

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

Влияние адсорбированного слоя на резонансные частоты и добротность сферических микрорезонаторовЮ. А. Демченко^a, М. Л. Городецкий^b*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики колебаний. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: ^ayury.demchenko@gmail.com, ^bmichael.gorodetsky@gmail.com*

Статья поступила 28.01.2015, подписана в печать 04.03.2015.

В работе рассматриваются два подхода к расчету резонансного сдвига частот и изменению добротности вследствие адсорбции однородного изотропного слоя диэлектрического вещества на поверхности микрорезонатора. Первый подход основан на аналитическом решении характеристического уравнения в случае сферического микрорезонатора в приближении тонкого диэлектрического слоя на его поверхности. Второй метод более общий и использует адиабатический инвариант. Этот метод, как было показано, эквивалентен известному методу теории возмущений, был применен для случая сферического микрорезонатора. Оба метода дали один и тот же результат и подтвердили результаты, полученные ранее. Полученная комплексная часть сдвига частот позволяет получить изменение добротности микрорезонатора для слоя с потерями.

Ключевые слова: МШГ, поглощение, тонкий слой, собственные частоты.*УДК:* 535. *PACS:* 42.25.Bs.**Введение**

В настоящей работе проведено сравнение методов расчета сдвига собственных частот и добротности микрорезонаторов с модами шепчущей галереи (МШГ) вследствие модификации граничных условий, в частности, из-за влияния тонкого однородного изотропного слоя на поверхности резонатора. Так, толщина слоя адсорбированного вещества на поверхности обычно не превышает нанометра [1–3]. Изменение сдвига резонансной частоты играет ключевую роль в работе оптических сенсоров на резонаторах с МШГ и определяет их предельную чувствительность. Оптические сенсоры и биосенсоры крайне востребованы в последние десятилетия [1]. В отличие от химических методов использование оптических сенсоров на основе микрорезонаторов позволяет при значительно меньших размерах устройств обеспечить меньшее время детектирования и большую чувствительность. Микрорезонаторные сенсоры возможны также в интегральном исполнении [1, 4, 5]. При этом именно сенсоры на резонаторах с МШГ наряду с более сложными сенсорами на фотонных кристаллах обладают наилучшими характеристиками [5].

В настоящей работе на примере сферических микрорезонаторов, допускающих аналитическое решение, рассматривается метод, использующий точное характеристическое уравнение в пределе тонкого слоя без использования дополнительных допущений. Эти результаты сравниваются с расчетом другим приближенным методом, использующим адиабатический инвариант и тензор Максвелла, который претендует на универсальность и, в отличие от решения характеристического уравнения, позволяет

рассчитывать поправки для микрорезонаторов более сложной геометрии.

Показано, что поглощение в тонком слое на поверхности резонатора по-разному влияет на добротность ТЕ- и ТМ-мод. В литературе существуют различающиеся выражения для оптических потерь в поверхностном слое, имеющие разные зависимости от длины волны и размера резонатора [1–5]. Одна из целей настоящей статьи состоит в разрешении этой неопределенности.

Следует отметить, что выражения для сдвигов, полученные для сферических микрорезонаторов, обычно можно использовать как хорошее приближение и для микрорезонаторов сфероидальной и тороидальной формы.

1. Характеристическое уравнение**1.1. Диэлектрическая сфера**

Собственные частоты сферического резонатора с простейшим граничным условием Дирихле для электрического поля (металлическая граница) определяются корнями сферических функции Бесселя

$$nk_0a = t_{m,q}, \quad (1)$$

где k_0 — волновой вектор в вакууме, a и n — радиус и показатель преломления резонатора и q и m — радиальный и азимутальный индексы мод соответственно.

Для диэлектрических резонаторов на границе поле не обращается в 0, и необходимо учитывать различные граничные условия для компонент поля. Вследствие изменения граничных условий поле частично «выпадает» из резонатора, что приводит к сдвигу собственной частоты. Так как сдвиг мал по сравнению с собственными частотами мод ШГ,

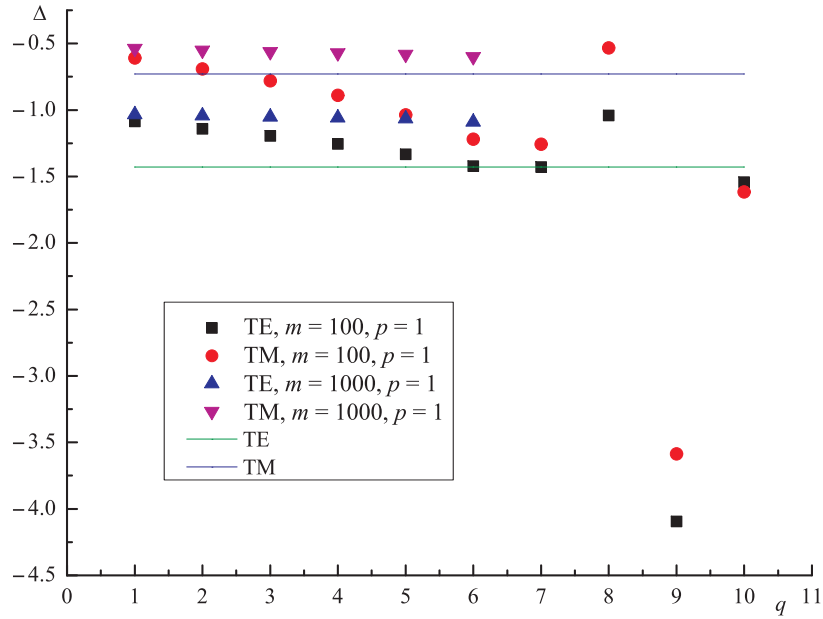


Рис. 1. Поправка Δ для собственной частоты диэлектрической сферы с показателем преломления $n = 1.4$ для мод с разными азимутальными индексами в зависимости от индекса моды q

то будем называть его поправкой. Выражение для нее определяется [6]

$$\Delta(nk_0a) = -\frac{nP/P_e}{\sqrt{n^2 - n_e^2}}, \quad (2)$$

где n_e — показатель преломления среды, окружающей резонатор, а P и P_e равны 1 для ТЕ-мод и $1/n^2$ и $1/n_e^2$ для ТМ-мод соответственно.

Точность этого выражения для мод шепчущей галереи составляет $\sim \alpha_q(2/m)^{2/3}$ [6–8], где α_q — q -й корень функции Эйри, и потому слабо зависит от индекса q для больших m (мод с большой добротностью).

На рис. 1 показаны результаты численного анализа характеристического уравнения вблизи корней функции Бесселя с $q \geq 1$. Как видно из графика, поправки очень слабо зависят от q . Существенные отклонения для мод с $q > 6$ при $m = 100$ обусловлены быстрым ухудшением локализации и соответственно излучательной добротности мод [7].

1.2. Поправки тонкого слоя

Рассмотрим оптический сферический резонатор с тонким слоем пробного оптического материала на поверхности толщиной $d \ll \lambda$ (λ — длина волны) с другим показателем преломления n_p (рис. 2). Так как детектирование вещества может происходить не только в воздухе [9] но и, например, в растворах [10], то окружающая резонатор среда выбирается с показателем преломления, отличным от 1. Для того чтобы рассчитать поправку для собственной частоты, нужно воспользоваться условием сшивки для тангенциальных составляющих полей дважды: на границе между резонатором и слоем и между слоем и окружающей средой:

$$\mathbf{E}_r^{\text{res}}|_a = \mathbf{E}_r^{\text{l}}|_a, \quad \mathbf{B}_r^{\text{res}}|_a = \mathbf{B}_r^{\text{l}}|_a, \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_r^{\text{l}}|_{a+d} = \mathbf{E}_r^{\text{ext}}|_{a+d}, \quad \mathbf{B}_r^{\text{l}}|_{a+d} = \mathbf{B}_r^{\text{ext}}|_{a+d}, \quad (4)$$

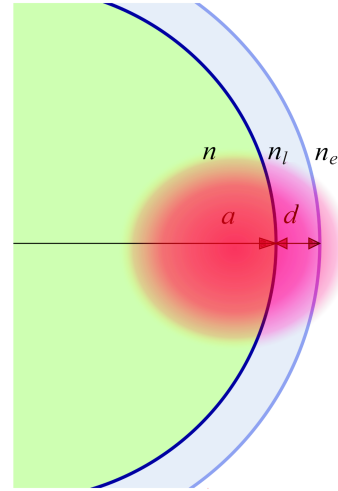


Рис. 2. Иллюстрация распределения поля у поверхности резонатора, в тонком диэлектрическом слое и в окружающей среде

где \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля, а индексы res, l и ext соответствуют полям внутри резонатора, внутри слоя и в среде соответственно.

Этот метод нахождения сдвига собственных частот позволяет найти поправку с любой точностью, так как не использует никаких дополнительных условий. Рассмотрим наиболее простой случай, допускающий аналитическое решение, когда резонатор имеет сферическую форму. При этом решение для электрического и магнитного полей уравнения Гельмгольца для ТЕ-мод можно записать явно в виде

$$\mathbf{e}_{\text{TE}} = C_{\text{TE}} \frac{f_\ell(kr)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\frac{imY_{\ell m}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \mathbf{i}_\theta - \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \mathbf{i}_\phi \right), \quad (5)$$

$$\mathbf{b}_{\text{TE}} = -C_{\text{TE}} \frac{i}{k_0rc\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta, \phi)f_\ell(kr)\mathbf{i}_r + \right.$$

$$+ \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial (r f_{\ell}(kr))}{\partial r} \mathbf{i}_{\theta} + \frac{im}{\sin \theta} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{\partial (r f_{\ell}(kr))}{\partial r} \mathbf{i}_{\phi}, \quad (6)$$

а для ТМ-мод как

$$\mathbf{e}_{\text{TM}} = C_{\text{TM}} \frac{1}{kr \sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) f_{\ell}(kr) \mathbf{i}_r + \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial (r f_{\ell}(kr))}{\partial r} \mathbf{i}_{\theta} + \frac{im}{\sin \theta} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{\partial (r f_{\ell}(kr))}{\partial r} \mathbf{i}_{\phi} \right), \quad (7)$$

$$\mathbf{b}_{\text{TM}} = -C_{\text{TM}} \frac{in f_{\ell}(kr)}{c \sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\frac{im Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \mathbf{i}_{\theta} - \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \mathbf{i}_{\phi} \right), \quad (8)$$

где C_{TE} и C_{TM} — нормировочные константы, $\ell = m + p$, m — азимутальный индекс моды, а p характеризует количество максимумов поля в меридиональной плоскости. При этом радиальная составляющая $f_{\ell}(kr)$ определяется через функции Рикатти–Бесселя $\psi_{\ell}(x) = \sqrt{\pi x/2} J_{\ell+1/2}(x)$ и $\chi_{\ell}(x) = -\sqrt{\pi x/2} N_{\ell+1/2}(x)$ ($J_{\ell+1/2}(x)$ и $N_{\ell+1/2}(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Неймана полуполого порядка). В резонаторе мы выбираем функцию $\psi_{\ell}(nk_0 r)$, в слое $\alpha \psi_{\ell}(n_p k_0 r) + \beta \chi_{\ell}(n_p k_0 r)$ и снаружи $\gamma \chi_{\ell}(n_e k_0 r)$. При этом мы пренебрегли $\psi_{\ell}(n_e k_0 r)$ в среде ввиду ее малости в области от 0 до ее корней по сравнению с функцией $\chi_{\ell}(k_0 r)$. Используя граничные условия, можно получить систему уравнений на границе резонатора и слоя:

$$\frac{1}{n\sqrt{P}} \psi_{\ell}(nk_0 a) = \frac{1}{n_p \sqrt{P_p}} (\alpha \chi_{\ell}(n_p k_0 a) + \beta \chi_{\ell}(n_p k_0 a)), \quad (9)$$

$$\sqrt{P} \psi'_{\ell}(nk_0 a) = \sqrt{P_p} (\alpha \psi'_{\ell}(n_p k_0 a) + \beta \chi'_{\ell}(n_p k_0 a)) \quad (10)$$

и аналогично на границе слоя и среды:

$$\frac{1}{n_p \sqrt{P_p}} (\alpha \psi_{\ell}(n_p k_0 (a+d)) + \beta \chi_{\ell}(n_p k_0 (a+d))) = \frac{1}{n_e \sqrt{P_e}} \gamma \chi_{\ell}(n_e k_0 (a+d)), \quad (11)$$

$$\sqrt{P_p} (\alpha \psi'_{\ell}(n_p k_0 (a+d)) + \beta \chi'_{\ell}(n_p k_0 (a+d))) = \sqrt{P_e} \gamma \chi'_{\ell}(n_e k_0 (a+d)), \quad (12)$$

где α , β и γ определяют отношение амплитуд поля в средах и P_p равно 1 для ТЕ мод и $1/n_p^2$ для ТМ мод. В общем виде эта система относительно k_0 не разрешается, но ее удастся разрешить в допущении тонкого слоя, много меньшего радиуса резонатора и длины волны.

Разложим члены в уравнениях, содержащие d , по малому параметру $\eta = d/a$ и избавимся от вторых производных, воспользовавшись дифференциальным уравнением для функций Рикатти–Бесселя:

$$\frac{1}{n\sqrt{P}} \psi_{\ell}(nk_0 a) + k_0 d \frac{\sqrt{P}}{P_p} \psi'_{\ell}(nk_0 a) = \gamma (\chi'_{\ell}(n_e k_0 a) + k_0 d \chi'_{\ell}(n_e k_0 a)), \quad (13)$$

$$\sqrt{P} \psi_{\ell}(nk_0 a) - k_0 d \left(1 - \frac{l(l+1)}{n_e^2 k_0^2 a^2} \right) \frac{n_p^2 P_p}{n\sqrt{P}} \psi_{\ell}(nk_0 a) =$$

$$= P_e \gamma \left(\chi'_{\ell}(n_e k_0 a) - n_e k_0 d \left(1 - \frac{l(l+1)}{n_e^2 k_0^2 a^2} \right) \chi_{\ell}(n_e k_0 a) \right). \quad (14)$$

Так как влияние слоя мало, то поправку Δ_p можно рассчитывать как

$$nk_0 a = t_{m,q} + \Delta_0 + \Delta_p. \quad (15)$$

Учитывая малость поправки, из характеристического уравнения вблизи корней функции Бесселя можно получить выражения, связывающее функции второго рода с их производными

$$\psi_{\ell}(t_{m,q} + \Delta) = \Delta \psi'_{\ell}(t_{m,q}), \quad (16)$$

$$\chi'_{\ell}(n_e k_0 a) = \sqrt{n^2/n_e^2 - 1} \chi_{\ell}(n_e k_0 a). \quad (17)$$

Подставив выражения (16) и (17) в (13) и в (14), разделив первое уравнение на второе, можно получить

$$\frac{\frac{1}{n\sqrt{P}} (\Delta_0 + \Delta_1) + k_0 d \frac{1}{P_p}}{1 + \frac{k_0 d n_p^2 P_p}{P_e \sqrt{n^2 - 1}} \left(1 - \frac{l(l+1)}{z^2} \right)} = \frac{-1}{n_e P_e \sqrt{n^2 - 1}} \frac{1 - k_0 d \sqrt{n^2 - n_e^2}}{1 + \frac{n_e k_0 d}{\sqrt{n^2 - 1}} \left(1 - \frac{l(l+1)}{k_0^2 a^2} \right)}. \quad (18)$$

Уравнение разрешается относительно Δ_p :

$$\Delta_p = -nk_0 d \frac{P_p}{P_e} \times \left(\frac{P_e}{P_p} + \frac{n_p^2 P_p - n^2 P_e}{P_e (n^2 - n_e^2)} + \frac{n^2 P_e - P_p}{P_e n^2 - n_e^2} \frac{l(l+1)}{k_0^2 d^2} \right). \quad (19)$$

Учитывая, что P_p равно 1 или $1/n_p^2$ в зависимости от типа моды и $nk_0 a \approx \ell$, можно получить достаточно простое выражение

$$\Delta_p = -nk_0 d \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2} (1 + n_e^2 (P_p - P)). \quad (20)$$

Это выражение согласуется с полученным в более ранних работах [11], но при этом имеет более простой вид. Так как в микрорезонаторных биосенсорах детектируемые величины крайне малы [12] и практически не зависят от членов $l^{-1/3}$, то для большинства приложений выражение (20) хорошо описывает величину поправки.

Используя полученное выражение, также можно рассчитать изменение добротности резонатора, вносимое тонким слоем при наличии в нем затухания. Как было показано в работах [2, 13], такие потери из-за поглощения в тонком слое воды на поверхности резонатора могут очень существенно ограничивать добротность реального резонатора. Пусть показатель преломления слоя можно записать в виде $n_p \rightarrow n_{pr} - in''_p$, где $n''_p = -\alpha_p/2k_0$ (α_p — оптические потери в материале), тогда $Q_p = \frac{nk_0 a}{2\text{Im}(\Delta_p)}$ и

$$Q_{p,TE}^{-1} \approx \frac{d}{a} \frac{4n_r}{n^2 - n_e^2} n''_p, \quad (21)$$

$$Q_{p,TM}^{-1} \approx Q_{p,TE}^{-1} \left(\frac{n^2 - n_e^2}{n^2} + \frac{n_e^4}{n^4} \right).$$

2. Расчет через тензор Максвелла

Чтобы рассчитать поправки для тонкого слоя, воспользуемся еще одним методом электродинамики.

При медленном адиабатическом изменении параметров системы величины, называемые адиабатическими инвариантами, не изменяются. В частности:

$$\frac{\Delta A}{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta \omega}{\omega}, \quad (22)$$

где ΔA — работа пондеромоторных сил давления света по перемещению границы адсорбированного слоя, \mathcal{E} — энергия поля. Так как микрорезонатор с диэлектрической границей является открытой системой, то интеграл энергии во всем пространстве расходится. Существуют разные методы обхода этого ограничения [7]. В настоящей работе в качестве энергии поля выбирается энергия, сосредоточенная внутри резонатора, что является хорошим приближением для высокочастотного микрорезонатора и обеспечивает сходимость интеграла.

Чтобы получить изменение собственных частот, адиабатически увеличим толщину слоя на поверхности резонатора от 0 до d . Чтобы найти работу поля внутри слоя, нужно получить разницу давления световой волны в слое и в окружающем слой пространстве. При этом удобно воспользоваться тензором Максвелла σ_{ij} в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ [14]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(\epsilon E_i E_j + H_i H_j - \frac{\epsilon E^2 + H^2}{2} \delta_{ij} \right), \quad (23)$$

который необходимо использовать в сферических координатах. Разницу давлений на поверхности сред с показателями преломления ϵ_p и ϵ_e можно получить как

$$p = \sigma_{rr}|_{\text{in}} - \sigma_{rr}|_{\text{out}} = \frac{(\epsilon_p - \epsilon_e)}{8\pi} \left[\frac{\epsilon_p}{\epsilon_e} E_r^2 + [E_\phi^2 + E_\theta^2] \right]. \quad (24)$$

Для получения работы нужно проинтегрировать силу на всей внутренней поверхности слоя, действующую на элементарную площадь поверхности dS , на толщине слоя в данной точке поверхности. Так как толщина слоя мала и предполагается одинаковой на всей поверхности резонатора, то изменением напряженности поля в слое мы пренебрегаем:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{\int dS(p d)}{\mathcal{E}}, \quad (25)$$

где энергия поля в резонаторе определяется по формуле

$$\mathcal{E} = \int \frac{1}{4\pi} \epsilon E^2 dV. \quad (26)$$

Это выражение совпадает с выражением, полученным другим методом из обобщения теории возмущения границы двух диэлектриков с ϵ_1 и ϵ_2 [15]:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\alpha} = \int dA \frac{dh}{d\alpha} \left[\Delta \epsilon_{12} |E_{\parallel}^{(0)}|^2 - \Delta(\epsilon_{12}^{-1}) |D_{\perp}^{(0)}|^2 \right], \quad (27)$$

где α — безразмерный параметр, характеризующий возмущение; $h(\alpha)$ — смещение границы; dA —

элемент площади на границе, $E_{\parallel}^{(0)}$ и $D_{\perp}^{(0)}$ — невозмущенные параллельная и нормальная к границе напряженность электрического поля и электрическая индукция соответственно; $\Delta \epsilon_{12} = \epsilon_1 - \epsilon_2$ и $\Delta(\epsilon_{12}^{-1}) = \epsilon_1^{-1} - \epsilon_2^{-1}$.

Рассчитаем поправку из этого выражения и сравним ее с результатом, полученным выше, из аналитического точного решения.

Поскольку угловая зависимость для ТЕ мод в числителе и в знаменателе одинаковая, выражение (25) сводится к

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{p d a^2}{\int E^2 r^2 dr}. \quad (28)$$

Для расчета ТЕ-мод интеграл в знаменателе берется

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{C_{\text{TM}}^2}{n^2 k_0^2 \ell(\ell+1)} \frac{\pi n k_0 r}{2} J_{\ell+1/2}(n k_0 r)^2 dr = \\ & = \frac{C_{\text{TM}}^2}{n^2 k_0^2 \ell(\ell+1)} \frac{\pi a^2}{4 n k_0} \times \\ & \quad \times (J_{\ell+1/2}(n k_0 a)^2 - J_{\ell-1/2}(n k_0 a) J_{\ell+3/2}(n k_0 a)). \end{aligned} \quad (29)$$

Так как МШГ $\ell \approx m \gg 1$ велико, то

$$J'_{\ell+1/2}(n k_0 a) \approx J'_{\ell-1/2}(n k_0 a) \approx J'_{\ell+3/2}(n k_0 a) = G. \quad (30)$$

Электрическое поле для ТЕ-мод тангенциальное и не имеет компонент, направленных перпендикулярно поверхности, и в слое будет отличаться в n_p^2/n_e^2 раз. Пользуясь этим, поле в слое можно выразить через поле на границе внутри резонатора. Подставляя полученные выражения в (28), можно получить

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2} \frac{d}{a} \quad (31)$$

и соответственно

$$\Delta(nka) = -nkd \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2}. \quad (32)$$

Для ТМ-мод электрическое поле имеет также нормальную к поверхности компоненту. Интегрируя отдельно угловые части для всех трех компонент поля и оценивая их радиальные части, можно получить, что θ -компонента поля много меньше двух других компонент.

Получая интегралы для радиальных частей энергии поля ТМ-мод

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{C_{\text{TM}}^2}{k_0^2 l(l+1)} \left(\sqrt{\frac{\pi n k_0 r}{2}} J_{\ell+1/2}(n k_0 r) \right)^2 dr = \\ & = \frac{C_{\text{TM}}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{a m \pi G^2}{8}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{C_{\text{TM}}^2}{k_0^2 l(l+1)} \left(\frac{1}{n k_0 r} \sqrt{\frac{\pi n k_0 r}{2}} J_{\ell+1/2}(n k_0 r) \right)^2 dr = \\ & = \frac{C_{\text{TM}}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{a \pi G^2}{8 m^2} (2 n k_0 a + m), \end{aligned} \quad (34)$$

можно получить

$$\mathbb{R}_{\text{TM}} = \frac{C_{\text{TM}}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{a m \pi G^2}{8}. \quad (35)$$

Упростить выражения для поля в слое можно, пользуясь условиями шивки и разложениями для функций Рикатти–Бесселя:

$$R_l = \frac{C_{\text{TM}}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{\pi n k_0 a}{2} \left(\frac{n^4}{n_p^2} G^2 \Delta^2 + G^2 \right) = \frac{C_{\text{TM}}^2}{k_0^2 l(l+1)} \frac{\pi n k_0 a}{2} G^2 \frac{n^2 n_e^2 + n_p^2 n^2 - n_p^2 n_e^2}{n_p^2 (n^2 - n_e^2)}. \quad (36)$$

Таким образом, для ТМ-моды относительная поправка для собственной частоты

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = - \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2} \frac{d}{a} \frac{n^2 n_e^2 + n_p^2 n^2 - n_p^2 n_e^2}{n^2 n_p^2}. \quad (37)$$

Полученный результат сходится как с результатом, полученным с помощью характеристического уравнения, так и с результатами, полученными ранее в работе [11].

Заключение

В настоящей работе были продемонстрированы новые подходы к оценке сдвига собственных частот при осаждении тонкого диэлектрического слоя на поверхности резонатора. Приведенные методы подтверждают результаты, полученные ранее с использованием возмущения векторного уравнения Гельмгольца [11], но при этом обладают большей простотой, меньшим количеством допущений и физической ясностью. Исходя из рассчитанных поправок получены комплексные добавки к частоте из-за наличия поглощения в слое, определяющие зависимость оптических потерь от длины волны и размера резонатора, и показано, что для ТЕ- и ТМ-мод они различны. Кроме того, рассматривалась зависимость простой диэлектрической поправки от радиального

индекса q . Было получено, что для $q \leq 6$ поправки можно считать постоянными, а для мод высших порядков их нужно учитывать более точно.

Авторы выражают благодарность профессору С. П. Вятчанину за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-02-00271).

Список литературы

1. Fan X, White I, Shopova S. et al. // *Anal. Chimica*. 2008. **620**. P. 8.
2. Gorodetsky M., Savchenkov A., Ilchenko V. // *Opt. Lett.* 1996. **21**. P. 453.
3. Ganta D., Dale E., Rosenberger A. // *Meas. Sci. and Tech.* 2014. **25**. P. 055206.
4. Luchansky M., Bailey R. // *Anal. Chem.* 2012. **84**. P. 793.
5. Volmer F., Yang L. // *Nanophotonics*. 2012. **1**. P. 267.
6. Schiller S. // *Appl. Opt.* 1993. **32**. P. 2181.
7. Городецкий М.Л. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью. М., 2011.
8. Demchenko Y., Gorodetsky M. // *J. Opt. Soc. Amer. B*. 2013. **30**. P. 3056.
9. Farca G., Shopova S., Rosenberger A. // *Opt. Express*. 2007. **15**. 17443-8. 033106.
10. Westcott S., Zhang J., Shelton R. et al. // *Rev. Sci. Instrum.* 2008. **79**.
11. Teraoka I., Arnold S. // *J. Opt. Soc. Amer. B*. 2006. **23**. P. 1381.
12. Arnold S., Khoshsima M., Teraoka I. // *Opt. Lett.* 2003. **28**, N 4. P. 272.
13. Vernooij D., Ilchenko V., Mabuchi H. et al. // *Opt. Lett.* 1998. **23**. P. 247.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1988.
15. Johnson S., Ibanescu M., Skorobogatiy M. et al. // *Phys. Rev.* 2002. **65**. P. 066611.

The effect of an absorbed layer on the resonant frequencies and Q-factors of spherical microresonators

Y. A. Demchenko^a, M. L. Gorodetsky^b

Department of Physics of Oscillations, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^ayury.demchenko@gmail.com, ^bmichael.gorodetsky@gmail.com.

We investigate two approaches to the calculation of the resonant frequency shift and Q-factor modification in a microresonator due to adsorption of a homogeneous isotropic dielectric layer on its surface. The first approach is based on the analytical solution of the characteristic equation for a spherical microresonator in the approximation of a thin dielectric layer on its surface. The second, more general approach, uses the adiabatic invariant. We demonstrate it to be equivalent to the well-known perturbation-theory technique and use it for the case of a spherical microresonator. Both approaches yield the same result and confirm the previous data. The obtained complex part of the frequency shift allows one to calculate the variation in the Q-factor of a microresonator with a lossy layer.

Keywords: whispering-gallery mode, absorption, thin layer, eigenfrequencies.

PACS: 42.25.Bs.

Received 28 January 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2015).

Сведения об авторах

1. Демченко Юрий Анатольевич — аспирант; e-mail: yury.demchenko@gmail.com.

2. Городецкий Михаил Леонидович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-39-03, e-mail: michael.gorodetsky@gmail.com.