ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Гамильтонов формализм и квантово-механическая аналогия в вероятностном описании турбулентности

В. П. Юшков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики атмосферы. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: yushkov@phys.msu.ru

Статья поступила 04.04.2015, подписана в печать 23.04.2015.

Показано, что взаимодействие адиабатических волн и несжимаемой турбулентности позволяет статистически описать перенос энергии турбулентных пульсаций по спектру. Также показано, что фундаментальным параметром, позволяющим параметризовать влияние адиабатических движений на несжимаемую турбулентность, является параметр диссипации энтропии в уравнении, которое в настоящей работе названо уравнением Обухова, и что «обобщенные координаты» или «канонические переменные» уравнения Захарова следует интерпретировать как волновые функции.

Ключевые слова: турбулентность, адиабатические флуктуации, энергия, спектр, плотность вероятности.

УДК: 551.511.61. PACS: 47.27.Ak.

Введение

В настоящее время в теории турбулентности сложилась ситуация, напоминающая кризис классической физики начала прошлого века: после более чем 100 лет поиска способов описания турбулентного перемешивания теоретики не очень представляют, куда двигаться дальше, а множество детальных экспериментальных работ не могут найти свое выражение в замкнутой математической теории. Основным инструментом *практических* исследований остаются «эмпирические функции», зависящие от управляющих параметров, для прогноза которых нет уравнений достаточной степени строгости. Затянувшееся состояние неопределенности указывает на то, что необходим лишь малый шаг, чтобы объединить хорошо известные эмпирические факты и обширный теоретический анализ, проделанный за прошедшие десятилетия. Следует лишь отказаться от постулата, который был сделан на начальном этапе исследований и в настоящее время является ключевым препятствием для дальнейшего развития теории. Это препятствие может иметь форму вполне разумного предположения и одновременно содержать невозможность дальнейшего теоретического анализа в рамках используемого приближения.

Настоящая работа опирается на следующие утверждения:

1) таким препятствием является приближение несжимаемости. Однако традиционная его замена для сжимаемых движений приближением адиабатичности не снимает ограничений гидродинамического описания турбулентного перемешивания;

2) усреднение по Рейнольдсу и параметризация мелкомасштабного перемешивания, попытки выразить старшие моменты через младшие (проблема замыкания) не позволяют перейти от динамического описания к статистическому, поскольку исключают из рассмотрения *изменение* распределения вероятности;

3) уравнение, предложенное Обуховым для описания флуктуаций скалярных полей еще в 1949 г., является ключевым при переходе от гидродинамической теории турбулентности к вероятностной. Скалярной характеристикой турбулентного перемешивания, которая удовлетворяет уравнению Обухова и описывает выравнивание плотности вероятности на масштабах однородности и стационарности, является энтропия;

4) решение этого однородного линейного, но зависящего от турбулентного поля скоростей дифференциального уравнения с внешним стохастическим источником следует искать в «слабом» смысле;

5) мелкомасштабные флуктуации энтропии лагранжевых воздушных частиц или их плотности вероятности могут быть разложены по Колмогоровской системе ортогональных функций. Принцип локальной однородности и изотропности мелкомасштабных турбулентных флуктуаций, введенный Колмогоровым, отражает разделение масштабов на две шкалы: внутреннюю и внешнюю;

6) при больших числах Рейнольдса малость *адиабатических* флуктуаций позволяет ограничиться для этих флуктуаций нормальным или двухмоментным приближением. В этом приближении спектр ортогональных волновых функций турбулентного перемешивания определяется собственными функциями линейного интегрального уравнения, ядром которого является корреляционная функция флуктуаций энтропии;

7) инвариантность корреляционной функции флуктуаций энтропии или потенциальной плотности на локальных масштабах к сдвигу в пространстве и времени может быть выражена через обратное преобразование Вигнера, а постоянная представления Вигнера, совпадающая с постоянной

скорости диссипации в уравнении Обухова, является размерной константой канонического уравнения Захарова;

8) канонические переменные гамильтонова формализма есть волновые, или «пробные», функции вероятностного представления турбулентного перемешивания, а гамильтониан волновой турбулентности, предложенный Захаровым в 1974 г., описывает энергию адиабатических флуктуаций и взаимодействие адиабатических движений с движением несжимаемых лагранжевых частиц;

9) адиабатические флуктуации давления связаны с флуктуациями энтропии, и в области однородной и изотропной турбулентности несжимаемые и адиабатические флуктуации давления *неразличимы*. Эта неразличимость и неопределенность плотности функции распределения является фундаментальным свойством вероятностного описания турбулентности.

1. Приближение несжимаемости и адиабатические флуктуации

Практически все основные результаты теории турбулентности базируются на приближении несжимаемости. Использование этого приближения позволяет получить замкнутую систему уравнений без использования более сложного уравнения баланса энергии. Расплатой за упрощение исходной полной системы уравнений гидродинамики является невозможность в рамках выбранного приближения описывать взаимодействие между несжимаемыми и адиабатическими движениями. Но такое взаимодействие имеет ключевое значение для теории турбулентности.

Ограниченность приближения несжимаемости в теории турбулентности иллюстрирует такой исторический факт: долгое время уравнения, описывающие распространение звука в турбулентной среде и предложенные Обуховым еще в 1941 г. [1], анализируемые в работах Блохинцева [2] и Красильникова [3], Лайтхилла [4] и Крейчнана [5], учитывали лишь турбулентные флуктуации скоростей, но не флуктуации скорости звука. Эта ошибка привела к задержке в появлении правильной теории взаимодействия звука и турбулентности [6] на 20 лет!

Но даже исправленная теория взаимодействия звука и турбулентности, инициированная экспериментальными работами Каллистратовой [7] и подробно изложенная Татарским в [8], не привела к переосмыслению роли случайных адиабатических движений в переносе энергии турбулентности по спектру. Хотя для этого требовалась лишь незначительная модификация базовой теории Обухова [9]: необходимо было разделить турбулентные процессы не на мелкомасштабные и крупномасштабные, а на низкочастотные (медленные) и высокочастотные (быстрые), т. е. на несжимаемые и адиабатические.

При этом, конечно, систему исходных уравнений (см. (22) в [9]) требуется заменить, поскольку она включает приближение несжимаемости, а значит, не может описывать взаимодействие несжимаемых и адиабатических движений. Механизм этого взаимодействия, как правильно указал Обухов, — нелинейность уравнений гидродинамики, а математическая формулировка имеет следующий вид [10]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + c_s^2 \nabla \Pi = -\boldsymbol{V} \nabla \boldsymbol{V} - c_s^2 \Theta \nabla \Pi, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{V} = -\boldsymbol{V} \nabla \Pi. \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ — сумма турбулентной и акустической компонент скоростей, c_s^2 — средний квадрат скорости звука, $\Pi = \dfrac{1}{\varkappa} \ln \dfrac{p}{p_0}$ — логарифмическая функция давления, где $\varkappa = C_P / C_V$ — отношение теплоемкостей, и $\Theta = \ln \dfrac{\theta}{\theta_0}$ — логарифм потенциальной температуры.

В работах Обухова и Монина не акцентируется специально внимание на отличии адиабатических флуктуаций температуры от турбулентных, но поскольку флуктуации температуры связываются с флуктуациями скорости звука (см. § 26.2 в [10]), то, очевидно, следует понимать их как медленные или турбулентные, а флуктуации квадрата скорости звука следует связывать с флуктуациями потенциальной, а не термодинамической температуры [11].

Адиабатические же флуктуации связывают традиционно с флуктуациями давления, хотя и это разделение не вполне точное: турбулентные флуктуации давления есть и в приближении несжимаемого движения жидкости. Их связь с турбулентными флуктуациями скоростей описана Обуховым в небольшой работе [12], а позже Бэтчелором подробно в [13].

То что флуктуации давления традиционно соотносятся именно с адиабатическими движениями, в значительной степени определяет приближение Буссинеска. В рамках этого приближения относительные турбулентные флуктуации давления малы, т. е.

$$\frac{p'}{p_0} \ll \frac{T'}{T_0}, \frac{\rho'}{\rho_0},$$

и соответственно, например в атмосфере, в силу уравнения состояния

$$\frac{T'}{T_0} = -\frac{\rho'}{\rho_0}. \qquad (3)$$

В линейном приближении $\Pi' = \dfrac{p'}{\varkappa p_0}$ и характеризует только адиабатические флуктуации давления, поскольку турбулентные в силу приближения Буссинеска полагаются равными нулю. В рамках этого же приближения $\Theta = \dfrac{\theta'}{\theta_0} = \dfrac{T'}{T_0}$. Проблема, однако, заключается в том, что соотношение (3) нельзя дифференцировать по времени, поскольку малые флуктуации давления являются одновременно и «быстрыми» флуктуациями (см. ниже соотношение (22)).

Успехи теории турбулентности в рамках приближения несжимаемости отодвинули вопрос о роли адиабатических движений в теории турбулентности на долгие годы. В начале 1970-х гг. для описания турбулентного перемешивания Захаров создал нели-

нейную теорию волновой, или слабой, турбулентности, в основу которой он положил гамильтонов формализм [14]. В основе его подхода лежали не сами классические уравнения Гамильтона, а лишь идея о симметрии этих уравнений. Обобщенные координаты, или канонические переменные, уравнений Захарова сами являются функциями координат и времени, а производные по обобщенным координатам — вариационными [15]. Терминологическая общность присуща многим работам Захарова: так, колмогоровским в его работах именуется любой степенной спектр вида k^{α}, где k — волновое число, а показатель α зависит от числа взаимодействующих волн (ср. § 3.1.1 в [16]).

Принципиальным фактом теории слабой турбулентности является внимание на уравнении баланса энергии, которое отсутствует в классической теории, поскольку в ней используется приближение несжимаемости. Отметим, что гамильтонов формализм был в [15] детально развит Захаровым специально для адиабатических движений, что выводило эту теорию из-под классического анализа и классических экспериментов. Несмотря на очевидные успехи гамильтонова формализма, в рамках этого подхода так и не был объяснен такой хорошо известный феномен, как связь динамической скорости v_* с пульсациями давления на стенке [17].

И давление, и температура, и плотность среды являются скалярными характеристиками, а для флуктуаций скалярных полей Обухов предложил в 1949 г. линейное уравнение общего вида

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\nabla)\phi = \chi \Delta \phi, \tag{4}$$

где ϕ — скалярная характеристика, а χ — коэффициент диффузии, для температуры — температуропроводность [18]. Очевидно, что для флуктуаций давления это уравнение нельзя применять. Флуктуации ϕ должны быть пассивными, т. е. переноситься вместе с турбулентностью и без учета диффузии (при $\chi \to 0$) сохраняться в каждой лагранжевой частице.

Закон сохранения энергии в гидродинамике в простейшей форме записывается в адиабатическом приближении без учета источников и стоков тепла. В этом приближении в каждой лагранжевой частице сохраняется энтропия S. Однако энтропия *разных* лагранжевых частиц не обязательно будет одинаковой. В силу наличия источников нагревания атмосферы и нарушения адиабатического приближения для атмосферы в целом. При турбулентном перемешивании и каскадном дроблении вихрей лагранжевы частицы обмениваются между собой не только импульсом, но и энергией (и теплом), что приводит к выравниванию энтропии между лагранжевыми частицами среды. Этот обмен происходит не только за счет теплопроводности, но и через адиабатические движения. Такое взаимодействие несжимаемых и адиабатических движений в работе Монина и Обухова [19] названо *адаптацией* и применимо не только к синоптическим процессам в атмосфере, но и к турбулентному перемешиванию.

Если турбулентность является развитой, т. е. на некоторых масштабах ее можно считать однородной и изотропной, то выравнивание энтропии на этих масштабах инвариантно к поворотам и сдвигам системы координат. В статистическом смысле эта инвариантность отражена в принципе локальной однородности и изотропности, который был предложен Колмогоровым в [20]. Выравнивание энтропии в этом случае можно параметризовать простейшим образом, как это сделал Обухов:

$$\frac{dS}{dt} = \gamma \Delta S, \tag{5}$$

где γ — параметр выравнивания энтропии. Важным свойством уравнения (5) является его линейность, допускающая представление флуктуаций энтропии в форме разложения по ортогональным компонентам.

Уравнение (5), однако, не является полным. Обухов применил для его теоретического анализа искусственный прием, не отмечаемый специально, но существенно необходимый для перехода от гидродинамического описания к вероятностному. Без дополнительного члена в правой части флуктуации энтропии будут затухать, а сама энтропия — стремиться к постоянному значению S_0. Но уравнение (5) инвариантно к значению этой постоянной. Чтобы турбулентность была стационарной, в правую часть следует добавить внешние источники тепла Q, которые компенсируют диссипацию флуктуаций энтропии. Обухов *постулировал* наличие таких источников, как это сделал ранее Колмогоров для флуктуаций скоростей.

Уравнение Обухова можно разделить на две части: левая часть (5) в статистическом смысле отражает условие сохранения энтропии, а правая с внешним источником — условие статистического равенства стоков и притоков энергии. Поскольку уравнение Обухова предполагается решать статистически, а математическое ожидание понимается в практических приложениях как среднее по времени и/или пространству, решение этого уравнения следует искать в классе слабых решений. Тогда условие баланса притоков и стоков энергии будет выглядеть как

$$\int \psi^* (\gamma \Delta S + Q)\, dt = 0, \tag{6}$$

а условие стационарности как

$$\int \psi^* \frac{dS}{dt}\, dt = 0. \tag{7}$$

Символически его можно записать как

$$\frac{dS}{dt} \overset{\text{st}}{=} 0. \tag{8}$$

Интегралы в (6) и (7) понимаются «в среднем» как предел

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} .$$

Пробные функции ψ описывают неизменную часть энтропии, которую можно связать с плотностью вероятности. Эти функции интегрируемы в среднеквадратичном и представимы как предел сумм

$\sum_{n=0}^{N} C_n\psi_n$ ортогональных функций в среднеквадратичной норме [21].

Выбор энтропии среди других скалярных полей не случаен. Если считать общепризнанным, что описание турбулентного перемешивания может быть только статистическим, то именно энтропия в статистическом смысле ответственна за *динамику* вероятности (см., напр., [22]). Распределение вероятности, однако, нельзя рассчитывать отдельно для каждой гидродинамической характеристики. Выбор общей характеристики для вероятностного описания должен следовать логике простоты и физического смысла.

2. Плотность вероятности и канонические переменные

Если представить себе все лагранжевы частицы неразличимыми и, следовательно, имеющими одинаковую (единичную) массу, то количество таких частиц в единице объема характеризует плотность вероятности для распределения лагранжевых частиц в координатном пространстве. В пространственно-временной области однородности и стационарности плотность вероятности не меняется, но сами флуктуации плотности числа лагранжевых частиц характеризуют те масштабы, на которых плотность числа лагранжевых частиц сходится к плотности вероятности.

Флуктуации плотности числа лагранжевых частиц могут быть связаны с флуктуациями энтропии через потенциальную плотность ρ_s:

$$\rho_s = \rho\left(\frac{T_0}{T}\right)^{C_v/R_\mu}, \quad S = -R_\mu \ln\frac{\rho_s}{\rho_0} \tag{9}$$

где ρ_0 — плотность вероятности [23]. При статистическом осреднении потенциальная плотность должна стремиться к плотности вероятности, поскольку плотность вероятности не меняется на масштабах такого осреднения и именно ее характеризует энтропия.

Для атмосферы в целом плотность вероятности изменяется с высотой, широтой, долготой, сезоном и временем суток. Именно *изменение* плотности функции распределения и невозможность мгновенного или точечного ее определения по наблюдениям и отличает вероятностный подход от классического статистического с постоянной функцией распределения и бесконечным во времени статистическим ансамблем.

Стационарные флуктуации произвольного случайного поля можно разложить по ортогональным компонентам:

$$\psi = \sum_n \widetilde{C}_n\, \mathrm{e}^{i\omega_n t}, \tag{10}$$

где $\widetilde{C}_n$ — случайные амплитуды. Это широко используемое сегодня представление Колмогоров обосновал в [24]. Если теперь выразить потенциальную плотность через $\psi^*\psi$, то $\sum_n \left\langle |\widetilde{C}_n|^2 \right\rangle$ будет описывать плотность вероятности, а $\sum_{nk} \widetilde{C}_n^* \widetilde{C}_k\, \mathrm{e}^{i\omega_{nk}t}$ — флуктуации плотности числа лагранжевых частиц. Хотя коэффициенты разложения в (10) являются случайными величинами, их *среднее* нельзя положить равным нулю. Равенство нулю среднего значения C_n будет означать отсутствие флуктуаций данной «моды» или «частоты».

Если распределение лагранжевых частиц анизотропно, то $\sum_n |C_n|^2(\boldsymbol{r})$ является функцией координат. Для однородных и изотропных *пространственных* флуктуаций $\psi_n(\boldsymbol{r})$ являются собственными функциями оператора Лапласа. Для разложения мелкомасштабных турбулентных флуктуаций поэтому традиционно и используют представление Фурье.

Разложение потенциальной плотности по ортогональным компонентам имеет две шкалы: локальную, на которой плотность вероятности не меняется, и внешнюю, на которой она изменяется. При локальном анализе флуктуации потенциальной плотности характеризуют сходимость потенциальной плотности к плотности вероятности, а на внешней шкале — тот минимальный масштаб, на котором *изменение* плотности вероятности может быть *измерено*.

Считая флуктуации потенциальной плотности малыми на локальных масштабах, в линейном приближении $\rho_s = \rho_0 + \rho'$ и $S' = -R_\mu \dfrac{\rho'}{\rho_0}$, а $\dfrac{\rho_s}{\rho_0}$ можно снова выразить через $\psi^*\psi$, так что $\sum_n |C_n|^2 = 1$. То есть нормированность коэффициентов разложения на локальных масштабах описывает сходимость потенциальной плотности к плотности вероятности. Для атмосферы в целом нормированность плотности вероятности ρ_0 для лагранжевых воздушных частиц связывается с конечностью и постоянством массы атмосферы.

Поскольку флуктуации плотности вероятности связаны с интенсивностью турбулентных флуктуаций, это означает, что распределение флуктуаций, например скоростей, связано с распределением флуктуаций плотности вероятности, описываемой пробной, или волновой, функцией ψ, удовлетворяющей (8). Эта связь естественным образом вытекает из квантовой аналогии. Первым на эту аналогию указал Захаров, обратив внимание на симметрию уравнений Гамильтона и построив обобщенные вариационные уравнения, которые теперь называют уравнениями Захарова:

$$i\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*}, \tag{11}$$

где a — обобщенные, или канонические, переменные, $\mathcal{H}$ — гамильтониан системы, а знак δ означает вариационную производную [15].

Еще раньше на связь волновой функции в координатном представлении и плотность распределения микрочастиц по импульсам указал Вигнер. Предложенная им псевдоплотность вероятности

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\pi\hbar}\int \psi^*(\boldsymbol{x}+\xi)\psi(\boldsymbol{x}-\xi)\exp\left(\frac{2i\boldsymbol{p}\xi}{\hbar}\right)d\xi \tag{12}$$

связывает макрокоординаты $\boldsymbol{x}$ внешней шкалы и микрокоординаты $\boldsymbol{\xi}$ внутренней в псевдораспределение одинаковых микрочастиц в фазовом пространстве [25].

Само представление Вигнера не связано с конкретным значением фундаментальной постоянной и широко используется в теории передачи сигналов в различных прикладных областях. Обратное преобразование Вигнера, наоборот, позволяет связать распределение лагранжевых частиц в фазовом пространстве $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{V})$ с двумасштабным представлением волновой функции общего вида:

$$\int P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{V}) \exp\left(-i\frac{\boldsymbol{V}\xi}{\gamma}\right) d\boldsymbol{V} = \psi^*\left(\boldsymbol{x}+\frac{\xi}{2}\right)\psi\left(\boldsymbol{x}-\frac{\xi}{2}\right), \tag{13}$$

где γ для неразличимых лагранжевых частиц единичной массы ($\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{V}$) имеет размерность м^2/с. В области однородности и изотропности (по переменной $\boldsymbol{x}$) правая часть (13) описывает корреляционную функцию флуктуаций потенциальной плотности или энтропии.

Аналогичное распределение из общефизических представлений должно связывать флуктуации энергии лагранжевых частиц (на единицу массы) и корреляционную функцию флуктуаций потенциальной плотности во временной области [23]:

$$\int P(t, \mathcal{E}) \exp\left(-i\frac{\mathcal{E}\tau}{\gamma}\right) d\mathcal{E} = \psi^*\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\psi\left(t-\frac{\tau}{2}\right). \tag{14}$$

Исторический анализ показывает, что уравнение (14) тесно связано с работой Крейчнана 1961 г. [26], в которой он ограничился для флуктуаций $P(\mathcal{E})$ гауссовским приближением. А уравнение (13) является по-иному записанной формой представления Колмогорова–Обухова в [9].

Сопоставляя представление Вигнера и уравнение Захарова, можно заметить, что в каноническом уравнении Захарова (11) нет фундаментальной постоянной, т. е. «обобщенный» гамильтониан имеет размерность частоты [16]. Это противоречие можно рассматривать как отражение общности Гамильтонова формализма для описания адиабатических флуктуаций в системах с разной постоянной действия (см. [27]). Так, в классической квантовой механике гамильтонов формализм для уравнений сплошной среды был предложен Ландау еще в 1941 г. в его революционной работе [28], а в теории акустических волн связь уравнения для фазы (эйконала) с уравнением Гамильтона–Якоби использовал Крейчнан для анализа распространения акустических волн в турбулентной среде [29].

Сам математический аппарат вероятностного описания не зависит от предмета приложения и может быть использован на самых разных масштабах вплоть до астрофизических. Постоянная же с размерностью действия конкретизирует постановку задачи и определяется предметом описания: изменение вероятности чего предполагается описывать с помощью данного математического аппарата.

Если предположить, что проблема замыкания уравнений Рейнольдса может быть решена без учета изменения функции распределения флуктуаций, то математически мы придем снова к динамическим, а не вероятностным уравнениям. В них не будет места для поиска функции распределения. Если же задача будет ставиться именно как поиск функции распределения или класса функций, в котором это распределение может меняться, то, зная функцию распределения флуктуаций, можно будет определить и все другие *измеряемые* характеристики, которые в этом *классе* функций могут принимать стационарные значения. Другими словами, ортогональное разложение вводит гильбертово пространство для поиска функции распределения и определения ее *изменения*.

3. Адиабатические флуктуации и флуктуации энтропии

Рассмотрим, к каким следствиям приводит учет адиабатических флуктуаций в теории турбулентности и как это проявляется в измерениях турбулентных пульсаций. Возвращаясь к первой работе Обухова [9], которая заложила основы теории турбулентности, разбиение турбулентных процессов на две компоненты следует заменить на разбиение по частоте, а не по пространственному масштабу. В качестве уравнения баланса энергии для турбулентной компоненты следует взять уравнение (5). Скорость диссипации адиабатических флуктуаций связана с этим уравнением термодинамическим соотношением [31]:

$$\varepsilon \overset{st}{=} -T_0\frac{dS}{dt}. \tag{15}$$

С учетом размерного множителя $c_s^2 = \varkappa R_\mu T_0$, в обозначениях Обухова

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(p)}{\partial t} &\to \psi^*\frac{\partial S}{\partial t}, \\ T(p) &\to \psi^*(\boldsymbol{V}\nabla)S, \\ D(p) &\to \gamma\psi^*\Delta S. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $D(p)$ — спектральная плотность скорости диссипации, $T(p)$ — спектральная плотность члена, описывающего взаимодействие турбулентных и адиабатических флуктуаций, $\frac{\partial E}{\partial t}$ — локальное изменение энергии турбулентности. Взаимодействие акустических и несжимаемых движений происходит на одинаковых *волновых числах*. Этот принцип резонансного взаимодействия, также именуемый принципом Брегга, обосновал Татарский, представляя турбулентность в виде набора движущихся дифракционных решеток (см. §27 в [8]). Статистическое осреднение в терминах волновых функций для $\frac{\partial E}{\partial t}$ дает не 0, а скорость диссипации и энергию адиабатических флуктуаций, характеризуемую частотой ω_T.

Поток энергии из турбулентной компоненты в акустическую описывает левая часть уравнения (5):

$$T(p) + \frac{\partial E(p)}{\partial t} \overset{st}{=} 0, \tag{17}$$

а правая

$$D(p) + \psi^* Q(p) \overset{st}{=} 0 \tag{18}$$

характеризует баланс скорости диссипации и генерации турбулентности.

Анализ, проведенный Татарским, описывает распространение и рассеяние монохроматической звуковой волны в турбулентной среде, но в силу малости адиабатических возмущений и линейности исходных уравнений (1)–(2) по отношению к этим возмуще-

ниям он применим и к суперпозиции акустических возмущений — адиабатическому шуму.

Однако постановка задачи теперь состоит не в определении рассеяния или поглощения одной звуковой волны, но в определении связи между интенсивностью турбулентных флуктуаций и спектром адиабатического шума. Осреднение характеристик поля адиабатических флуктуаций теперь следует проводить не только по времени, но и по спектру (волновым числам). Простой вероятностной моделью такого шума является модель однородных и изотропных флуктуаций. Такая модель имеет смысл при достаточно больших числах Рейнольдса, когда большая часть энергии адиабатических флуктуаций сосредоточена в высокочастотной (и мелкомасштабной) области. Чтобы это показать, необходимо связать энергию (амплитуду) равновесных адиабатических флуктуаций с волновыми числами.

Измерения показывают (рис. 1), что равновесный спектр флуктуаций давления в развитом турбулентном потоке простирается на несколько порядков по частоте [30]. Чем больше энергия турбулентных флуктуаций, тем больше и скорость диссипации, а значит, и высокочастотный предел адиабатических движений. Скорость диссипации адиабатических волн пропорциональна их энергии и квадрату волнового числа:

$$\varepsilon_{\boldsymbol{vk}} = \eta k^2 \left\langle \boldsymbol{v}^2 \right\rangle, \quad \eta = \frac{4}{3}\nu + (\varkappa - 1)\chi. \tag{19}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, а χ — температуропроводность [31]. Для воздуха при нормальных условиях $\nu \approx 0.14$ см^2/с, $\chi \approx 0.19$ см^2/с и $\eta \approx 0.26$ см^2/с.

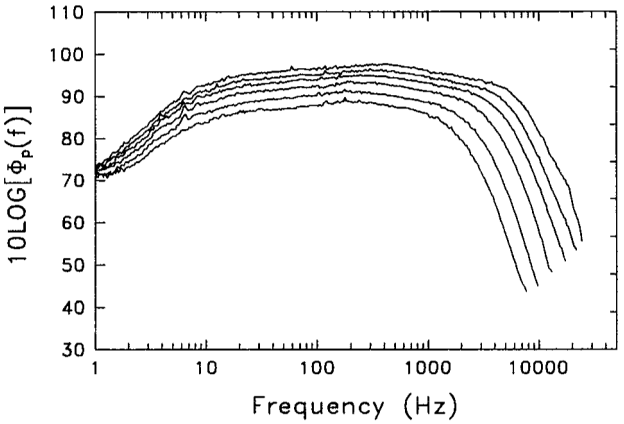

Рис. 1. Спектр пульсации давления «на стенке» (в дБ относительно 1 мкПа^2/Гц) по измерениям в аэродинамической трубе при скоростях течения 12, 15, 18, 21, 24 и 27 м/с (большей скорости соответствует бóльшая спектральная плотность) из работы [30]

В расчете на единичную массу лагранжевых частиц средняя энергия адиабатических флуктуаций [31]

$$E_a = \left\langle \boldsymbol{v}^2 \right\rangle = c_s^2 \left\langle \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 \right\rangle = c_s^2 \left\langle \Pi^2 \right\rangle. \tag{20}$$

Измерения в аэродинамических трубах при больших числах Рейнольдса $\mathcal{R}_\lambda$ (см. [30]) показывают, что $\dfrac{\sigma_p}{\tau_w} \approx 3$, где σ_p — среднеквадратичное отклонение флуктуаций давления, а $\tau_w = \rho_0 v_*^2$ — напряжение трения в пристеночном слое. Поэтому

$$\left\langle \boldsymbol{v}^2 \right\rangle = \frac{a^2 \rho_0^2 v_*^4}{\varkappa^2 p_0^2} c_s^2 = a^2 \frac{v_*^4}{c_s^2}, \quad a \approx 3. \tag{21}$$

Очевидно, что $E_a \ll E_T = \langle \boldsymbol{u}^2/2 \rangle \cong a v_*^2$.

Однако локальные ускорения адиабатической и турбулентной компонент уже соотносятся иначе. Если турбулентность стационарна, можно предположить, что на локальных масштабах скомпенсированы и средние силы: $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} \overset{st}{=} 0$, т. е. локальные турбулентные ускорения $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$ статистически компенсируются турбулентной адвекцией. Это приближение (гипотеза Тейлора) широко используется в теории турбулентности [32]. Заметим, что для флуктуаций энтропии приближние Тейлора выражается уравнением (8). Для суммы адиабатической и турбулентной компонент с волновым числом $\boldsymbol{k}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = i\omega_a \boldsymbol{v} + i\omega_T \boldsymbol{u}, \tag{22}$$

и если для адиабатических движений $\omega_a = c_s k$, то для турбулентных в силу приближения Тейлора $\omega_T = \boldsymbol{uk}$. На основании (21) видно, что локальные ускорения обеих компонент имеют один порядок.

Отметим еще, что временны́е флуктуации потенциальной плотности *разных* лагранжевых частиц $\dfrac{\rho'}{\rho_0}$ и адиабатические флуктуации плотности (локальные производные) неразличимы. Правильнее будет сказать, что малое изменение плотности вероятности при движении в неоднородной турбулентности невозможно *мгновенно* отличить от флуктуаций энтропии разных лагранжевых частиц на локальных масштабах.

Эта неразличимость турбулентных и адиабатических флуктуаций на локальных масштабах выражается и в том, что уравнения, содержащие дивергенцию от силы градиента давления, с учетом сжимаемости должны включать член

$$c_s^2 \left(\frac{\nabla \rho}{\rho_0} \right)^2 = c_s^2 (\nabla \Pi)^2. \tag{23}$$

Это уравнение, по существу, утверждает равенство скоростей диссипации адиабатических (см. (19)) и турбулентных флуктуаций. Такое равенство можно интерпретировать как поток энергии из турбулентной несжимаемой компоненты в адиабатическую без потерь.

Поскольку

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + c_s^2 \nabla \Pi \overset{st}{=} 0, \tag{24}$$

перекрестные члены в правой части (1)

$$-(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v} - c_s^2 \Theta \nabla \Pi \tag{25}$$

описывают перенос импульса (и энергии) между акустической и турбулентной компонентой и статистически компенсируют диссипацию, которая отсутствует в (1) в силу использования консервативного приближения. Именно диссипация, которую с уче-

том адиабатических волн теперь следует записывать в форме

$$\varepsilon = \nu(\boldsymbol{u}\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}), \qquad (26)$$

приводит к тому, что «каскад энергии», описываемый (25) и инвариантный к направлению или значению волновых чисел, направлен в сторону малых масштабов. Он должен компенсировать в соответствии с (19) увеличение скорости затухания адиабатических волн с ростом волнового числа.

В силу линейности дисперсионного соотношения для адиабатических движений ($\omega_a = c_s k$) уравнение (24) выполняется для всех частот адиабатического шума, что позволяет вывести размерные соотношения между спектрами адиабатических и несжимаемых флуктуаций. Измерения показывают (см. рис. 1), что в инерционном интервале масштабов спектральная плотность флуктуаций давления меняется слабо. Поэтому можно представить среднюю спектральную плотность адиабатических флуктуаций *скоростей* в этом интервале в форме $\dfrac{E_a}{k_*}$, где k_* — условная верхняя граница интервала адиабатических флуктуаций, которая характеризует начало интервала затухания адиабатического шума. Как показывают измерения (см. [30, 33]),

$$\omega_* = c_s k_* \cong \frac{v_*^2}{\eta}. \qquad (27)$$

Поскольку спектральная плотность адиабатических флуктуаций относительно слабо изменяется в инерционном интервале, спектральная плотность скорости диссипации адиабатических волн растет быстрее ($\sim k^2$), чем скорость диссипации несжимаемых флуктуаций ($\sim k^{1/3}$). Это означает, что при достаточно широком диапазоне адиабатических флуктуаций начиная с некоторого k_ε диссипация адиабатических флуктуаций будет превалировать над диссипацией несжимаемой турбулентности. Определить k_ε можно по закону Колмогорова–Обухова. Если $\varepsilon_{\boldsymbol{u}k} = \varepsilon_{\boldsymbol{v}k}$ для волнового числа k_ε, то из (19) и (21)

$$2\nu C_k \varepsilon^{2/3} k_\varepsilon^{1/3} = \eta k_\varepsilon^2 a^2 \frac{v_*^4}{c_s^2} k_*^{-1}, \qquad (28)$$

где $C_k \approx 1.5$ — константа Колмогорова, или

$$E_a = \frac{2\nu C_k}{\eta}\left(\frac{\varepsilon}{k_*}\right)^{2/3}\left(\frac{k_*}{k_\varepsilon}\right)^{5/3}. \qquad (29)$$

Если $k_\varepsilon \cong k_*$, то из (28)

$$(\varepsilon/k_*)^{2/3} \cong A a^2 \eta^2 k_*^2, \quad A = \frac{\eta}{2C_k\nu}, \qquad (30)$$

или $k_\varepsilon \cong \sqrt[4]{\varepsilon/\eta^3}$, а $\dfrac{1}{k_\varepsilon} \cong \dfrac{\eta}{\nu}\lambda_k$, где $\lambda_k = \sqrt[4]{\nu^3/\varepsilon}$ — колмогоровский масштаб. Отсюда

$$E_a \cong \left(\frac{\varepsilon}{k_\varepsilon}\right)^{2/3} \cong \sqrt{\varepsilon\eta}. \qquad (31)$$

При $k > k_\varepsilon$ в спектре турбулентных, а в большей степени уже адиабатических флуктуаций будет наблюдаться отклонение от колмогоровского поведения, которое хорошо видно в экспериментальных результатах в форме вздутия (bump) в компенсированных спектрах на больших частотах [34, 35]. Пример такого спектра показан на рис. 2.

Заключение

В работе показано, что уравнения, предложенные Мониным и Татарским для описания взаимодействия звуковых волн и турбулентности, позволяют описать поток энергии по спектру. Одновременное существование в турбулентной атмосфере флукту-

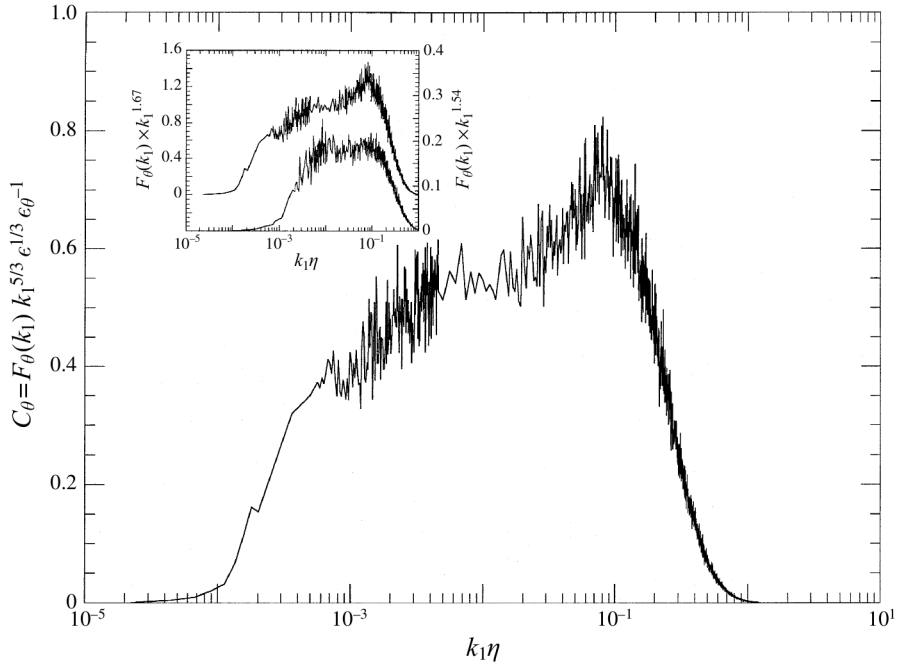

Рис. 2. Компенсированный спектр продольных пульсаций тепературы в аэродинамической трубе при $\mathcal{R}_\lambda = 582$ и $\mathcal{R}_\lambda = 140$ (верхний график на врезке) из работы [35]. Здесь $\eta \equiv \lambda_k$ — колмогоровский масштаб

аций потенциальной плотности (энтропии), определяемых приближением несжимаемости, и адиабатических флуктуаций плотности, связанных с флуктуациями давления приближением адиабатичности, приводит к *неопределенности плотности вероятности* для лагранжевых воздушных частиц.

Формальное обратное преобразование Вигнера позволяет ввести две шкалы для плотности вероятности: внутреннюю и внешнюю, а разделение турбулентных флуктуаций на мелкомасштабные и крупномасштабные (макротурбулентность) следует проводить по временно́й (энергетической), а не по пространственной шкале.

Ортогональное разложение корреляционной функции флуктуаций энтропии позволяет ввести гильбертово пространство, в котором плотность функции распределения может меняться на внешних масштабах. Волновые функции, свойства которых казались столь непривычны в прошлом веке, приобретают простой и понятный смысл в статистическом понимании гильбертова пространства распределений вероятности для флуктуаций плотности числа лагранжевых воздушных частиц.

Многочисленные прецизионные экспериментальные наблюдения последних десятилетий свидетельствуют, что скорость диссипации адиабатических флуктуаций превышает скорость диссипации несжимаемой турбулентности на высокочастотном конце инерционного интервала, а сама энергия адиабатических движений, как показывает (31), связана с колмогоровским масштабом скорости.

В заключение выскажем два предположения, которые могут быть экспериментально проверены в ближайшем будущем. В работе [9] Обухов предположил, что распределение турбулентных флуктуаций скоростей имеет форму планковского спектра. Есть все основания предполагать, что планковскую форму имеет спектр скоростей адиабатических флуктуаций [23]. На это указывают и современные измерения в аэродинамических трубах показателя затухания спектра флуктуаций на масштабах диссипации [33, 34].

Наконец, копенгагенская интерпретация волновых функций [36] может быть несколько переосмыслена, поскольку волновые функции теории турбулентности описывают *неопределенность* плотности вероятности. А сам принцип неопределенности является свойством *измерения изменений* плотности вероятности.

Список литературы

1. *Обухов А.М.* // Докл. АН СССР. 1941. **30**, № 7. С. 616.
2. *Блохинцев Д.И.* // Докл. АН СССР. 1945. **46**, № 4. С. 150.
3. *Красильников В.А.* // Докл. АН СССР. 1945. **47**, № 7. С. 486.
4. *Lighthill M.J.* // Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. 1952. **211**, N 1107. P. 564.
5. *Kraichnan R.H.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1953. **25**, N 6. C. 1096.
6. *Монин А.С.* // Акуст. журн. 1961. **7**, № 4. С. 457.
7. *Каллистратова М.А.* // Докл. АН СССР. 1959. **125**. С. 62.
8. *Tatarski V.I.* Wave Propagation in a Turbulent Medium. N. Y., 1961 (*Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.)
9. *Обухов А.М.* // Докл. АН СССР. 1941. **32**, № 1. С. 22.
10. *Монин А.С., Яглом А.М.* // Статистическая гидромеханика. Ч. 2. 1967.
11. *Юшков Е.В., Юшков В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 6. С. 114 (*Yushkov E.V., Yushkov V.P.* // Moscow University Phys. Bull. 2011. **66**, N 6. C. 609).
12. *Обухов А.М.* // Докл. АН СССР. 1949. **66**, № 1. С. 17.
13. *Batchelor G.K.* // Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1951. **47**, N 2. P. 359.
14. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // Успехи физ. наук. 1997. **167**, № 11. С. 1137.
15. *Захаров В.Е.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. **17**, № 4. С. 431.
16. *Zakharov V.E., L'vov V.S., Falkovich G.* // Kolmogorov spectra of turbulence I. Wave turbulence. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, 1992.
17. *Bull M.K.* // J. Sound and Vibration. 1996. **190**, N 3. P. 299.
18. *Обухов А.М.* // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. **13**, № 1. С. 58.
19. *Монин А.С., Обухов А.М.* // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1958. № 11. С. 1360.
20. *Колмогоров А.Н.* // Докл. АН СССР. 1941. **30**. С. 9.
21. *Обухов А.М.* // Труды геофиз. ин-та АН СССР. 1954. № 24. С. 151.
22. *Кадомцев Б.Б.* // Успехи физических наук. 1994. **164**, № 5. С. 449.
23. *Юшков В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013, № 4. С. 65. (*Yushkov V.P.* // Moscow University Phys. Bull. 2013. **68**. N 4. C. 330).
24. *Колмогоров А.Н.* // Докл. АН СССР. 1940. **26**. С. 6.
25. *Wigner E.* // Phys. Rev. 1932. **40**, N 5. P. 749.
26. *Kraichnan R.H.* // J. Math. Phys. 1961. **2**, N 1. P. 124.
27. *Хазен А.М.* // Введение меры информации в аксиоматическую базу механики. М., 1996.
28. *Ландау Л.Д.* // ЖЭТФ. 1941. **11**, № 6. С. 592 (*Landau L.D.* // J. Phys. (USSR). 1941. **5**, N 1. P. 71.)
29. *Kraichnan R.H.* // On the Propagation of Sound in a Turbulent Fluid. Columbia Univ New York Acoustics Lab, 1954. N TR4.
30. *Farabee T.M., Casarella M.J.* // Phys. Fluids. A: Fluid Dynamics. (1989–1993.) 1991. **3**, N 10. P. 2410.
31. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М., 1986.
32. *Lin C.C.* // Quart. Appl. Math. 1953. P. 295. (Also in: Selected Papers of CC Lin // Fluid Mech. and Appl. Math. 1987. **1**, N 4. P. 154.)
33. *Tsuji Y.* et al. // J. Fluid Mech. 2007. **585**. P. 1.
34. *Saddoughi S.G., Veeravalli S.V.* // J. Fluid Mech. 1994. **268**. P. 333.
35. *Mydlarski L., Warhaft Z.* // J. Fluid Mech. 1998. **358**. P. 135.
36. *Гейзенберг В.* Нильс Бор и развитие физики / Под ред. В. Паули. М., 1958. С. 23.

The Hamiltonian formalism and quantum-mechanical analogy in the probabilistic description of turbulence

V. P. Yushkov

Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: yushkov@phys.msu.ru.

It is shown here that (i) the interaction of adiabatic waves with incompressible turbulence makes it possible to statistically describe the transfer of the energy of turbulent pulsations over the spectrum, (ii) the fundamental parameter that allows the effect of adiabatic motions on incompressible turbulence to be parameterized is the entropy dissipation coefficient in the equation that is called the Obukhov equation in this paper, and (iii) the generalized coordinates or canonical variables of the Zakharov equation should be interpreted as wave functions.

Keywords: turbulence, adiabatic fluctuations, energy, spectrum, probability density.
PACS: 47.27.Ak.
Received 4 April 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2015).

Сведения об авторе

Юшков Владислав Пролетарьевич — канд. физ-мат наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-15-41, e-mail: yushkov@phys.msu.ru.