следующим образом:

$$u^0(x, z) = \begin{cases} u_{\text{open}}(z), & -a/L < x < x_1, \quad 0 \leq z \leq b/L, \\ u_{\text{forest}}(z), & x_1 < x < x_2, \quad 0 \leq z \leq b/L, \\ u_{\text{open}}(z), & x_2 < x < a/L, \quad 0 \leq z \leq b/L. \end{cases}$$

$$w^0(x, z) = 0, \quad -a/L \leq x \leq a/L, \quad 0 \leq z \leq b/L.$$

В области  $\Pi = \{-a/L \leq x \leq a/L, 0 \leq z \leq b/L\}$  вводится равномерная сетка. Решение первых двух уравнений системы (5) с неоднородностями (6) проводится при помощи схемы переменных направлений [17]. Согласно этой схеме, переход от  $n$ -го временного слоя к  $n+1$ -му осуществляется в два этапа. На каждом этапе используется линеаризация Ньютона и метод последовательных приближений.

### 4. Учет уравнения неразрывности

Решение первых двух уравнений системы (5), вообще говоря, не удовлетворяет уравнению неразрывности в каждой точке расчетной области. Поэтому для коррекции величины скорости ветра применим следующий прием.

Определим скорректированную величину скорости ветра следующим образом:  $\mathbf{V}_{\text{corr}} = \mathbf{V} + \delta\mathbf{V}$ , где  $V = \{u(x, z), w(x, z)\}$  — решение первых двух уравнений системы (5),  $\delta\mathbf{V}$  — корректирующая добавка, которая представляет собой

градиент некоторой функции  $\delta\mathbf{V} = -\nabla\Phi$ . Считая, что для функции  $\mathbf{V}_{\text{corr}}$  справедливо уравнение неразрывности, получаем цепочку равенств  $\text{div } \mathbf{V}_{\text{corr}} = \text{div}(\mathbf{V} + \delta\mathbf{V}) = \text{div } \mathbf{V} - \Delta\Phi = 0$ . Таким образом, вспомогательную функцию  $\Phi(x, z)$  можно найти как решение уравнения Пуассона

$$\Delta\Phi = \text{div } \mathbf{V} \quad (11)$$

в прямоугольнике  $\Pi = \{-a/L \leq x \leq a/L, 0 \leq z \leq b/L\}$ . Задавая для этой функции однородные краевые условия Неймана  $\frac{\partial\Phi}{\partial x} \Big|_{x=-a/L} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \Big|_{x=a/L} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=b/L} = 0$ , добьемся того, что корректирующая добавка  $\delta\mathbf{V}$  не внесет изменения в распределение скорости ветра на краях прямоугольника  $\Pi$ . Разностный аналог уравнения Пуассона (11) решается методом матричной прогонки, после чего определяются компоненты векторной добавки к скорости.

### 5. Результаты численных экспериментов

Результы проведенных расчетов поля скорости ветра, возникающего при обтекании воздушным потоком некоторой модельной лесополосы с различной пространственной структурой и плотностью растительного покрова, показали существенное отличие полей скорости на наветренных и подветренных границах лесополосы, обусловленное как различиями в плотности деревьев внутри лесополосы, влияющими на величину шероховатости и сопротивление воздушному потоку, так и различиями в вертикальном распределении фитомассы (наличие и отсутствие подроста в подкroновом пространстве) внутри лесополосы (рис. 3, 4).

На первом шаге результаты показали хорошее соответствие проведенных расчетов с существующими в литературе данными, в частности с полученными с применением моделей замыкания порядка 1.5, по описанию поля скорости ветра на границе пространства неоднородной лесной растительности и приземного слоя воздуха [1–4]. Анализ расчетов полей скорости ветра для лесных полос различной ширины с густым подлеском (рис. 3) отмечает хорошо выраженную вихревую структуру воздушного потока с подветренной стороны лесополосы. При этом увеличение ширины лесополосы в ее подветренной части приводит к увеличению ветровой тени. На наветренной части лесополосы для лесных полос с разной шириной и густым подлеском существенных различий в полях скорости ветра не выявлено.

Расчеты полей скорости ветра вблизи лесополос разной ширины без подлеска (рис. 4) показали хорошо выраженное обтекание воздушным потоком кронового пространства деревьев в лесополосе как сверху над кронами деревьев, так и внутри лесополосы — в подкroновом пространстве. Как следствие внутри древостоя фиксируется дополнительный максимум горизонтальной скорости ветра.

Сравнение полей горизонтальной скорости ветра для лесополос (с подлеском и без подлеска) отмечает существенное увеличение длины ветровой тени для лесополос с проникающей структурой лесополосы

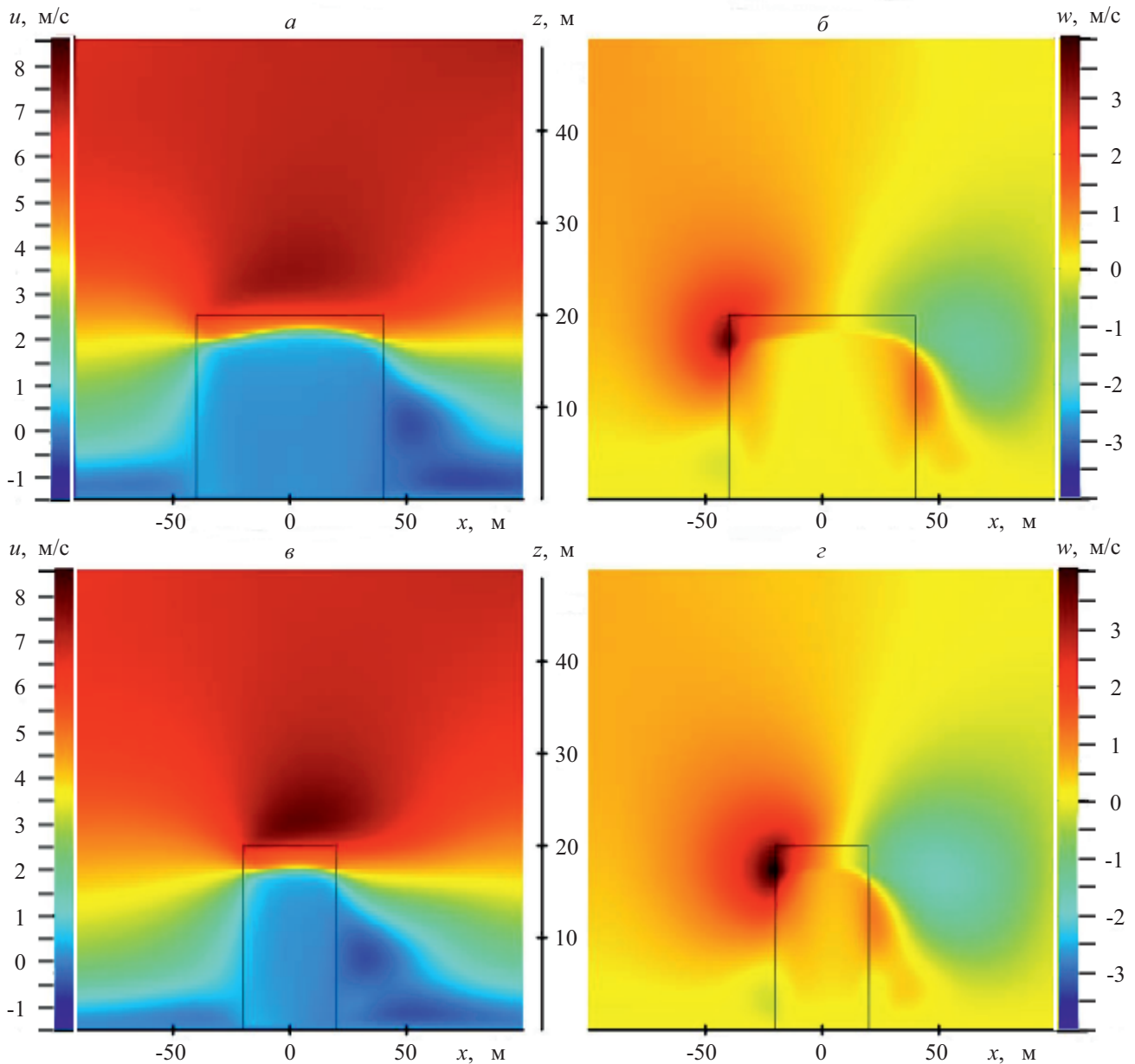


Рис. 3. Распределение скорости ветра для лесных полос различной ширины с густым подлеском. Высота древостоя 20 м. Аэродинамический коэффициент сопротивления принят равным  $C_d = 0.6$ ; *а* — горизонтальная и *б* — вертикальная составляющие скорости ветра при ширине лесополосы 80 м; *в* — горизонтальная и *г* — вертикальная составляющие скорости ветра при ширине лесополосы 40 м. Условная граница кронового пространства деревьев и подростка в лесополосе отмечена прямоугольником

(без подлеска). Влияние длины лесополосы проявлялось исключительно в значениях скорости ветра вблизи подветренной границы. На длину ветровой тени ширина лесополосы с проникающей структурой существенного влияния не оказывала.

### Заключение

В работе для описания процесса обтекания лесополосы воздушным потоком использован подход к моделированию систем с диссипацией, обычно применяющийся при описании автоволновых процессов в биологически активных средах или различных фазовых переходах, например, таких как горение. Результаты модельных экспериментов показали применимость теории диссипативных контраст-

ных структур для решения уравнения Навье–Стокса и неразрывности и расчета поля скорости ветра. Они хорошо соответствуют модельным расчетам поля скорости ветра и режима турбулентности, полученным с использованием альтернативных подходов к описанию переноса и, в частности, моделей замыкания 1.5 порядка [1–4]. Проведенные численные эксперименты показали существенное влияние, оказываемое неоднородной растительностью на воздушный поток. В частности, были показаны различия в ветровом режиме, возникающие при обтекании воздушным потоком лесополос разных пространственных размеров и вертикальных структур.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-04-01568-а, 13-01-00200-а).

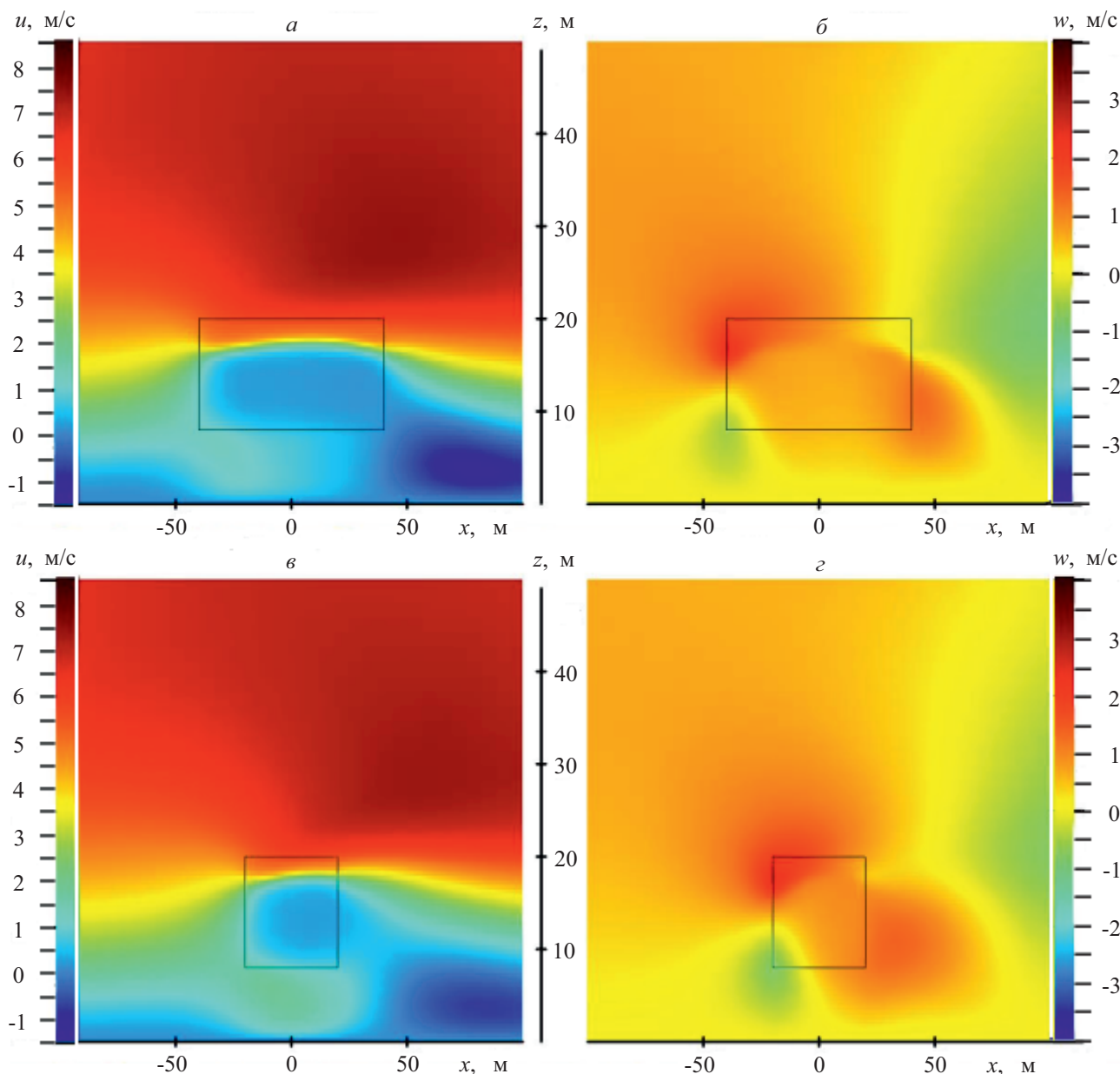


Рис. 4. Распределение скорости ветра для лесных полос различной ширины без подлеска. Высота древостоя 20 м. Аэродинамический коэффициент сопротивления принят равным  $C_d = 0.2$ ; а — горизонтальная составляющие скорости ветра при ширине лесополосы 80 м; б — вертикальная составляющие скорости ветра при ширине лесополосы 40 м. Условная граница кронового пространства деревьев в лесополосе отмечена прямоугольником

**Список литературы**

1. Ольчев А.В., Радлер К. // Изв. Самарск. науч. центра РАН. 2009. **11**, № 1(7). С. 1538.
2. Gravenhorst G., Oltchev A., Sogachev A. et al. // Met. Zeitsch. 2005. **14**(2). P. 117.
3. Olchev A., Radler K., Sogachev A. et al. // Ecolog. Modelling. 2009. **220**. P. 3046.
4. Мухартова Ю.В., Левашова Н.Т., Ольчев А.В., Шапкина Н.Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2015. № 1. С. 15 (Mukhartova Yu.V., Levashova N.T., Oltchev A.V., Shapkina N.E. // Moscow University Phys. Bull. 2015. N 1. P. 14).
5. Pielke R. Mesoscale meteorological modelling. San Diego, 2002.
6. Garrat J.R. The Atmospheric Boundary Layer. Cambridge, 1992.
7. Sogachev A., Panferov O. // Bound. Layer Meteorol. 2006. **121**. P. 229.
8. Нефедов Н.Н., Давыдова М.А. // Дифф. уравнения. 2013. **49**, № 6. С. 715.
9. Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Ягремцев А.В. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. **53**, № 3. С. 35.
10. Зилитинкевич С.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л., 1970.
11. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М., 1987.
12. FitzHugh R. // Biophysical J. 1961. **1**. P. 445.
13. Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. // Журн. физ. химии. 1938. **12**. С. 100.
14. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.

15. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. **53**, № 9. С. 1427.
16. Volkov V.T., Nejedov N.N. // Lecture Notes in Computer Sci. 2013. **8236**. P. 524.
17. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М., 2003.

### The application of the theory of contrast structures for describing wind field in spatially heterogeneous vegetation cover

N. T. Levashova<sup>1,a</sup>, J. V. Muhartova<sup>1,b</sup>, M. A. Davydova<sup>1,c</sup>, N. E. Shapkina<sup>1</sup>, A. V. Oltchev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

<sup>2</sup>A. N. Severtsov Institute of Ecology and Evolution, Russian Academy of Sciences, Moscow 119071, Russia.

E-mail: <sup>a</sup> natasha@npanalytica.ru, <sup>b</sup> muhartova@yandex.ru, <sup>c</sup> m.davydova@bk.ru.

The two-dimensional mathematical model based on the theory of contrast structures is proposed for solving the problem of the wind flow over some obstacles in the form of shelterbelt. With the help of numerical calculations the wind fields around the shelterbelts of different spatial sizes and vertical structures are obtained.

*Keywords:* turbulent exchange, contrast structures, the Navier–Stokes equations.

PACS: 02.30.Jr.

Received 5 November 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2015).

#### Сведения об авторах

1. Левашова Наталия Тимуровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: natasha@npanalytica.ru.
2. Мухартова Юлия Вячеславовна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: muhartova@yandex.ru.
3. Давыдова Марина Александровна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: m.davydova@bk.ru.
4. Шапкина Наталья Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: neshapkina@mail.ru.
5. Ольчев Александр Валентинович — канд. геогр. наук, ст. науч. сотрудник; e-mail: aoltche@yandex.ru.