

## Нелинейная модель морских поверхностных волн

К. В. Показеев<sup>1,a</sup>, А. С. Запевалов<sup>2,b</sup>, В. В. Пустовойтенко<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики моря и вод суши. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

<sup>2</sup>Черноморский филиал МГУ имени М. В. Ломоносова.  
Россия, 299001, Севастополь, ул. Героев Севастополя, д. 7.  
E-mail: <sup>a</sup>sea@phys.msu.ru, <sup>b</sup>sevzepter@mail.ru, <sup>c</sup>v2pust@mail.ru

Статья поступила 19.01.2015, подписана в печать 13.03.2015.

Построена аналитическая модель, описывающая профиль нелинейной волны на морской поверхности. Параметры модели рассчитываются на основе полученных в натуральных экспериментах статистических характеристик волнового поля. Модель учитывает групповую структуру поверхностных волн и асимметрию распределения возвышений поверхности, создаваемых волнами. Для описания огибающей группы волн и несущей волны используются эллиптическая функция Якоби второго рода.

*Ключевые слова:* нелинейные морские волны, групповая структура, асимметрия распределения возвышений поверхности.

УДК: 532.5.01. PACS: 47.35.Bb, 92.10.Hm.

### Введение

Широкий круг задач, связанных с рассеянием радио- и акустических волн, воздействием поверхностных волн на суда и береговые сооружения, генерацией инфразвукового излучения, и ряд других требует построения моделей морской поверхности адекватно описывающих ее характеристики. Еще в 1849 г. Стокс опубликовал работу [1], в которой показал кинематическую нелинейность профиля волн конечной амплитуды. Однако длительное время именно линейная модель оставалась основной моделью, описывающей поле морских поверхностных волн. В линейной модели поле волн представляют в виде суммы большого числа независимых синусоидальных составляющих, амплитуды и фазы которых являются случайными переменными. В силу центральной предельной теоремы подобная модель предполагает, что возвышение морской поверхности подчиняется распределению Гаусса [2].

В 1965 г. Кинсман экспериментально установил, что распределение возвышений морской поверхности является квазигауссовым и описывается распределением Грама–Шарлье [3], что в дальнейшем неоднократно подтверждалось натурными измерениями [4, 5]. Отклонения от распределения Гаусса обусловлены нелинейностью поля поверхностных волн [6, 7]. Физическими факторами, ответственными за отклонения от распределения Гаусса, наряду с кинематической нелинейностью профиля морских волн [8] являются межволновые взаимодействия [9, 10].

Изменчивость асимметрии распределения возвышений морской поверхности приведет к ошибкам в измерении расстояния от космического аппарата до морской поверхности и соответствующим ошибкам в построении ее динамической топографии [11]. Изменения асимметрии также влияют на точность дистанционного определения высоты морских волн [12] и точность определения скорости приводного ветра [13].

Важной особенностью морских поверхностных волн является их групповая структура, которая проявляется в чередовании высоких и низких волн. Она присуща волнению разных типов и интенсивности на всех стадиях его развития [14]. Причины возникновения групповой структуры до конца не ясны [15]. Большинство исследователей придерживается мнения, что ее появление связано с нелинейными процессами в поле поверхностных волн [16, 17], в том числе с неустойчивостью Бенджамин–Фейра [18]. Групповая структура также является фактором, приводящим к потере когерентности доминантными волнами [19].

### 1. Групповая структура

Гравитационные волны на «глубокой воде» (глубина больше половины длины волны) подчиняются дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = gk. \quad (1)$$

где  $\omega$  и  $k$  — циклическая частота и волновое число соответственно,  $g$  — гравитационное ускорение. Будем полагать, что по поверхности распространяются волны с доминантной частотой  $\omega_0$  и волновым числом  $k_0$ . Представим огибающую группу волн в виде [16]

$$G(x, t) = dn \left( m_g \left( k_0 x - \frac{\omega_0}{2} t - \Phi_0 \right), \rho_g \right), \quad (2)$$

где  $x$  — пространственная координата;  $t$  — время;  $dn$  — эллиптическая функция Якоби второго рода с модулем  $\rho_g$ . Параметры  $\rho_g$  и  $m_g$  определяют форму огибающей и число волн в группе, параметр  $\Phi_0$  определяет положение огибающей в начальный момент.

Выбор параметров огибающей (2) целесообразно осуществлять на основе определенных в натуральных условиях статистических характеристик поля поверхностных волн. При проведении экспериментальных исследований для анализа групповой структуры волн используются два интегральных параметра —

фактор групповости  $F_g$  и среднее число волн в группе  $N_g$  [15]

$$F_g = 1.41 \sigma_g / H_g, \quad (3)$$

$$N_g = \overline{\omega}_\eta / \overline{\Omega}_g, \quad (4)$$

где  $\sigma_g$  — стандартное отклонение огибающей от ее среднего значения,  $H_g$  — среднее значение огибающей,  $\overline{\omega}_\eta$  — средняя частота спектра волн,  $\overline{\Omega}_g$  — средняя частота спектра огибающей. При построении модели волнового поля примем, что  $\overline{\omega}_\eta = \omega_0$ .

Данные волнографических измерений показали, что для Черного моря среднее число волн в группе равняется 4, значения параметра  $F_g$  в основном лежат в пределах от 0.7 до 0.8 при среднем значении 0.76. Параметры  $F_g$  и  $N_g$  не зависят от высот волн и их периодов, что позволило сделать вывод об автомодельности групповой структуры волн [15].

Параметром огибающей (2), который определяет фактор групповости  $F_g$ , является  $\rho_g$ . Полученным в экспериментах на Черном море значениями  $F_g$ , как видно из рис. 1, а, соответствуют значения  $\rho_g$ , меняющиеся в пределах от 0.95 до 0.97. Огибающие групп волн, рассчитанные при  $\rho_g = 0.95$  и  $\rho_g = 0.97$ , показаны на рис. 1, б, где  $T$  — период огибающей.

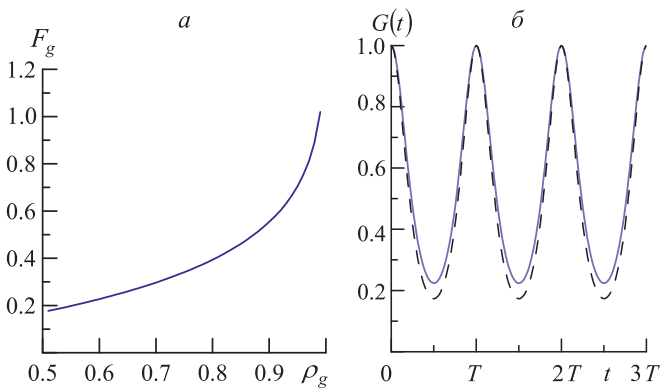


Рис. 1. Групповая структура волн: а — зависимость фактора групповости  $F_g$  от параметра  $\rho_g$ ; б — огибающие групп волн  $G(t)$ , рассчитанные при  $\rho_g = 0.95$  (сплошная линия) и  $\rho_g = 0.97$  (штриховая линия)

## 2. Несущая волна

Далее волновое поле представим как произведение огибающей и несущей волны

$$\xi(x, t) = AG(x, t) \eta(x, t).$$

где  $A$  — параметр, определяющий высоту волн. В качестве параметра, задающего в нашей модели энергию волнового поля, будем использовать значимую высоту волн  $h_s$  (средняя высота 1/3 самых высоких волн), которая может быть определена по данным радиолокационного зондирования со спутника [12]. Значимая высота волн связана со среднеквадратическим отклонением возвышений морской поверхности  $\sigma_\xi$  соотношением

$$h_s = 4\sigma_\xi,$$

на основе которого можно рассчитать параметр  $A$ .

Рассмотрим два варианта представления несущей волны:

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= \sin(k_0x - \omega_0t), \\ \eta_2(x, t) &= dn(m_\eta(k_0x - \omega_0t), \rho_\eta), \end{aligned} \quad (5)$$

где параметры  $m_\eta$  и  $\rho_\eta$  определяют форму немодулированной несущей волны и ее частоту. В первом случае распределение возвышений морской поверхности  $P_\eta(\eta)$  симметрично, его коэффициент асимметрии  $A_\eta = 0$ . Во втором случае асимметрию  $A_\eta$  можно менять, задавая соответствующие значения параметра  $\rho_\eta$ .

При моделировании формы волн необходимо учитывать, что распределение возвышений поверхности является асимметричным. Согласно данным натурных измерений, значения асимметрии  $A$  в основном лежат в пределах от 0 до 0.4 [4, 5]. При сильном ветре в штормовых условиях наблюдались изменения асимметрии в диапазоне  $0.20 < A < 0.51$  [20].

Выбор параметра  $\rho_\eta$  осуществляется на основе данных об асимметрии распределения возвышений поверхности. Отметим, что асимметрия  $A_\eta$ , рассчитанная для волны  $\eta_2$ , ниже, чем асимметрия  $A_\xi$ , рассчитанная для построенной на основе  $\eta_2$  модулированной волны  $\xi(x, t) = AG(x, t) \eta_2(x, t)$ . Зависимости асимметрии  $A_\eta$  и  $A_\xi$  от параметра  $\rho_\eta$  представлены на рис. 2. Расчеты  $A_\xi$  проводились для огибающей группы волн, построенной при  $\rho_g = 0.97$ .

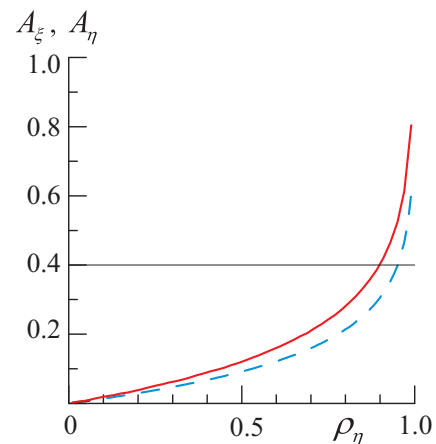


Рис. 2. Зависимости коэффициента асимметрии распределения возвышений поверхности  $A_\xi$  (сплошная линия) и  $A_\eta$  (штриховая линия) несущей волны  $\eta_2$  от параметра  $\rho_\eta$

Выше было показано, что параметр  $\rho_g$  можно изменять только в узких пределах, и влиянием этих изменений на величину асимметрии  $A_\xi$  можно пренебречь. Из рис. 2 следует, что значения параметра  $\rho_\eta$  при слабом и умеренном волнении должны лежать в диапазоне  $0 < \rho_\eta < 0.9$ , при штормовых условиях — в диапазоне  $0.68 < \rho_\eta < 0.94$ .

Частота несущей волны  $\eta_2$ , определенной выражением (5), может отклоняться от  $\omega_0$  в зависимости от значений двух параметров —  $\rho_\eta$  и  $m_\eta$ . Значение  $\rho_\eta$  задано выбором асимметрии  $A_\xi$ . Таким образом, остается один параметр  $m_\eta$ , выбор величины которого может обеспечить равенство  $\omega_0$  и частоты несущей волны  $\eta_2$ .

### Заклучение

Построена двумерная нелинейная модель поля поверхностных волн. Подгонка параметров модели осуществляется на основе данных натуральных измерений статистических характеристик волнового поля. Модель учитывает групповую структуру поверхностных волн и асимметрию распределения, создаваемых волнами возвышений поверхности. При моделировании групповой структуры задаются два параметра — фактор групповитости (3) и среднее число волн в группе (4). При моделировании несущих волн задается асимметрия распределения возвышений морской поверхности. Для описания огибающей группы волн и несущей волны используются эллиптическая функция Якоби второго рода.

### Список литературы

1. Stokes G.G. Trans. Cambridge Philos. Soc. 1849. **8**. P. 197.
2. Лонге-Хиггинс М.С. Ветровые волны. М., 1962. С. 125.
3. Kinsman B. Englewood Cliffs. N.J., 1965.
4. Запезалов А.С., Большаков А.Н., Смолов В.Е. Океанология. 2011. **51**, № 3. С. 432.
5. Jha A.K., Winterstein S.R. Proc. 19<sup>th</sup> Intern. Off-shore Mech. Arctic Eng. Symp. ASME, Paper No. OMAE 00-6125. 2000.
6. Hou Y., Song G., Zhao X. et al. // Chin. J. of Oceanol. and Limnol. 2006. **24**, № 1. P. 1.
7. Запезалов А.С. // Метеорология и гидрология. 2011. № 9. С. 78.
8. Tayfun M.A., Fedele F. // Ocean Eng. 2007. **34**. P. 1631.
9. Phillips O.M. // J. Fluid Mech. 1961. **11**. P. 143.
10. Longuet-Higgins M.S. // J. Fluid Mech. 1963. **17**. № 3. P. 459.
11. Запезалов А.С. // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2012. **48**, № 2. С. 224.
12. Показеев К.В., Запезалов А.С., Пустовойтенко В.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 5. С. 80 (Pokazeev K.V., Zapevalov A.S., Pustovoytenko V.V. // Moscow University Phys. Bull. 2013. **68**, N 5, P. 420).
13. Запезалов А.С. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2009. **45**, № 2. С. 266.
14. Косьян Р.Д., Подымов И.С., Пыхов Н.В. Динамические процессы береговой зоны моря. М., 2003.
15. Преснухин А.В. // Матер. междунар. конф. «Литодинамика донной контактной зоны океана», посвященной 100-летию со дня рождения проф. В.В. Лонгина. Москва, 14–17 сентября 2009. С. 31.
16. Юэн Г., Лейк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде // Новое в зарубежной науке. Механика. Вып. 41. М., 1987.
17. Tulin M.P., Waseda T. // J. of Fluid Mech. 1999. **378**. P. 197.
18. Lamont-Smith T., Fuchs J., Tulin M.P. // J. 2003. **59**. P. 49.
19. Запезалов А.С., Большаков А.Н., Смолов В.Е. // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2004. **40**, № 4. С. 545.
20. Guedes Soares C., Cherneva Z., Antão E.M. // Appl. Ocean Research. 2003. **25**. P. 337.

### A nonlinear model of sea surface waves

K. V. Pokazeev<sup>1,a</sup>, A. S. Zapevalov<sup>2,b</sup>, V. V. Pustovoytenko<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup>Department of Marine and Inland Water Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

<sup>2</sup>Black Sea Branch, M. V. Lomonosov Moscow State University, Sevastopol 299001, Russia.

E-mail: <sup>a</sup>sea@phys.msu.ru, <sup>b</sup>sevzepter@mail.ru, <sup>c</sup>v2pust@mail.ru.

An analytical model that describes the profile of a nonlinear wave on the sea surface was built. The model parameters were calculated on the basis of the statistical characteristics of the wave field that were obtained from in situ experiments. The model takes the group structure of surface waves and the skewness of the distribution of wave-induced elevations of the surface into account. A Jacobi elliptic function of the second kind was used for describing the envelope of a group of waves and the carrier wave.

*Keywords:* nonlinear sea waves, group structure, skewness of the distribution of surface elevations.

PACS: 47.35.Bb, 92.10.Hm.

Received 19 January 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2015).

### Сведения об авторах

1. Показеев Константин Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой; тел.: (495) 939-16-77, e-mail: sea@phys.msu.ru.
2. Запезалов Александр Сергеевич — доктор физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, вед. науч. сотрудник; e-mail: sevzepter@mail.ru.
3. Пустовойтенко Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, вед. науч. сотрудник; e-mail: v2pust@mail.ru.