

Эффект Зеемана в модифицированной модели Гросса–Невё в (2+1)-мерном пространстве-времени с компактификацией

Р. Н. Жохов^a, В. Ч. Жуковский^b, П. Б. Колмаков^c

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: ^a rzn95@mail.ru, ^b zhukovsk@phys.msu.ru, ^c pavel.b.kolmakov@yandex.ru

Статья поступила 04.03.2015, подписана в печать 20.04.2015.

В рамках модифицированной модели Гросса–Невё рассмотрено влияние магнитного поля, температуры и химического потенциала на фазовую структуру системы в (2+1)-мерном пространстве-времени с одним компактифицированным пространственным измерением (цилиндр). Рассмотрен эффект Зеемана, индуцированный внешним магнитным полем, параллельным оси цилиндра. Построены графики намагниченности системы, создаваемой за счет эффекта Зеемана. Указана возможность обобщения полученных результатов на углеродные нанотрубки.

Ключевые слова: модель Гросса–Невё, химический потенциал, эффект Зеемана.

УДК: 530.145. PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz, 11.10.Wx.

Введение

Модель Гросса–Невё (ГН) [1, 2] — одна из простейших, но в то же время крайне эффективных моделей четырехфермионного взаимодействия, которая будет рассматриваться в настоящей работе. С одной стороны, модель ГН нашла свое применение в качестве простой модели, демонстрирующей эффекты стандартной модели, такие как асимптотическая свобода, спонтанное нарушение симметрии и т. д. С другой стороны, известно, что многие результаты, полученные в модели ГН, могут быть использованы в физике конденсированного состояния вещества. Так, лагранжиан, подобный (1+1)-мерной модели ГН, возникает при рассмотрении одномерных полимеров (таких как полиацетилен [3, 4]), а лагранжиан, подобный (2+1)-мерной модели ГН, возникает при рассмотрении двумерных полимеров (таких как графен — см., например, [5]). Таким образом, особый интерес представляет рассмотрение модели ГН, используемой для описания подобных систем, находящейся под влиянием таких параметров, как температура, химический потенциал и внешние поля [5–9].

Если число измерений $D = d + 1$ больше, чем $D = 1 + 1$ ($d > 1$), то модель ГН является перенормируемой в рамках стандартной теории возмущений. Однако было показано, что трехмерная модель Гросса–Невё может быть перенормирована с использованием непертурбативного метода $1/N$ -разложения [10].

В настоящей работе модель ГН исследуется в (2+1)-мерном пространстве-времени с одним компактифицированным пространственным измерением (цилиндр). Такая модель в физике конденсированного состояния вещества могла бы описывать полимерные трубки (такие, как углеродные нанотрубки, которые могут быть рассмотрены как трубки графена). Рассматриваемый цилиндр будет вложен в обычное плоское четырехмерное пространство-время, при этом будет учитываться воздействие внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра на спин электронов (эффект Зеемана), и обусловленная

этим явлением намагниченность. Следует отметить, что в теориях, связанных с графеном, несмотря на введение уравнения Дирака для четырехкомпонентных фермионов (см. дальнейшие определения), их компоненты не связаны с реальным спином [11]. По этой причине при введении эффекта Зеемана реальный спин будет рассматриваться как дополнительное квантовое число (см. раздел 4), так же как это сделано, например, в работе [5] для плоского пространства.

В настоящей работе не будет рассматриваться вызываемый магнитным полем эффект Ааронова–Бома, влияние которого без учета эффекта Зеемана рассматривалось, в частности, в работах [8, 9, 12]. Одновременный учет эффектов Зеемана и Ааронова–Бома является предметом последующих публикаций.

1. Эффективный потенциал плоской трехмерной модели Гросса–Невё

Действие модели Гросса–Невё в плоском пространстве записывается в виде [1]

$$S = \int d^3x \left[\sum_{a=1}^N \bar{\psi}^a i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a + \frac{G}{2} \left(\sum_{a=1}^N \bar{\psi}^a \psi^a \right)^2 \right], \quad (1)$$

где N — число ароматов фермионов, а γ -матрицы определяются приводимым представлением:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где σ^i — матрицы Паули, а матрица I_2 — единичная матрица размера 2×2 . В теориях, описывающих явления в графене, такое или схожие представления γ -матриц возникают естественным образом [13] при записи уравнения Гамильтона для квазичастиц, чем и обусловлен выбор этого представления в настоящей работе. При этом в теориях, связанных с графеном, N приобретает смысл числа спиновых состояний квазичастиц, а четыре компоненты ферми-

она ψ не связаны с реальным спином [11], по этой причине в дальнейшем при расчете эффектов взаимодействия спина фермионов с магнитным полем различные спиновые состояния будут введены путем добавления нового квантового числа [5]. Киральная матрица γ^5 определяется стандартным образом:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Вводя вспомогательное поле $\sigma(x) = \frac{G}{N} \bar{\psi}(x)\psi(x)$ и используя преобразование Стратоновича–Хаббарда [14], можно привести действие к виду

$$S = \int d^3x \left[\bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi + \bar{\psi} \psi \sigma + \frac{N}{2G} \sigma^2 \right]. \quad (4)$$

При этом производящий функционал

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi \exp(iS[\psi, \bar{\psi}]) = \exp(-N\mathfrak{V}V_{\text{eff}}),$$

где $\mathfrak{V}$ — объем пространства-времени, с использованием приближения среднего поля $\sigma(x) = \text{const}(x) = \sigma$, являющегося ведущим порядком $1/N$ -разложения [15], позволяет определить эффективный потенциал V_{eff} :

$$V_{\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} - 2 \int d^3p \ln[p^2 + \sigma^2]. \quad (5)$$

2. Трехмерная модель Гросса–Невё на цилиндре

Рассмотрим цилиндр как (2+1)-мерную брану (с одним компактифицированным пространственным измерением), погруженную в плоское (3+1)-мерное пространство-время («балк»). Фермионы на бране подвергаются воздействию магнитного поля $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z$ постоянного и однородного во всем (3+1)-мерном балке. Здесь и далее в балке используются декартовы (x, y, z) и цилиндрические (ρ, ϕ, z) координаты, а на цилиндре — декартовы координаты (x_1, x_2) , при этом компактифицированное измерение соответствует координате x_2 . Пусть радиус цилиндра равен R , а координатная ось z плоского (3+1)-мерного пространства совпадает с осью цилиндра: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi$. Векторный потенциал электромагнитного поля в балке записывается в виде $\mathbf{A} = \frac{\rho}{2} \mathbf{e}_\phi$, что приводит к потенциалу $\mathcal{A} = \frac{R}{2} \mathbf{e}_2$ на цилиндре. Такой потенциал должен быть включен в ковариантную производную и приводит к возникновению эффекта Ааронова–Бома, однако в настоящей работе влияние данного эффекта рассматриваться не будет (в зависимости от геометрических параметров цилиндра и эффективных характеристик фермионов такое допущение может быть оправданным; в частности, магнитный поток через сечение цилиндра пропорционален квадрату радиуса цилиндра, и при достаточно малом радиусе даже значительные магнитные поля не создают существенного магнитного потока).

При указанном способе компактификации мы можем рассмотреть нетривиальные граничные условия с произвольной фазой α , что может быть записано как

$$\psi(x_0, x_1, x_2 + L) = e^{2\pi i \alpha} \psi(x_0, x_1, x_2). \quad (6)$$

В частности, $\alpha = 0$ соответствует периодическим граничным условиям, а $\alpha = 1/2$ — антипериодическим. Фактически, если разложить $\psi(x_0, x_1, x_2)$ в ряд Фурье по x_2 , условие (6) означает, что $\psi(x_0, x_1, x_2) = \sum_n e^{2\pi i x_2(n+\alpha)/L} \psi_n \rightarrow \psi(x_0, x_1, x_2 + L) = \sum_n e^{2\pi i x_2(n+\alpha)/L} e^{i2\pi(n+\alpha)} \psi_n(x_0, x_1) = \psi(x_0, x_1, x_2) e^{2\pi i \alpha}$. В приложении к физике полимеров фаза α характеризует различные способы сворачивания листа полимера в трубку, приводящие к различным свойствам получающихся трубок; так, в частности, «металлическим» углеродным нанотрубкам соответствует $\alpha = 0$, а «полупроводниковому» случаю соответствует $\alpha = \pm 1/3$ [18]).

Рассмотрение модели при конечной температуре предполагает также компактификацию временного измерения; таким образом, вводя разложение Фурье также и по компактифицированному пространственному измерению, мы можем записать эффективный потенциал в виде

$$V_{\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} - 2 \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{1}{\beta} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 (l+1/2)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n+\alpha)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \right], \quad (7)$$

где мы использовали обозначения $p_\mu = (p_0, p_1, p_2)$, $L = 2\pi R$ (длина окружности компактифицированного измерения), $p_{2,n} = \left(\frac{2\pi}{L} \right) (n+\alpha)$ и учли конечную температуру $T = 1/\beta$ путем использования техники разложения по мацубаровским частотам [16] $p_{0,l} = \omega_l = (2\pi/\beta) (l+1/2)$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Известно, что углеродные нанотрубки, проявляющие «металлические» свойства, для которых выполняются периодические граничные условия $\alpha = 0$, достаточно устойчивы к нарушениям кристаллической решетки и сохраняют свои «металлические» свойства даже в экстремальных условиях [17]. По этой причине в дальнейшем мы будем рассматривать только случай $\alpha = 0$, однако большая часть результатов может быть обобщена и на случай $\alpha \neq 0$.

Следует также отметить некоторые формальные свойства эффективного потенциала (7): эффективный потенциал является четной функцией α , кроме того, он периодичен по α с периодом 1, что позволяет ограничить исследуемую область интервалом $\alpha \in [0, 1/2]$, и далее с учетом свойств четности и периодичности возможно получить значение эффективного потенциала для любого действительного значения α , используя формулы $V_{\text{eff}}(\alpha, \dots) = V_{\text{eff}}(1+\alpha, \dots)$ и $V_{\text{eff}}(\alpha, \dots) = V_{\text{eff}}(-\alpha, \dots)$.

Далее после добавления химического потенциала μ в эффективный потенциал (7) (способы введения химического потенциала подробно изложены, например, в [16]) и в предположении $\alpha = 0$, которое обсуждалось выше, эффективный потенциал может быть записан в виде

$$V_{\text{eff}}(\sigma, \alpha, T, \mu) = \frac{\sigma^2}{2G} - \frac{2}{\beta L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \times$$

$$\times \ln \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\mu \right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \right]. \quad (8)$$

3. Фазовая структура модели с учетом химического потенциала и температуры

После выделения в (8) слагаемого, не зависящего от σ , эффективный потенциал может быть переписан в виде

$$V_{\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} - \frac{2}{\beta L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \times \\ \times \ln \left[1 + \frac{\sigma^2}{\left(\frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\mu \right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + p_1^2} \right]. \quad (9)$$

С использованием формулы

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{b^2}{(l + \alpha)^2 + a^2} \right) = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\ln((l + \alpha)^2 + a^2 + b^2) - \ln((l + \alpha)^2 + a^2)) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \ln \left(1 + \frac{b^2}{\tau^2 + a^2} \right) + \\ + \ln \frac{1 - 2 \cos(2\pi\alpha) e^{-2\pi\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2+b^2}}}{1 - 2 \cos(2\pi\alpha) e^{-2\pi\sqrt{a^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2}}}, \quad (10)$$

которая может быть найдена, например, в [19], после ряда упрощений эффективный потенциал переписывается как

$$V_{\text{eff}} = V_{(0)} + V_{(L)} + V_{(\mu T)}, \quad (11)$$

где

$$V_{(0)} = \frac{\sigma^2}{2G} - 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + \sigma^2) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2 \sigma_0}{2} \right), \quad (12)$$

$$V_{(L)} = \frac{2}{\pi L^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-L\sigma n}}{n^3} + \frac{2\sigma}{\pi L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-L\sigma n}}{n^2} = \\ = 2 \left(\frac{1}{\pi L^3} \text{Li}_3(e^{-L\sigma}) + \frac{\sigma}{\pi L^2} \text{Li}_2(e^{-L\sigma}) \right), \quad (13)$$

$$V_{(\mu T)} = -\frac{2}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \times \\ \times \ln(1 + 2 \text{ch}(\beta\mu) \exp(-\beta E_{n,p_1}) \exp(-2\beta E_{n,p_1})) - \\ - \frac{2}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \times \\ \times \left[\ln(1 + e^{-\beta(E_{n,p_1}^+)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{n,p_1}^-)}) \right], \quad (14)$$

где Li — специальные функции — полилогарифмы [20], $E_{n,p_1} = \sqrt{p_1^2 + \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + \sigma^2}$ и $E_{n,p_1}^{\pm} = E_{n,p_1} \pm \mu$, а также введены обозначения $\sigma_0 = \pi/|g|$, $g = 1/G - \pi/\Lambda < 0$, где параметр обрезания импульса в плоской модели Λ (достаточно подробно процедура перенормировки модели изложена, например,

в [21]) характеризует границы области применимости модели, поскольку в рамках теории возмущений трехмерная модель Гросса–Невё является неперенормируемой. Величина σ_0 является равновесным значением конденсата σ при отсутствии температуры, компактификации и внешних полей [2]. При построении графиков будет использоваться характерный масштаб температур $\beta_c = 1/T_c = 2|g| \ln 2/\pi$, соответствующий температуре, при которой восстанавливается симметрия в плоской модели без внешних полей, а также совпадающий с ним в системе единиц $\hbar = c = 1$ масштаб длины для окружности компактифицированного измерения $L_c = \beta_c$.

Дальнейшие расчеты и построение графиков производились численно. График на рис. 1 демонстрирует фазовую структуру модели в плоскости (T, μ) для $L = 1.2L_c$. Фазовая структура схожа со структурой, полученной в [22] для двумерной модели Гросса–Невё, что может быть интерпретировано как проявление размерной редукции из асимметричной фазы трехмерной модели Гросса–Невё, существующей при достаточно низкой температуре и $\alpha = 0$ [2].

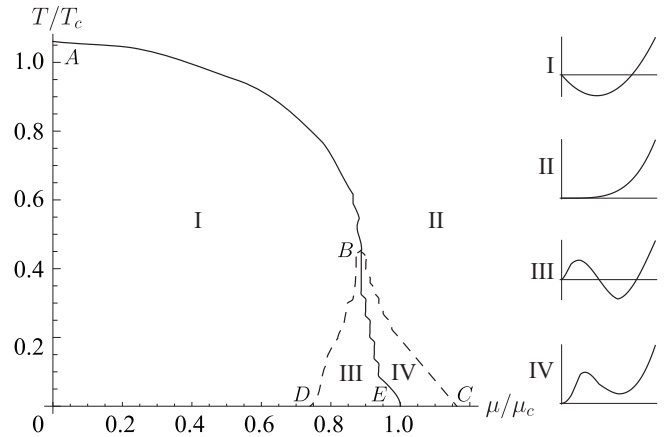


Рис. 1. Фазовая диаграмма модели с учетом температуры и химического потенциала при $L = 1.2L_c$

Области I и III на рисунке соответствуют фазе нарушенной симметрии, для которой $\sigma \neq 0$, различие этих областей заключается в том, что в области I существует только один минимум эффективного потенциала V_{eff} , являющийся нетривиальным $\sigma \neq 0$, в области III, однако существует два минимума — глобальный минимум $\sigma \neq 0$ и локальный минимум при $\sigma = 0$. Области II и IV являются областями с ненарушенной симметрией, при этом в области II существует только тривиальный минимум $\sigma = 0$, в то время как в области IV присутствует также второй, нетривиальный минимум $\sigma \neq 0$, являющийся, однако, только локальным. Как следствие линия BE является кривой фазового перехода первого рода, а линия AB — кривой фазового перехода второго рода (это различие будет наглядно продемонстрировано в разделе 4). Линии BD и BC не являются кривыми фазовых переходов, а соответствуют линиям, при пересечении которых появляется либо исчезает локальный минимум.

4. Магнитные свойства модели

Как указывалось выше, при рассмотрении эффектов взаимодействия описываемой системы с магнитным полем мы введем дополнительное квантовое число, соответствующее проекции спина фермионов на направление магнитного поля. Причиной такого подхода является связь модели с теориями, описывающими явления в графене, где четыре компоненты спинора ψ не описывают реального спина частиц, а конденсат σ является следствием нарушения кристаллической решетки и не связан с четырехфермионным взаимодействием. При этом, однако, эффективный потенциал таких теорий совпадает или частично совпадает (при добавлении дополнительных конденсатов) с (11)–(14) (см., например, [5]). Таким образом, для рассмотрения эффекта Зеемана в эффективный потенциал следует добавить стандартный член, по форме совпадающий с химическим потенциалом, но зависящий от направления проекции реального спина частиц на направление магнитного поля:

$$V_{\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} - \frac{1}{\beta L} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \times \\ \times \ln \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\mu_s \right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \right], \quad (15)$$

где введены обозначения $\mu_{\uparrow} = \mu + \delta\mu = \mu + \frac{g_L}{2} \mu_B H$, $\mu_{\downarrow} = \mu - \delta\mu = \mu - \frac{g_L}{2} \mu_B H$, в которых $\mu_B = e/2m$ — магнетон Бора и g_L — эффективный множитель Ланде.

По аналогии с формулой (14) для учета эффекта Зеемана требуется заменить $V_{(\mu T)}$ на

$$V_{(\mu T)}^Z = -\frac{1}{\beta L} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \ln(1 + 2 \operatorname{ch}(\beta\mu_s) \times \\ \times \exp(-\beta E_{n,p_1}) + \exp(-2\beta E_{n,p_1})) = \\ = -\frac{1}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left[\ln \left(1 + e^{-\beta(E_{n,p_1})_{\uparrow}^+} \right) + \right. \\ \left. + \ln \left(1 + e^{-\beta(E_{n,p_1})_{\uparrow}^-} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(E_{n,p_1})_{\downarrow}^+} \right) + \right. \\ \left. + \ln \left(1 + e^{-\beta(E_{n,p_1})_{\downarrow}^-} \right) \right], \quad (16)$$

где $(E_{n,p_1})_{\uparrow}^{\pm} = E_{n,p_1} \pm \mu_{\uparrow\downarrow}$. Из этой формулы можно сделать вывод, что значение эффективного потенциала остается неизменным при замене $\mu \leftrightarrow \delta\mu$, а следовательно, фазовая структура, полученная в разделе 3 на плоскости (T, μ) , совпадает с фазовой структурой в плоскости $(T, \delta\mu)$ при $\mu = 0$.

Рассмотрим намагниченность, обусловленную взаимодействием фермионов с внешним магнитным полем за счет эффекта Зеемана. В общем случае намагниченность определяется как частная производная эффективного потенциала:

$$M = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial H}.$$

Для рассматриваемой модели это означает

$$M = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial H} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(\sigma, \beta, L, \mu, \delta\mu)}{\partial H} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \delta\mu} \frac{\partial \delta\mu}{\partial H}. \quad (17)$$

Согласно данному выше определению,

$$\frac{\partial \delta\mu}{\partial H} = \frac{g_L \mu_B}{2}. \quad (18)$$

Можно ожидать, что эффект Зеемана должен повлиять на восстановление киральной симметрии модели при характерном значении $\delta\mu \sim \sigma_0$, где σ_0 — определенный выше конденсат в плоской модели без внешних полей. Магнитное поле H_{μ} , создающее соответствующее значение $\delta\mu$, может быть оценено как

$$\delta\mu \sim \sigma_0 \sim \pi/g, \quad (19)$$

$$H_{\mu} \sim \frac{2\sigma_0}{g_L \mu_B}. \quad (20)$$

Формулы (12), (13), (16) позволяют рассчитать намагниченность, вызываемую эффектом Зеемана. Легко видеть, что из всех слагаемых, входящих в V_{eff} , только $V_{(\mu T)}^Z$ содержит зависимость от $\delta\mu$. Для еще большего упрощения возможно отдельно провести вычисления для слагаемых $V_{(\mu T)}^Z$, соответствующих $s=\uparrow$ и $s=\downarrow$, таким образом предварительно вычислив концентрацию частиц с различными направлениями спина:

$$n_s = \frac{\partial V_{(\mu T)}}{\partial \mu_s} \Big|_{\sigma=\sigma_{\text{eq}}} = \\ = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sh}(\beta\mu_s)}{\operatorname{ch}(\beta\mu_s) + \operatorname{ch}(\beta E_{n,p_1})} \right) \Big|_{\sigma=\sigma_{\text{eq}}}, \quad (21)$$

где производные берутся в точке стабильного минимума σ_{eq} , для которой $\partial V_{\text{eff}}/\partial \sigma|_{\sigma=\sigma_{\text{eq}}} = 0$ и $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial \sigma^2|_{\sigma=\sigma_{\text{eq}}} > 0$.

Намагниченность и магнитная восприимчивость могут быть определены как

$$M = \mu_B(n_{\uparrow} - n_{\downarrow}), \quad \chi = \frac{\partial M}{\partial H}, \quad (22)$$

где формула для намагниченности фактически совпадает с (17), но использует промежуточный результат (21).

График на рис. 2 демонстрирует зависимость намагниченности, вызванной эффектом Зеемана, от величины магнитного поля при $L = 0.7L_c < L_c$, $\mu = 0$. На данном графике хорошо видно, что фазовый переход между кирально симметричной и несимметричной фазами является переходом первого рода, если в симметричной фазе сохраняется локальный нетривиальный минимум (переход из области III в область IV и обратно на рис. 1), и, напротив, переходом второго рода, если нетривиальный минимум исчезает при фазовом переходе (переход из области I в область II и обратно на рис. 1). При $T = \frac{1}{3}T_c$ с ростом магнитного поля график пересекает кривую фазового перехода первого рода (BE на рис. 1), при $T = \frac{4}{5}T_c$ — кривую фазового перехода второго рода

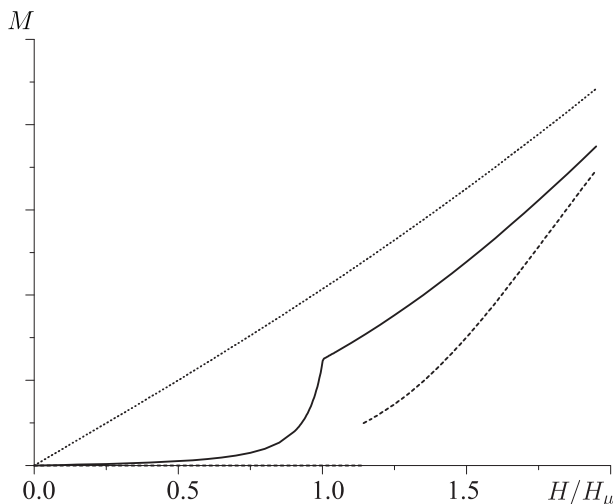


Рис. 2. Намагниченность системы M как функция магнитного поля H при различных температурах: $T = \frac{1}{3}T_c$ (штриховая кривая), $T = \frac{4}{5}T_c$ (сплошная кривая), $T = \frac{3}{2}T_c$ (точечная кривая)

(AB на рис. 1), а при $T = \frac{3}{2}T_c$ кривые фазовых переходов не пересекаются, поскольку симметрия оказывается восстановлена даже при $H = 0$.

Заключение

В настоящей работе исследована роль эффекта Зеемана, вызванного внешним магнитным полем, и химического потенциала в модели Гросса–Невё в (2+1)-мерном пространстве-времени с одним компактифицированным пространственным измерением (цилиндр) с периодическими граничными условиями при конечной температуре. Получены явные выражения для эффективного потенциала (11)–(13), (16).

Построена фазовая диаграмма модели с учетом конечной температуры и химического потенциала (рис. 1), совпадающая также с фазовой диаграммой модели с учетом эффекта Зеемана при нулевом химическом потенциале. Построенная диаграмма принципиально совпадает с фазовой диаграммой двумерной модели Гросса–Невё [22], что является проявлением размерной редукции в трехмерной модели Гросса–Невё с компактификацией при периодических граничных условиях [2].

Получены формулы (21, 22) для расчета намагниченности, индуцированной эффектом Зеемана, вызванным магнитным полем, параллельным оси цилиндра. Построены графики зависимости намагниченности от приложенного магнитного поля при

различных температурах (рис. 2). Показано, что род фазовых переходов, возникающих при приложении магнитного поля, соответствует результатам, ожидаемым из фазовой диаграммы модели.

Авторы искренне благодарят Д. Эберта за поддержку работы и многочисленные советы, а также участников научного семинара кафедры теоретической физики физического факультета МГУ за обсуждение работы и полезные замечания.

Список литературы

1. Gross D.J., Neveu A. // Phys. Rev. D. 1974. **10**. P. 3235.
2. Bietenholz W., Gfeller A., Wiese U.-J. // JHEP. 2003. **10**. P. 018.
3. Caldas H. // Nucl. Phys. B 2009. **807** [FS]. P. 651.
4. Roscher D., Braun J., Drut J.E. // Phys. Rev. A. 2014. **89**. P. 063609.
5. Caldas H., Ramos R.O. // Phys. Rev. B. 2009. **80**. P. 115428.
6. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et al. // Nature. 2005. **438**. P. 197.
7. Vshivtsev A.S., Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G., Magnitsky B.V. // Phys. Part. Nucl. 1998. **29**. P. 523.
8. Ebert D., Klimenko K.G., Tyukov A.V., Zhukovsky V.Ch. // Phys. Rev. D. 2008. **78**. P. 045008.
9. Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhukovsky V.Ch. // Int. J. Mod. Phys. A. 2012. **27**. P. 1250162.
10. Rosenstein D., Warr B.J., Park S.H. // Phys. Rep. 1991. **205**. P. 59.
11. Castro Neto A.H., Guinea F., Peres N.M.R. et al. // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**. P. 109.
12. Жуковский В.Ч., Колмаков П.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 4. С. 8 (Zhukovsky V.Ch., Kolmakov P.B. // Moscow University Phys. Bull. 2013. **68**. N 4. P. 272).
13. Gusynin V.P., Sharapov S.G., Carbotte J.P. // Int. J. Mod. Phys. B. 2007. **21**. P. 4611.
14. Стратонович Р.Л. // Докл. АН СССР. 1957. **157**. С. 1097; Hubbard J. // Phys. Rev. Lett. 1959. **3**. P. 77.
15. Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H. // Phys. Rep. 1991. **205**. P. 59.
16. Kapusta J.I., Gale C. Finite-temperature Field Theory: Principles and Applications. Cambridge, 2006.
17. Ando T. // J. Phys. Soc. Japan. 2005. **74**. P. 777.
18. Elizalde E., Odintsov S.D., Saharian A.A. // Phys. Rev. D. 2011. **83**. P. 105023.
19. Song D.Y. // Phys. Rev. D. 1993. **48**. P. 3925.
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М., 1981.
21. Ramos R.O., Manso P.H.A. // Phys. Rev. D. 2013. **87**. P. 125014.
22. Schöen V., Thies M. // At the Frontier of Particle Physics: Handbook of QCD: Boris Ioffe Festschrift. Vol. 3. World Scientific, 2001. P. 1945.

The Zeeman effect in a modified Gross–Neveu model in (2+1)-dimensional space–time with compactification**R. N. Zhokhov^a, V. Ch. Zhukovsky^b, P. B. Kolmakov^c***Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.**E-mail: ^a rzn95@mail.ru, ^b zhukovsk@phys.msu.ru, ^c pavel.b.kolmakov@yandex.ru.*

The influence of the magnetic field, temperature, and chemical potential on the phase structure of a system in (2+1)-dimensional space–time with one compactified spatial dimension (cylinder) was studied in the framework of the modified Gross–Neveu model. The Zeeman effect that is induced by an external magnetic field parallel to the cylinder axis is considered. The system magnetization that is created due to the Zeeman effect was plotted. The possible generalization of these results to carbon nanotubes is noted.

Keywords: Gross–Neveu model, chemical potential, Zeeman effect.*PACS:* 11.10.Kk, 04.60.Kz, 11.10.Wx.*Received 4 March 2015.**English version: Moscow University Physics Bulletin 4(2015).***Сведения об авторах**

1. Жохов Роман Николаевич — аспирант; e-mail: rzn95@mail.ru.
2. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
3. Колмаков Павел Борисович — аспирант; e-mail: pavel.b.kolmakov@yandex.ru.