

Частота акустического излучения цилиндрического вихря

Т. А. Петрова^a, Ф. В. Шугаев^b

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля.

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^a tatyana.a.petrova@gmail.com, ^b shugaev@phys.msu.ru

Статья поступила 18.11.2014, подписана в печать 02.04.2015.

Определена частота акустического излучения цилиндрического вихря в воздухе. Расчеты выполнены на основе уравнений Навье–Стокса с использованием разложения искомым функций в ряд по степеням малого параметра, характеризующего начальную завихренность. В итоге получена неоднородная система параболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Начальный радиус вихря изменяется в широком диапазоне. Рассмотрено плоское течение. В отличие от имеющихся в литературе результатов показано, что при малой величине завихренности частота акустического излучения зависит только от геометрического размера (начального радиуса) вихря.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, нестационарное течение, цилиндрический вихрь, осцилляции плотности, частота акустического излучения.

УДК: 532.516.5. PACS: 47.10.ad.

Введение

Как известно, вихревые структуры при определенных условиях становятся источниками звука. Общие вопросы генерации звука вихревыми структурами рассмотрены в работах [1, 2]. Акустическое излучение системы двух вихревых колец исследовано в работе [3], системы четырех цилиндрических вихрей — в работе [4]. Влияние вихревых структур на свойства турбулентного течения подтверждено многочисленными экспериментами [5–8]. Анализ энергии возмущений вихревых течений в связи с проблемой устойчивости посвящены работы [9–13]. По мнению ряда исследователей, свойства турбулентного течения могут быть описаны на основе уравнений Навье–Стокса без привлечения дополнительных гипотез [14–15].

Концепция турбулентности, предложенная Хопфом и Ландау, состоит в следующем [14]. Решения уравнений Навье–Стокса существуют, и при больших t они становятся квазипериодическими. Иными словами, с течением времени в решении возникает все больше и больше вторичных осцилляций, так что выражение для скорости в конечном итоге принимает вид $\mathbf{v} = f(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$, где отношения частот иррациональны. При больших n решение становится настолько сложным, что может описать хаотическое движение жидкости (газа).

Следует также упомянуть, что в численных моделях LES (Large Eddy Simulation — моделирование с помощью крупных вихрей) турбулентность моделируется совокупностью крупномасштабных вихрей [16]. В этой связи изучение динамики отдельных вихрей и характеристик их акустического излучения представляет определенный интерес.

Частота акустического излучения вихревого кольца в невязкой несжимаемой и слабо сжимаемой жидкости определена в работах [17, 18], в вязком теплопроводном газе — в работе [19]. Что касается частоты акустического излучения одиночного

цилиндрического вихря, то она найдена только для случая невязкой жидкости [20, 21]. Поэтому представляется уместным выполнить соответствующее исследование для цилиндрического вихря в вязком теплопроводном газе.

1. Постановка задачи

1.1. Исходные уравнения

Целью работы является определение частоты акустического излучения одиночного цилиндрического вихря в вязком теплопроводном газе (воздухе). Ось вихря неподвижна относительно газа на бесконечности.

Используется следующая система уравнений, записанная в безразмерном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} = \nu \Delta \Omega_i + \\ + \frac{3}{4} \varepsilon_{ijk} \nu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_m} + f_{1i}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = -s, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{4}{3} \nu \Delta s + \frac{e^h}{\gamma} \Delta w - \\ - \left(\frac{1}{\gamma} e^h + 0.5 s \nu \right) \Delta h + 1.5 \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} + f_{2i}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + v_j \frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \eta \Delta h - (\gamma - 1) s + f_{3i}, \\ \Omega = \text{rot } \mathbf{v}, \quad w = -\ln \rho, \quad s = \text{div } \mathbf{v}, \quad h = \ln T, \\ \nu = \mu / \rho, \quad \eta = \lambda / \rho, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь ρ, T, \mathbf{v} — плотность, температура и скорость, соответственно; μ, λ, ν — вязкость, теплопроводность и кинематическая вязкость соответственно; Δ — оператор Лапласа; Pr — число Прандтля; γ — показатель адиабаты; f_{1i}, f_{2i}, f_{3i} — нелинейные члены (относительно первых производных); ξ_{ijk} —

антисимметричный единичный тензор. Полный вид системы (1) представлен в приложении.

В системе (1) первое (так называемое уравнение Гельмгольца) и третье уравнения получены путем применения к уравнению движения операторов rot и div соответственно, второе уравнение есть уравнение непрерывности, четвертое — это уравнение энергии. Иначе говоря, уравнение движения для вектора скорости заменено двумя уравнениями: одно — для $\text{rot } \mathbf{v}$, другое — для $\text{div } \mathbf{v}$. Процедура определения вектора по его ротору и дивергенции изложена в монографии Н. Е. Кочина [22].

В пространственном случае имеем

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\text{rot} \int \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}, t)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} - \text{grad} \int \frac{s(\boldsymbol{\xi}, t)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} \right).$$

В плоском случае компоненты скорости равны

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \int s(\boldsymbol{\xi}, t) \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_2} \int \Omega(\boldsymbol{\xi}, t) \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi} \right), \\ v_2(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \int s(\boldsymbol{\xi}, t) \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_1} \int \Omega(\boldsymbol{\xi}, t) \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Приведенные выше формулы дают разложение вектора скорости на сумму двух векторов, один из которых потенциальный, а другой — соленоидальный. То есть система (1) замкнута и полностью эквивалентна системе уравнений Навье–Стокса.

Вязкость газа рассчитывается по формуле Сазерленда $\mu = \frac{bT^{3/2}}{T+a}$, где a, b — константы, а также по степенному закону [23]

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0.75}.$$

Расчетные значения, выполненные по последней формуле, в интервале температур $T = 240-800$ К отличаются от экспериментальных значений для воздуха не более чем на 2–3%. Коэффициент теплопроводности пропорционален произведению $C_p \mu$, где C_p — теплоемкость при постоянном давлении [24].

Итак, коэффициенты вязкости и теплопроводности в воздухе рассчитываются по формулам $\mu = \mu_0(T/T_0)^{0.75}$, $\lambda = \lambda_0(T/T_0)^{0.75}$, где T_0 — температура в начальный момент времени; давление, температура и плотность связаны уравнением Менделеева–Клапейрона $p = \rho RT/M$ (M — молярная масса).

Система обезразмеривается с использованием характерной длины $l_0 = \nu_0/c_0$, характерного времени $t_0 = \nu_0/c_0^2$. Величина c — низкочастотная скорость звука, индекс «0» соответствует начальному состоянию.

1.2. Начальные условия

В начальный момент времени в вязком теплопроводном газе задана завихренность внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса R . Вне цилиндра

завихренность равна нулю, а все параметры газа однородны при $t = 0$. Требуется определить эволюцию параметров газа и найти частоту акустического излучения цилиндра при $t > 0$.

Задача решается в предположении, что начальная завихренность ω_0 постоянна по объему и мала ($\omega_0 \ll 1$). Для размерной величины начальной завихренности ω_d это условие таково:

$$\omega_d \ll \frac{c_0^2}{\nu_0}. \quad (3)$$

Итак, начальные условия имеют вид

$$\Omega_i(r, 0) = \begin{cases} \omega_0, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

$$\omega(r, 0) = s(r, 0) = h(r, 0) = 0.$$

Вследствие симметрии начальных данных решение не зависит от ϕ, z , а зависит только от r, t , где $\{r, \phi, z\}$ — цилиндрические координаты. Таким образом, мы имеем дело с плоским течением.

1.3. Решение системы

Разложим неизвестные функции в ряд по малому параметру $\varepsilon = \omega_0$:

$$\begin{aligned} \Omega_i(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon \Omega_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 \Omega_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_i^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \dots, \\ \omega(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^2 \omega^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3 \omega^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^4 \omega^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \dots, \\ s(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^2 s^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3 s^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^4 s^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \dots, \\ h(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^2 h^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3 h^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^4 h^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \dots, \\ v_i(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon v_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 v_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^3 v_i^{(3)}(\mathbf{x}, t) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим ряды (4) в систему (1) и уравнения (2). Ограничиваясь первыми членами разложения, получим систему линейных параболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также выражения для компонент скорости

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega_i^{(1)}}{\partial t} = \Delta \Omega_i^{(1)}, \\ \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial t} = s^{(1)}, \\ \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \Delta \omega^{(1)} + \frac{4}{3} \Delta s^{(1)} - \frac{1}{\gamma} \Delta h^{(1)} + \phi_2^{(1)}, \\ \frac{\partial h^{(1)}}{\partial t} = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \Delta h^{(1)} - (\gamma - 1) s^{(1)} + \phi_3^{(1)}. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \phi_2^{(1)} &= -\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i}, \quad \phi_3^{(1)} = \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) D_{ij} v^{(1)} D_{ij} v^{(1)}, \\ D_{ij} v^{(1)} &= \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Компоненты скорости равны

$$\begin{aligned} v_1^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int \Omega^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, t) \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi}, \\ v_2^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int \Omega^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, t) \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Система (5) состоит из трех неоднородных параболических уравнений для Ω_i (в нашем случае плоского течения от нуля отлична только одна компонента $\Omega_3 = \Omega$) и неоднородной параболической подсистемы с постоянными коэффициентами. Решение однородной системы с постоянными коэффициентами находится с помощью Фурье-преобразования.

Из первого уравнения системы (5) следует выражение для завихренности

$$\Omega^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \frac{0.25}{\pi t} \int \Omega^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, 0) \exp(-0.25|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2/t) d\boldsymbol{\xi}. \quad (6)$$

Формула (6) позволяет определить компоненты скорости, а следовательно, и члены $\phi_2^{(1)}, \phi_3^{(1)}$, входящие в правые части дифференциальных уравнений системы (5).

Характеристическое уравнение параболической подсистемы имеет вид [25]

$$f^3 + k^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{Pr} \right) f^2 + k^2 \left(\frac{4}{3} \frac{\gamma}{Pr} k^2 + 1 \right) f + \frac{k^4}{Pr} = 0. \quad (7)$$

Для воздуха $\gamma = 1.4, Pr \cong 0.7$.

При $0 \leq k \leq k_*$ корни характеристического уравнения (7) таковы:

$$f_1 = \sigma_1(k), \quad f_{2,3} = \sigma_2(k) \pm i\omega_r(k).$$

При $k > k_*$ все корни действительны. Решение, соответствующее $k > k_*$, быстро затухает со временем по сравнению с решением, соответствующим $0 \leq k \leq k_*$, и поэтому нами не учитывалось.

Таким образом, осциллирующее решение, представляющее интерес для моделирования турбулентных пульсаций, существует лишь в определенном интервале волновых чисел $0 \leq k \leq k_*$, $k_* \approx 1$ для воздуха. Дисперсионная кривая $\omega_r(k)$ представлена на рис. 1. Она имеет две ветви. Мы учитывали только ту ветвь, которая соответствует меньшим значениям коэффициентов затухания.

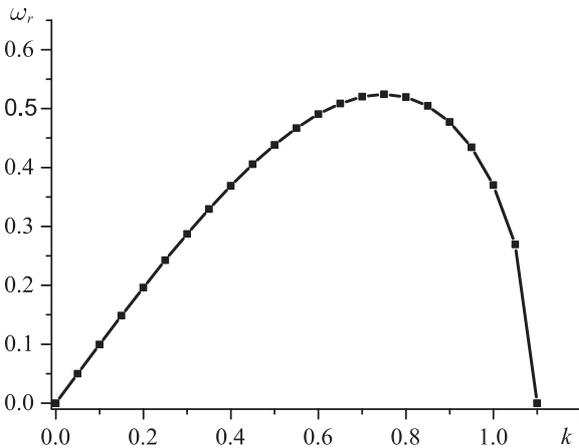


Рис. 1. Дисперсионная кривая для воздуха при нормальных условиях

Фурье-образ фундаментальной матрицы решений трех последних уравнений системы (2) имеет следу-

ющий вид [26, 27]:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\sigma_1(t-\tau)} \\ e^{\sigma_2(t-\tau)} \cos(\omega_r(t-\tau)) \\ e^{\sigma_2(t-\tau)} \sin(\omega_r(t-\tau)) \end{pmatrix}.$$

Здесь $c_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ — константы, определяемые из начальных условий.

Решение неоднородной системы записывается следующим образом:

$$\omega^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \frac{0.25}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{R^2} d\boldsymbol{\xi} \int_{R^2} d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) \times \{ a_{12}\phi_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, \tau) + a_{13}\phi_3^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \}, \quad (8)$$

$$a_{12} = q_1 \exp[\sigma_1(t-\tau)] + \exp[\sigma_2(t-\tau)] \times (-q_1 \cos(\omega_r(t-\tau)) + q_2 \sin(\omega_r(t-\tau))),$$

$$a_{13} = q_3 \exp[\sigma_1(t-\tau)] + \exp[\sigma_2(t-\tau)] \times (-q_3 \cos(\omega_r(t-\tau)) + q_4 \sin(\omega_r(t-\tau))).$$

Здесь $q_i(k), i = 1, 2, 3, 4$ — известные функции, \mathbf{k} — волновой вектор.

Аналогичным образом можно найти функции $\omega^{(n)}(\mathbf{x}, t), n > 1$.

Отклонение плотности от начального значения равно (в безразмерном виде)

$$e^{-w} - 1 \cong -\omega_0^2 \omega^{(1)}.$$

Величина $\omega^{(1)}$ не зависит от ω_0 . Таким образом, характер осцилляций плотности не зависит от ω_0 при $\omega_0 \ll 1$, т. е. при $\omega_d \ll \frac{c_0^2}{v_0}$ (см. (3)).

2. Основные результаты

По формуле (8) были выполнены расчеты величин $\omega^{(1)}(r, t)$ для цилиндров с начальным радиусом от 0.04 до 2.5 мм. При вычислении кратных интегралов использован метод Коробова [28]. Графики функции w в фиксированной точке пространства при различных значениях радиуса цилиндра R и различных значениях времени показаны на рис. 2–5.

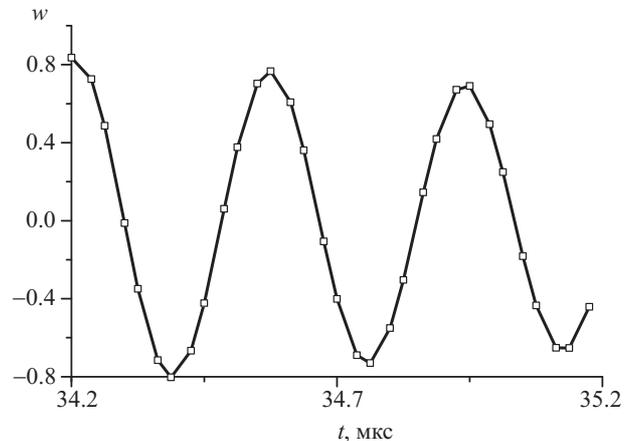


Рис. 2. Зависимость $w = -\ln \rho$ от времени при $R = 0.04$ мм

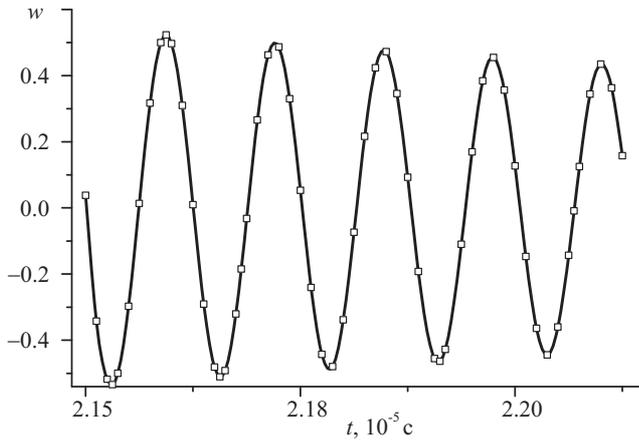


Рис. 3. Зависимость $w = -\ln \rho$ от времени при $R = 1.2$ мм

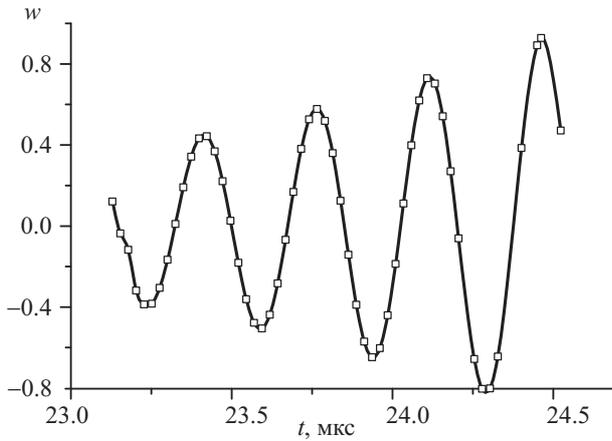


Рис. 4. Зависимость $w = -\ln \rho$ от времени при $R = 2.5$ мм, $23 \text{ мкс} < t < 24.5 \text{ мкс}$

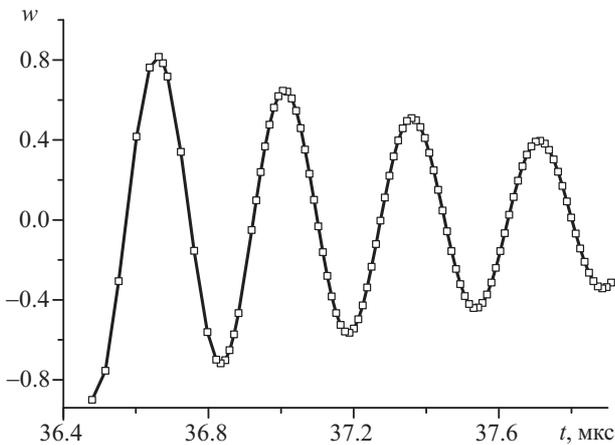


Рис. 5. Зависимость $w = -\ln \rho$ от времени при $R = 2.5$ мм, $36.5 \text{ мкс} < t < 38 \text{ мкс}$

Видно, что поведение плотности носит осциллирующий характер. Рис. 2, 3 иллюстрируют изменение частоты осцилляций при увеличении начального радиуса вихря. Амплитуда осцилляций сначала возрастает (рис. 4), достигает максимального значения, а затем убывает (рис. 5), стремясь к нулю. Осцилляции появляются в момент t , соответствующий времени распространения возмущения от первоначальной границы вихря до рассматриваемой точки. Осцилляции плотности наблюдаются во всем поле

течения, амплитуды их уменьшаются с удалением от цилиндра.

Высокочастотные колебания плотности модулированы более низкой частотой. Основная частота осцилляций не зависит от времени и положения точки на плоскости.

На рис. 6 показана зависимость основной частоты осцилляций от начального радиуса вихря. Как и следовало ожидать из физических соображений, основная частота акустического излучения уменьшается с увеличением начального радиуса вихря.

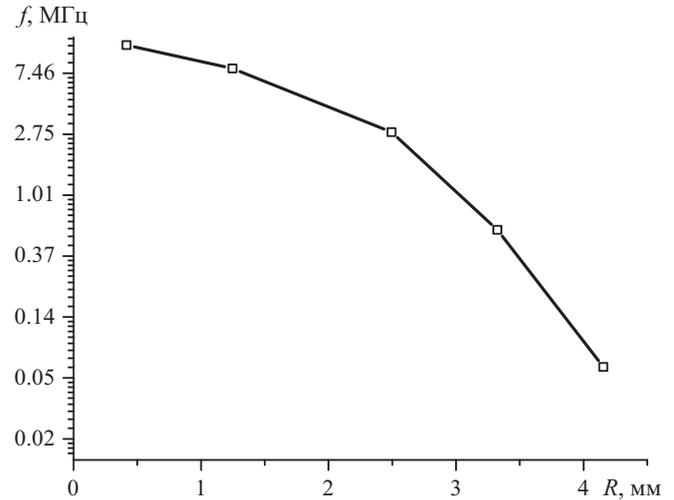


Рис. 6. Зависимость частоты акустического излучения от начального радиуса вихря (логарифмический масштаб)

Заключение

Впервые определена частота акустического излучения одиночного цилиндрического вихря в вязком теплопроводном газе при малой начальной завихренности.

Показано, что частота не зависит от начальной интенсивности завихренности, а зависит лишь от начального радиуса цилиндра.

В выполненных расчетах найден вид этой зависимости. Как и следовало ожидать, частота излучения уменьшается с ростом начального радиуса вихря.

Полученный результат отличается от того, что имеет место для идеальной жидкости, когда частота акустического излучения зависит от интенсивности завихренности [20, 21].

Аналогичный метод может быть использован при анализе спектра акустического излучения ансамбля вихрей.

Приложение

Полный вид системы (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} = & e^{w+0.75h} \Delta \Omega_i + 0.75 \varepsilon_{ijk} e^{w+0.75h} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_m} - \\ & - v_m \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_m} + \Omega_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} - s \Omega_i + \varepsilon_{ijk} e^{w+0.75h} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial x_j} + 1.5 \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \frac{\partial s}{\partial x_k} + \\ & + \frac{1}{\gamma} \varepsilon_{ijk} e^h \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_k} - \varepsilon_{ijk} e^h \left(\frac{1}{\gamma} + 0.5 s e^{w-0.25h} \right) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} + \\ & + e^{w+0.75h} \left(\frac{\partial w}{\partial x_m} + 0.75 \frac{\partial h}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_m} - \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_i} \right) + \end{aligned}$$

$$+ 0.75\varepsilon_{ijk}e^{w+0.75h} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial h}{\partial x_m} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} + 0.75 \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) + \\ + 0.75e^{w+0.75h} \frac{\partial h}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_m},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = s - v_j \frac{\partial w}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} e^h \Delta w + \frac{4}{3} e^{w+0.75h} \Delta s - \left(\frac{1}{\gamma} e^h + 0.5se^{w+0.75h} \right) \Delta q + \\ + 1.5e^{w+0.75h} e^{w+0.75h} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - v_m \frac{\partial s}{\partial x_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \\ + \frac{4}{3} e^{w+0.75h} \frac{\partial w}{\partial x_m} \frac{\partial s}{\partial x_m} + \left(\frac{e^h}{\gamma} - 0.5se^{w+0.75h} \right) \frac{\partial w}{\partial x_m} \frac{\partial h}{\partial x_m} + \\ + 1.5e^{w+0.75h} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} + 2e^{w+0.75h} \frac{\partial s}{\partial x_m} \frac{\partial h}{\partial x_m} - \\ - \left(\frac{e^h}{\gamma} + 0.375se^{w+0.75h} \right) \frac{\partial h}{\partial x_m} \frac{\partial h}{\partial x_m} + \\ + 1.125e^{w+0.75h} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - e^{w+0.75h} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_m} - \\ - 1.5e^{w+0.75h} \varepsilon_{imk} \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_m},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\gamma}{\text{Pr}} e^{w+0.75h} \Delta h - (\gamma-1)s - v_m \frac{\partial h}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \gamma (\gamma-1) e^{w-0.25h} s^2 + \\ + 0.5\gamma (\gamma-1) e^{w-0.25h} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \\ + 1.75 \frac{\gamma}{\text{Pr}} e^{w+0.75h} \frac{\partial h}{\partial x_m} \frac{\partial h}{\partial x_m}.$$

Список литературы

1. Lighthill M.J. // Proc. Roy. Soc. London. 1952. **211**, N 1107. P. 564.
2. Powell A. // J. Acoust. Soc. Amer. 1964. **36**. P. 177.
3. Inoue O. // Phys. Fluids. 2002. **14**, N 9. P. 3361.
4. Eldredge J.D. // J. Sound and Vibration. 2007. **301**. P. 74.
5. Луговцов Б.А. Некоторые проблемы математики и механики. М., 1970.
6. Johnson G.M. // AIAA J. 1971. **9**, N 4. P. 763.
7. Maxworthy T.J. // J. Fluid Mech. 1974. **64**. P. 22.
8. Maxworthy T.J. // J. Fluid Mech. 1977. **81**. P. 465.
9. Арнольд В.И. // Докл. АН СССР. 1965. **162**, № 5. С. 975.
10. Арнольд В.И. // Прикл. Матем. Мех. 1965. **29**, № 5. С. 846.
11. Holm D., Marsden J., Ratiu T., Weinstein A. // Phys. Rep. 1985. **123**. P. 1.
12. Menshov I., Nakamura Y. // Phys. Fluids. 2005. **17**, N 3. P. 034102.
13. Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А. // Акуст. журн. 1983. **29**. С. 192.
14. Chorin A., Marsden J., Smale S. // Turbulence Seminar. Lecture Notes in Mathematics. 1977. **615**.
15. Barenblatt G.I., Chorin A.J. // Meccanica. 1998. **33**, N 5. P. 445.
16. Deardorff J.W. // J. Fluid Mech. 1970. **41**. P. 453.
17. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. // J. Fluid Mech. 1997. **341**. P. 19.
18. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. // Успехи физ. наук. 2000. **170**, № 7. С. 713 (Kop'ev V.F., Chernyshev S.A. // Phys. Usp. 2000. **43**. P. 663).
19. Shugaev F.V., Shtemenko L.S. et al. // Proc. SPIE. 2014. **9242**. P. 924201-12.
20. Thomson W. // Phil. Mag. 1880. **10**. P. 155.
21. Яковлев П.Г. // Акуст. журн. 2012. **58**, № 4. С. 563.
22. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1938.
23. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Т. 2. / Под общ. ред. Л. Хоуарта. М., 1955.
24. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. М., 1977.
25. Truesdell C. // J. Ration. Mech. and Analysis. 1953. **2**. P. 643.
26. Петрова Т.А., Шугаев Ф.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. N 1. С. 43 (Petrova T.A., Shugaev F.V. // Moscow University Phys. Bull. 2012. **67**, N 1. P. 43).
27. Shugaev F.V., Terentiev E.N. et al. // Proc. SPIE. 2012. **8535**. 85350G.
28. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.

Acoustic radiation frequency of a cylindrical vortex

T. A. Petrova^a, F. V. Shugaev^b

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^atatyana.a.petrova@gmail.com, ^bshugaev@phys.msu.ru.

Acoustic radiation frequency of a cylindrical vortex in the air has been calculated. Calculations are based on the Navier–Stokes equations using the expansion of the functions in powers of small parameter characterizing the initial vorticity. Non-uniform system of parabolic differential equations with constant coefficients is obtained. The initial radius of the cylinder varies over a wide range. The problem is considered for the case of plane flow. In contrast to previously results, it is shown that at small values of vorticity, the frequency of the acoustic radiation depends only on the geometric size (the initial radius of the vortex).

Keywords: Navier–Stokes equations, unsteady flow, density oscillations of cylindrical vortex, frequency of acoustic radiation.

PACS: 47.10.ad.

Received 18 November 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2015).

Сведения об авторах

1. Петрова Татьяна Андреевна — аспирант, тел.: (495) 939-11-00, e-mail: tatyana.a.petrova@gmail.com.
2. Шугаев Федор Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-11-00, e-mail: shugaev@phys.msu.ru.