

Аналитическое решение для профиля нелинейных гравитационных волн на поверхности идеальной жидкости

В. М. Буданов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, НИИ механики,
лаборатория общей механики. Россия, 119192, Москва, Мичуринский просп., д. 1.
E-mail: vlbudanov@gmail.com

Статья поступила 11.02.2015, подписана в печать 25.03.2015.

В работе исследуется нелинейная система уравнений гидродинамики, описывающая двумерное движение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в бассейне фиксированной глубины. Показано, что известное решение линеаризованной системы является также и решением исходной, нелинейной системы. Описание волнового профиля сведено к решению одного обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка.

Ключевые слова: нелинейные волны, идеальная жидкость.

УДК: 551.465. PACS: 47.35.Bb.

Введение

Наиболее распространенным способом описания движения жидкости являются уравнения в форме Эйлера, которые принципиально нелинейны. Это обстоятельство приводит к тому, что аналитические решения удается получить для очень ограниченного количества задач. Весьма интересной и важной с практической точки зрения является теория возникновения и распространения поверхностных гравитационных волн. Ввиду сложности математического описания эта теория еще далека от совершенства. В данной статье представляется аналитическое решение для формы поверхностной волны и анализируется его соответствие классической теории.

Рассматриваем задачу движения идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ в бассейне конечной глубины h в двумерной постановке. Положение произвольной частицы жидкости определяется горизонтальной координатой x и вертикальной координатой y , причем на свободной невозмущенной поверхности $y = 0$, а на дне $y = -h$. Горизонтальную и вертикальную компоненты скорости обозначаем через $u(x, y)$, $v(x, y)$, давление — через $p(x, y)$. Уравнения гидродинамики в этом случае имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \end{aligned} \quad (1)$$

с граничным условием на дне бассейна

$$v = 0 \quad \text{при} \quad y = -h. \quad (2)$$

Граничное условие на свободной поверхности пока не формализуем. Обычно оно возникает из соображений равенства давления на свободной поверхности, однако его формальная запись нетривиальна ввиду того, что форма этой поверхности заранее неизвестна. Силы поверхностного натяжения не учитываются, единственной возвращающей силой

является сила тяжести, учитываемая в (1) через постоянную g .

Система (1) является существенно нелинейной, однако при определенных допущениях, в частности в предположении малости амплитуды колебаний по сравнению с длиной волны, нелинейными членами в левой части можно пренебречь. В этой постановке получены основополагающие результаты в теории поверхностных гравитационных волн, в том числе установлено наличие дисперсии — зависимости скорости распространения волны от ее длины и глубины бассейна [3, 4], что хорошо согласуется с данными наблюдений. Однако ряд эффектов линейная теория объяснить не в состоянии, в частности профиль волны, который чаще имеет не синусоидальную форму, а представляет собой последовательность крутых гребней и пологих впадин. Одним из направлений учета нелинейных эффектов является поиск решений в виде рядов, отталкиваясь от линейного решения, например волна Стокса. Второе направление, заложенное Буссинеском, привело к выводу уравнения Кортвега — де Вриза (КдВ). Вывод уравнения КдВ встречается в литературе достаточно редко ввиду его сложности и неоднозначности принимаемых допущений [5]. Чаще приводятся эвристические соображения, ведущие к этому уравнению [6, 7, 8].

В настоящей статье делается попытка продвижения в анализе исходной нелинейной системы (1) без предварительных ее упрощений.

1. Уравнение прогрессивной волны

Исключим переменную p из двух последних уравнений (1). Для этого продифференцируем второе по переменной y , третье — по x и вычислим разность результатов

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \\ + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение с учетом первого уравнения (1) легко приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - u \Delta v + v \Delta u = 0, \quad (3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Решение уравнения (3) будем искать в виде прогрессивной волны на поверхности $y = 0$, форма которой задается некоторой функцией фазовой переменной ξ

$$\zeta(x, t) = \zeta(kx - \omega t) = \zeta(\xi), \quad \xi = kx - \omega t. \quad (4)$$

Тогда вертикальная скорость на уровне $y = 0$ может быть оценена следующим образом:

$$v = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\omega \zeta',$$

где штрихом обозначена производная по переменной ξ . Далее положим, что вертикальная скорость на произвольной глубине отличается от вертикальной скорости на поверхности множителем $\psi(y)$, не зависящим от горизонтальной переменной x . Таким образом, приходим к следующему виду вертикальной скорости:

$$v = -\omega \psi \zeta'.$$

Имея в виду, что $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = k \zeta'$, замечаем, что первое уравнение (1) удовлетворяется при

$$v = -\omega \psi \zeta', u = \frac{\omega}{k} \psi' \zeta \quad (5)$$

для произвольных функций $\psi(y)$, $\zeta(\xi)$, каждая из которых зависит от одной переменной. Далее ищем решение уравнения (3) в форме (5), забывая о тех рассуждениях, которые привели нас к этой форме ввиду их нестрогости.

Имея в виду переход от пары переменных x, t к одной ξ посредством (4) и возникающие при этом соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial \xi},$$

вычислим слагаемые уравнения (3) с учетом формы решения (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\omega}{k} \psi'' \zeta + k \omega \psi \zeta'' \right) = \\ &= -\frac{\omega^2}{k} (\psi'' \zeta' + k^2 \zeta'''), \\ -u \Delta v &= -\frac{\omega}{k} \psi' \zeta (-\omega k^2 \psi \zeta''' - \omega \psi'' \zeta') = \\ &= \frac{\omega^2}{k} \psi' \zeta (k^2 \psi \zeta''' + \psi'' \zeta'), \\ v \Delta u &= -\omega \psi \zeta' \left(\omega k \psi' \zeta'' + \frac{\omega}{k} \psi''' \zeta \right) = \\ &= -\frac{\omega^2}{k} \psi \zeta' (k^2 \psi' \zeta'' + \psi''' \zeta), \end{aligned}$$

Складывая эти три выражения, получаем следующее уравнение:

$$\psi'' \zeta' + k^2 \psi \zeta''' - \psi' \zeta (\psi'' \zeta' + k^2 \psi \zeta''') + \psi \zeta' (\psi''' \zeta + k^2 \psi' \zeta'') = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) содержит две функции $\psi = \psi(y)$ и $\zeta = \zeta(\xi)$, зависящие от разных независимых переменных, и допускает бесконечное множество решений. Представляется возможным нахождение лишь некоторых частных решений при априорных предположениях о виде функций $\psi(y)$ и $\zeta(\xi)$.

2. Явный вид решения для скоростей

Рассмотрим традиционное допущение, что по вертикали происходит экспоненциальное уменьшение амплитуды колебаний, а именно $\psi = b e^{\alpha y}$. Подстановка в (6) дает

$$\alpha^2 \psi \zeta' + k^2 \psi \zeta''' - \alpha \psi \zeta (\alpha^2 \psi \zeta' + k^2 \psi \zeta''') + \psi \zeta' (\alpha^3 \psi \zeta + k^2 \alpha \psi \zeta'') = 0.$$

Замечая общий множитель ψ и сокращая слагаемые с α^3 , получаем

$$\alpha^2 \zeta' + k^2 \zeta''' + k^2 \alpha \psi (-\zeta \zeta''' + \zeta' \zeta'') = 0.$$

В силу того что ψ и ζ зависят от разных аргументов, последнее уравнение может иметь нетривиальные решения только в случае выполнения двух соотношений

$$\alpha^2 \zeta' + k^2 \zeta''' = 0, \quad \zeta \zeta''' - \zeta' \zeta'' = 0.$$

Оба соотношения выполняются, если $\alpha = \pm k$ и $\zeta'' = -\zeta$.

Таким образом, уравнение (6) имеет точные решения вида

$$\psi = b e^{\pm k y}, \quad \zeta = a \cos(\xi + \xi_0).$$

Более того, приведенные рассуждения остаются в силе для любых функций вида

$$\psi = c_1 e^{k y} + c_2 e^{-k y}$$

с произвольными константами c_1, c_2 , поскольку в силу свойства $\psi'' = k^2 \psi$ уравнение (6) приводится к виду

$$\zeta' + \zeta''' + \psi' (-\zeta \zeta''' + \zeta' \zeta'') = 0.$$

Вспоминая теперь о граничном условии (2), приходим к заключению, что исходное нелинейное уравнение (3) с граничным условием (2) имеет точное решение

$$\begin{aligned} u &= b \omega \frac{\text{ch}(k(h+y))}{\text{sh}(kh)} \cos \xi, \quad v = b \omega \frac{\text{sh}(k(h+y))}{\text{sh}(kh)} \sin \xi, \\ \xi &= kx - \omega t. \end{aligned} \quad (7)$$

Амплитуда колебаний определяется параметром b . Решение вида (7) является классическим решением линейной теории гравитационных волн. Поскольку оно возникло в качестве решения линеаризованной системы, то соответственно и интерпретировалось в предположении малости скоростей и перемещений. В рамках линейной теории для анализа формы волны на мелкой воде рассматривается приближение решения (7) вида

$$\tilde{u} = \frac{b \omega}{\text{th}(kh)} \cos \xi, \quad \tilde{v} = b \omega \sin \xi.$$

Это приближение приводит к гармонической форме волны и движению поверхностных частиц по

траекториям, представляющим собой эллипсы, вытянутые в горизонтальном направлении с отношением полуосей $\text{th}(kh)$.

3. Профиль волны

Установленный здесь факт, что решение (7) является точным для исходной нелинейной системы, кардинально меняет ситуацию и позволяет далее вести его анализ как нелинейного решения.

Рассмотрим вопрос о форме поверхностной волны, порождаемой решением (7). Пусть в произвольный момент времени эта поверхность (рис. 1) задается некоторой периодической функцией $\zeta(\xi) = \zeta(kx - \omega t)$ и перемещается как единое целое вправо со скоростью $c = \frac{\omega}{k}$. Чтобы частица, находящаяся на поверхности, оставалась на ней при движении волны, горизонтальная и вертикальная компоненты абсолютной скорости частицы u и v должны удовлетворять соотношению

$$v = (u - c) \frac{d\zeta}{dx} = (u - c) k \frac{d\zeta}{d\xi}.$$

Подставляя в это соотношение выражения (7) для u, v при $y = \zeta$, получаем дифференциальное уравнение, описывающее волновую поверхность:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{1}{k} \frac{v}{c - u} = -\frac{bshk(h + \zeta) \sin \xi}{sh(kh) - kb \operatorname{ch}(k(h + \zeta)) \cos \xi}. \quad (8)$$

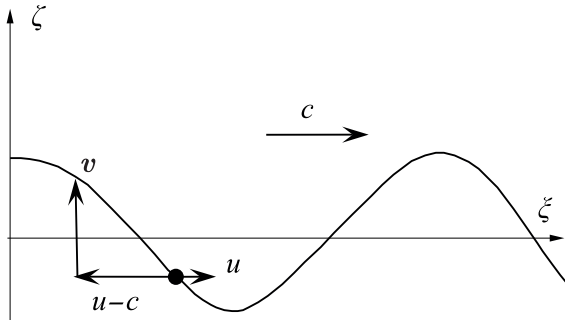


Рис. 1. Кинематическое граничное условие

Рассмотрим приближение мелкой воды, когда длина волны много больше глубины бассейна, а именно $k(h + \zeta) \ll 1$. В этом случае получаем приближенное уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{b(h + \zeta) \sin \xi}{h - b \cos \xi}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, имеющее решение

$$\ln(h + \zeta) = -\ln(h - b \cos \xi) + \ln C,$$

где $\ln C$ — постоянная интегрирования. Отсюда следует

$$\zeta = \frac{C}{h - b \cos \xi} - h. \quad (9)$$

Естественно задать дополнительное условие, что среднее значение ζ равно нулю. В статье [9] показано, что среднее значение функции $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1 - r \cos \xi}}$

равно единице при любых значениях параметра r . С учетом этого вычисляем среднее (9)

$$\bar{\zeta} = \frac{C}{\sqrt{h^2 - b^2}} - h = 0, \quad \text{или} \quad C = h\sqrt{h^2 - b^2}.$$

Окончательно получаем

$$\zeta = \frac{h\sqrt{h^2 - b^2}}{h - b \cos \xi} - h = \frac{h\sqrt{h^2 - b^2} - h^2 + bh \cos \xi}{h - b \cos \xi}. \quad (10)$$

Если рассматривать малые волны, то $b \ll 1$ и $\zeta \approx b \cos(\xi)$. При величинах b порядка h получаем форму волны, приведенную на рис. 2, с заостренными гребнями и пологими впадинами.

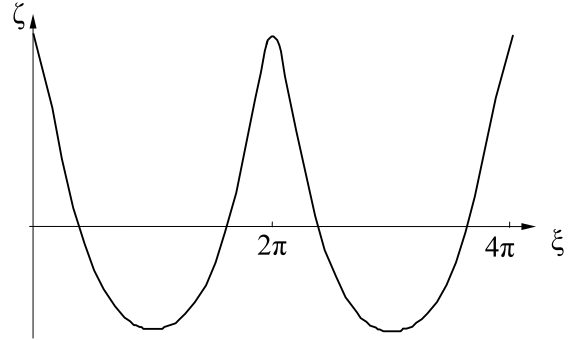


Рис. 2. Форма волны в предположении мелкой воды

4. Граничное условие на свободной поверхности

Рассмотрим линии равного давления. На них полный дифференциал функции $p(\xi, y)$ должен быть равен нулю:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0.$$

Отсюда линии равного давления $y = \eta(\xi)$ определяются соотношением

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \xi} / \frac{\partial p}{\partial y} \right) \Big|_{y=\eta}. \quad (11)$$

Из второго и третьего уравнений (1) с учетом (4) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{k} \left(-\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + ku \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g - \rho \left(-\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + kv \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

В полученные соотношения подставляем выражения для u, v из (7) и с учетом тригонометрических тождеств $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$ и $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ получаем

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{\rho b \omega^2 \sin \xi}{k \operatorname{sh}^2(kh)} [\operatorname{ch}(k(h + y)) \operatorname{sh}(kh) - kb \cos \xi],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} = & -\frac{\rho}{\operatorname{sh}^2(kh)} \times \\ & \times \left[g \operatorname{sh}^2(kh) - b \omega^2 \operatorname{sh}(kh) \operatorname{sh}(k(h + y)) \cos \xi + \right. \\ & \left. + kb^2 \omega^2 \operatorname{ch}(k(h + y)) \operatorname{sh}(k(h + y)) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно формула (11) для линий равного давления принимает следующий вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{k} \left[b \omega^2 \sin \xi (\operatorname{ch}(k(h + \eta)) \operatorname{sh}(kh) - kb \cos \xi) \right] \times$$

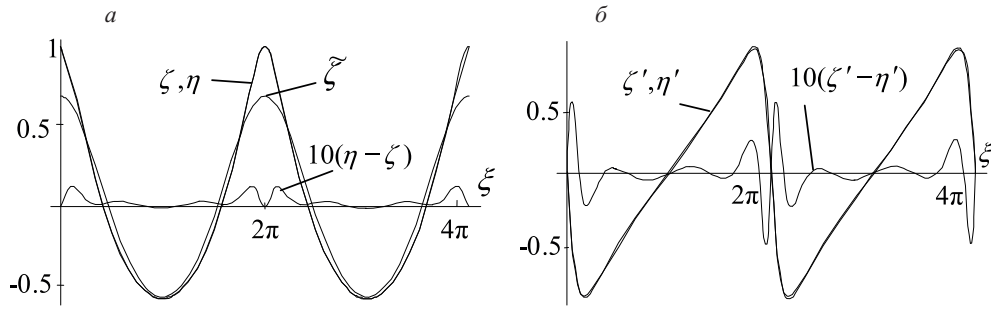


Рис. 3. Профиль волны, линия равного давления и приближенное решение для профиля (а); производные профиля и линии равного давления по фазовой переменной (б)

$$\times \left[g \operatorname{sh}^2(kh) - b\omega^2 \operatorname{sh}(k(h + \eta)) \times \right. \\ \left. \times (\operatorname{sh}(kh) \cos \xi - kb \operatorname{ch}(k(h + \eta))) \right]^{-1}. \quad (12)$$

Таким образом, мы получили точное уравнение для профиля волны (8) и точное уравнение линии равного давления (12).

Если принять, что давление во всех точках поверхности жидкости одинаково, то эти две формулы должны совпадать. Очевидно, что в общем случае это не так.

Рассмотрим случай волн малой амплитуды, когда можно пренебречь членами с множителями $b^2, b\eta, b\zeta$. Тогда (8), (12) упрощаются до следующих уравнений:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -b \sin \xi, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\omega^2 \operatorname{ch}(kh)}{kg \operatorname{sh}(kh)} b \sin \xi.$$

Таким образом, для волн малой амплитуды уравнение поверхности совпадает с уравнением линии равного давления при выполнении условия

$$\omega^2 = kg \operatorname{th}(kh),$$

которое есть в точности дисперсионное соотношение линейной теории гравитационных волн.

Детальный анализ условий, при которых (8) и (12) дают единый профиль с допустимой погрешностью, выходит за рамки настоящей статьи. Приведем здесь в качестве иллюстрации результат расчета для волны со следующими параметрами: длина волны $\lambda = 10$ м, глубина $h = 3$ м, амплитуда $b = 0.6$ м, волновое число $k = 0.63$, а частота подобрана из соображений максимальной близости решений (8), (12) и равна $\omega = 0.75k\sqrt{gh}$ или $\omega = 2.6 \text{ с}^{-1}$. На рис. 3,а приведены графики: ζ — профиль по формуле (8), η — линия равного давления по формуле (12), $\tilde{\zeta}$ — аппроксимация профиля (10). Первые два графика визуально совпадают, поэтому приведена также их разность, умноженная на 10. На рис. 3,б приведены графики производных ζ' , η' ,

а также их разность, умноженная на 10. Отметим, что заданные параметры соответствуют волне амплитуды, близкой к предельной, когда на вершине гребня появляется угловая точка, а производная ζ' в этой точке меняется скачком.

Заключение

В работе показано, что классическое решение линейной теории волн для локальных скоростей частиц жидкости удовлетворяет и нелинейной системе. Получено вытекающее из этого решения нелинейное уравнение для профиля поверхностной волны. Выведено уравнение для линий равного давления, дающее граничное условие на свободной поверхности. Показано, что для малых волн это граничное условие приводит к тому же дисперсионному соотношению, что и линейная теория.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (комплексный проект 02.G25.31.0030) в рамках программы развития кооперации ВУЗов и предприятий, утвержденной постановлением правительства РФ № 218 от 09.04.2010.

Список литературы

1. Лэмб Г. Гидродинамика. М., 1947.
2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М., 1982.
3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Ижевск, 2002.
4. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М., 1981.
5. Debnath L. Nonlinear water waves. Academic Press, 1994.
6. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Ижевск, 2000.
7. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М., 2008.
8. Аббасов И.Б., Моделирование нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья. М., 2010.
9. Буданов В.М. // Вест. Моск. ун-та. Матем. Мех. 2013. № 6. С. 59.

An analytical solution for the profile of non-linear gravity waves on the surface of an ideal liquid**V. M. Budanov***Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119192, Russia.**E-mail: vlbudanov@gmail.com.*

A non-linear system of hydrodynamic equations that describe the 2D motion of an incompressible liquid with a free surface in a pond with a fixed depth is studied in this work. It has been shown that a known solution to the linearized system is also a solution to the initial non-linear system. Description of a wave profile is also reduced to the solution of one ordinary differential non-linear first-order equation.

Keywords: non-linear waves, ideal liquid.*PACS:* 47.35.Bb.*Received 11 February 2015.**English version: Moscow University Physics Bulletin 4(2015).***Сведения об авторе**

Буданов Владимир Михайлович — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; e-mail: vlbudanov@gmail.com.