ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

Оптическая теорема для локальных источников в теории дифракции

Ю. А. Ерёмин[1,a], А. Г. Свешников[2,b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
[1] *факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической физики;*
[2] *физический факультет, кафедра математики.*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1.
E-mail: [a] *eremin@cs.msu.ru,* [b] *sveshnikov@phys.msu.ru*

Статья поступила 20.02.2015, подписана в печать 29.04.2015.

Получено обобщение оптической теоремы на случай возбуждения локальных структур точечными источниками. Показано, что такой существенный параметр, как коэффициент Перселля, может быть представлен в аналитическом виде. Проведено обобщение полученных результатов на случай наличия границы раздела двух полупространств. Полученные результаты имеют первостепенное значение для проведения осреднения коэффициента усиления флюоресценции и эффективности оптической антенны по положению источника возбуждения.

Ключевые слова: оптическая теорема, локальный источник, коэффициент Перселля.
УДК: 535.36; 535.42. PACS: 42.25.–p; 42.25.Fx.

Введение

Оптическая теорема (ОТ) представляет собой соотношение, связывающее полное сечение рассеяния, сечение поглощения и так называемое сечение экстинкции [1]. Этот термин впервые появился в [2]. Сечение экстинкции описывает взаимодействие падающего внешнего излучения, например плоской волны, с рассеянным полем в направлении прошедшей волны. Таким образом, ОТ может быть записана в следующем виде:

$$C_{\text{ext}} = C_{\text{sc}} + C_{\text{abs}}, \tag{1}$$

где C_{sc}, C_{abs} — сечения рассеяния и поглощения соответственно. ОТ используется в многочисленных приложениях теории дифракции волн [3–4]. Известны обобщения ОТ на случай дифракции плоской волны на локальном теле при наличии полупространства [5–6]. В вычислительной дифракции она применяется для оценки корректности компьютерного модуля посредством вычисления невязки соотношения (1) [7–8]. В последнее время проявился интерес у исследователей к анализу процессов флюоресценции в присутствии плазмонных структур. Эти структуры — плазмонные частицы — позволяют существенно повысить интенсивность оптического излучения [9–11]. В этом случае оказывается необходимым проводить анализ характеристик рассеяния и поглощения плазмонных структур при возбуждении локальным источником (флюоресцирующей молекулой), располагающимся в непосредственной близости от подобной структуры. При этом обычно проводится осреднение коэффициента усиления флюоресценции по расположению локального источника, что требует проведения многократных вычислений сечения рассеяния и поглощения. Другой областью, в которой рассматривается возбуждение плазмонной структуры точечным источником, является область конструирования оптических антенн [12–14]. При оптимизации эффективности оптической антенны [14] приходится многократно решать задачу возбуждения кластера плазмонных частиц точечным эмитером, меняя его расположение. Вместе с тем потребность многократного вычисления как коэффициента усиления флюоресценции, так и эффективности оптической антенны приводит к необходимости вычисления сечения поглощения, что весьма затруднительно в режиме плазмонного резонанса, когда относительная интенсивность поля вблизи частиц возрастает в $10^8 - 10^{10}$ раз [15–16].

В настоящей работе рассмотрена задача дифракции точечного источника на локальном теле, расположенном как в свободном пространстве R^3, так и в присутствии полупространства. Показано, что имеет место соотношение, аналогичное (1), которое позволяет вычислять коэффициент усиления флюоресценции и эффективность оптической антенны без вычисления сечения поглощения, что существенно снижает вычислительные затраты.

1. Оптическая теорема для локальных источников в свободном пространстве

Рассмотрим математическую постановку задачи дифракции поля точечного источника, расположенного в точке $M_0 \in R^3$, на локальном проницаемом теле D_i с гладкой поверхностью $S \in C^{(2,\alpha)}$. Пусть математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\Delta U_0 + k_0^2 U_0 = -\delta(M, M_0), \quad M_0 \in D_0 = R^3/\overline{D}_i;\\
&\Delta U_i + k_i^2 U_i = 0, \quad M \in D_i;\\
&[U(P)] = [\partial U(P)/\partial n] = 0, \quad P \in S;\\
&\frac{\partial U_0}{\partial r} + jk_0 U_0 = o(1/r), \quad r = |M| \to \infty.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь [.] означает скачок полей при переходе через S, n — нормаль к поверхности S, $\operatorname{Im} k_i^2 < 0$, что соответствует временнóй зависимости $\exp\{j\omega t\}$. Известно, что задача (1) имеет единственное решение [17].

Выберем начало координат в точке источника M_0 и окружим рассеиватель сферой радиуса R с центром в начале координат, содержащей D_i внутри себя. Будем обозначать D_R область пространства, ограниченную сферой Σ_R и поверхностью S. Применим в D_R вторую формулу Грина к U_0 и U_0^*, имеем

$$\int\limits_{D_R}\left(\Delta U_0 \cdot U_0^* - \Delta U_0^* \cdot U_0\right) d\tau = \int\limits_{\Sigma_R+S}\left\{\frac{\partial U_0}{\partial n}U_0^* - \frac{\partial U_0^*}{\partial n}U_0\right\} d\sigma. \tag{3}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ — нормальная производная к соответствующей поверхности, направленная вовне из области D_R. Левая часть (3) преобразуется в силу (2) как

$$\int\limits_{D_R}\left(\Delta U_0 \cdot U_0^* - \Delta U_0^* \cdot U_0\right) d\tau = 2j\,\mathrm{Im}\,U_0(M_0). \tag{4}$$

Правая часть (3) может быть записана в виде

$$2j\,\mathrm{Im}\int\limits_{\Sigma_R}\frac{\partial U_0}{\partial n}U_0^*\,d\sigma - 2j\,\mathrm{Im}\int\limits_{S}\frac{\partial U_0}{\partial n^+}U_0^*\,d\sigma,$$

где $\frac{\partial}{\partial n^+}$ — нормальная производная по внешней нормали к D_i. Рассмотрим первый интеграл. В силу условий излучения получим

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R}\frac{\partial U_0}{\partial r}U_0^*\,d\sigma = -jk_0\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R}|U_0|^2 d\sigma_r.$$

Учитывая, что (3) справедливо для любого $R\to\infty$, используя определение диаграммы направленности поля U_0 [17],

$$U_0(M) = \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r}F(\vartheta,\phi) + o(1/r), \quad r\to\infty,$$

получаем

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R}|U_0|^2 d\sigma_r = \frac{1}{k_0^2}\int\limits_{\Omega}|F(\vartheta,\phi)|^2\,d\omega. \tag{5}$$

Здесь Ω — единичная сфера. Таким образом,

$$\mathrm{Im}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R}\frac{\partial U_0}{\partial n}U_0^*\,d\sigma = -\frac{1}{k_0}\int\limits_{\Omega}|F|^2\,d\omega. \tag{6}$$

Применим теперь 2-ю формулу Грина к U_i и U_i^* внутри D_i:

$$\int\limits_{D_i}\left(\Delta U_i \cdot U_i^* - \Delta U_i^* \cdot U_i\right) d\tau = \int\limits_{S}\left\{\frac{\partial U_i}{\partial n^+}U_i^* - \frac{\partial U_i^*}{\partial n^+}U_i\right\} d\sigma.$$

Преобразуя последнее соотношение, используя условия сопряжения для полей на S, имеем

$$\mathrm{Im}\,k_i^2\int\limits_{D_i}|U_i|^2\,d\tau = \mathrm{Im}\int\limits_{S}\frac{\partial U_0}{\partial n}U_0^*\,d\sigma. \tag{7}$$

Учитывая полученные соотношения (4)–(7), получаем

$$\mathrm{Im}\,U_0(M_0) = -\frac{1}{k_0}\int\limits_{\Omega}|F|^2\,d\omega - |\,\mathrm{Im}\,k_i^2|\int\limits_{D_i}|U_i|^2 d\tau. \tag{8}$$

Распишем подробно левую часть, учитывая, что $U_0(M) = U_0^s(M) + \frac{e^{-jk_0 R_{MM_0}}}{4\pi R_{MM_0}}$. Здесь U_0^s — рассеянное поле. Тогда

$$\lim_{M\to M_0}U_0(M) = U_0^s(M_0) - \frac{k_0}{4\pi}.$$

Окончательно ОТ для локального источника внешнего возбуждения принимает вид, совершенно аналогичный (1):

$$\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{k_0}\,\mathrm{Im}\,U_0^s(M_0) = \frac{1}{k_0^2}\int\limits_{\Omega}|F|^2 d\omega + \frac{|\,\mathrm{Im}\,k_i^2|}{k_0}\int\limits_{D_i}|U_i|^2\,d\tau. \tag{9}$$

Как и ранее, $U_0^s(M_0)$ — не что иное, как член, описывающий взаимодействие рассеянного поля с внешним излучением локального источника.

Следствие. В случае отсутствия локальной неоднородности D_i полное сечение рассеяния точечного источника $\frac{e^{-jk_0 R_{MM_0}}}{4\pi R_{MM_0}}$ равно

$$\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{k_0^2}\int\limits_{\Omega}|F^0|^2\,d\omega.$$

При исследовании влияния плазмонных структур на флюоресцирующую молекулу принято оценивать коэффициент Перселля, который имеет вид [14]

$$F_p = \frac{\sigma_{\mathrm{sc}} + \sigma_{\mathrm{abs}}}{\sigma_{\mathrm{sc}}^0},$$

где σ_{sc}^0 — сечение рассеяния источника при отсутствии неоднородности. Тогда в силу полученных результатов получим

$$F_p = 1 - \frac{4\pi}{k_0^2}\,\mathrm{Im}\,U_0^s(M_0). \tag{10}$$

Следовательно, отпадает необходимость вычисления сечений рассеяния σ_{sc} и поглощения σ_{abs}, а коэффициент Перселля может быть вычислен, используя значение рассеянного поля лишь в одной единственной точке — точке расположения локального источника излучения. Заметим, что подобное обстоятельство особенно актуально, так как обычно проводится осреднение коэффициента Перселля по многочисленным положениям точечного источника.

2. Оптическая теорема для локальных источников в присутствии прозрачного полупространства

Рассмотрим математическую постановку задачи дифракции поля точечного источника, расположенного в точке M_0, на локальном проницаемом теле D_i с гладкой поверхностью $S\in C^{(2,\alpha)}$. Пусть все пространство $\Re^3$ разделено плоскостью Ξ $(z=0)$ на два полупространства D_l с волновыми числами k_l, $l=0,1$. Будем полагать, что источник располагается в верхнем полупространстве D_0, $(z>0)$ на оси Oz в точке $(0,0,z_0)$. Тогда математическая постановка задачи может быть записана как

$$\begin{aligned}
&\Delta U_0 + k_0^2 U_0 = -\delta(M,M_0), && M_0\in D_0;\\
&\Delta U_i + k_i^2 U_i = 0, && M\in D_i;\\
&\Delta U_1 + k_1^2 U_1 = 0, && M\in D_1;
\end{aligned}$$

$$[U(P)] = \left[\frac{\partial U(P)}{\partial n}\right] = 0, \quad P \in S;$$
$$[U(Q)] = \left[\frac{\partial U(Q)}{\partial z}\right] = 0, \quad Q \in \Xi; \tag{11}$$
$$\frac{\partial U_l}{\partial r} + jk_l U_l = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad l = 0, 1, \ r = |M| \to \infty.$$

Будем полагать, что $\operatorname{Im} k_i^2 < 0$, а $\operatorname{Im} k_l^2 = 0$, $l = 0, 1$. Тогда задача (11) имеет единственное решение.

В данном случае начало координат выбрано на плоскости Ξ. Будем проводить все построения, аналогичные предшествующему разделу, обращая внимание лишь на отличительные моменты. Выберем сферу Σ_R с центром в начале координат так, чтобы она заключала источник и рассеиватель D_i внутри себя. Обозначим круг, который сфера вырезает на плоскости Ξ, как C_R. Будем обозначать через D_R область пространства внутри сферы Σ_R. Она состоит из двух полушаров $D_R = D_R^+ \cup D_R^-$, каждый из которых ограничен поверхностями $\Sigma_R^+ \cup C_R$ и $\Sigma_R^- \cup C_R$. Применим в D_R^+ вторую формулу Грина к U_0 и U_0^*, получим

$$2j \operatorname{Im} U_0(M_0) =$$
$$= 2j \operatorname{Im}\left\{\int\limits_{\Sigma_R^+} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* \, d\sigma - \int\limits_S \frac{\partial U_0}{\partial n^+} U_0^* \, d\sigma - \int\limits_{C_R} \frac{\partial U_0}{\partial z} U_0^* \, d\sigma\right\}. \tag{12}$$

Применяя вторую формулу Грина к U_1 и U_1^* в D_R^-, имеем

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^-} \frac{\partial U_1}{\partial r} U_1^* \, d\sigma + \operatorname{Im} \int\limits_{C_R} \frac{\partial U_1}{\partial z} U_1^* \, d\sigma = 0. \tag{13}$$

Аналогично предыдущему получим для интегралов по удаленным полусферам $\Sigma_R^\pm$ следующие соотношения:

$$\operatorname{Im} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Sigma_R^\pm} \frac{\partial U_l}{\partial n} U_l^* \, d\sigma = -\frac{1}{k_l} \int\limits_{\Omega^\pm} |F_l|^2 \, d\omega. \tag{14}$$

Здесь $F_l(\vartheta, \phi)$ — диаграммы рассеяния полей U_l, $l = 0, 1$ на единичных полусферах $\Omega^\pm$. Учитывая (13), (14) и (7), (8), а также условия сопряжения для полей на C_R, получим

$$\lim_{M\to M_0} \operatorname{Im} U_0(M) =$$
$$= -\frac{1}{k_0} \int\limits_{\Omega^+} |F_0|^2 \, d\omega - \left|\operatorname{Im} k_i^2\right| \int\limits_{D_i} |U_i|^2 \, d\tau - \frac{1}{k_1} \int\limits_{\Omega^-} |F_1|^2 \, d\omega. \tag{15}$$

Здесь, казалось бы, можно поступить аналогично предыдущему, однако в случае наличия полупространства или слоистой среды решение задачи дифракции строится иначе [18]. А именно полное поле разбивается на поле источника, удовлетворяющего условиям сопряжения на плоскости Ξ, и рассеянное поле, которое также должно удовлетворять этим условиям. Следовательно, в данном случае поле в верхней полуплоскости $U_0(M) = U_0^s(M) + U_0^0(M)$, где U_0^0 — то самое поле источника, удовлетворяющего условиям сопряжения на плоскости Ξ. Представление для него имеет вид интеграла Зоммерфельда [19]:

$$U_0^0(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r) \nu(\lambda, z, z_0) \lambda \, d\lambda, \tag{16}$$

где $J_0(.)$ — функция Бесселя, $r^2 = \rho^2 + (z - z_0)^2$, а ν — спектральная функция, обеспечивающая выполнение условий сопряжения при $z = 0$ [20]. Она принимает следующий вид:

$$\nu(\lambda, z, z_0) = \begin{cases} \dfrac{\exp\{-\eta_0|z - z_0|\}}{\eta_0} + \\ \quad + \dfrac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \dfrac{\exp\{-\eta_0(z + z_0)\}}{\eta_0}, & z \geqslant 0, \\ \dfrac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_1} \dfrac{\exp\{\eta_1 z - \eta_0 z_0\}}{\eta_0}, & z \leqslant 0, \end{cases}$$
$$z_0 > 0. \tag{17}$$

Здесь $\eta_l^2 = \lambda^2 - k_l^2$, $l = 0, 1$. Заметим, что первое слагаемое в (17) соответствует фундаментальному решению уравнения Гельмгольца в свободном пространстве. Тогда

$$\lim_{M\to M_0} \operatorname{Im} U_0(M) = \operatorname{Im} U_0^s(M_0) - \frac{k_0}{4\pi} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \lim_{M\to M_0} \operatorname{Im} \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r) \widetilde{\nu}(\lambda, z, z_0) \lambda \, d\lambda, \tag{18}$$

где $\widetilde{\nu}$ — второе слагаемое в первой строке (17). Рассмотрим последний интеграл в (18) подробнее:

$$\lim_{M\to M_0} \operatorname{Im} \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r) \widetilde{\nu}(\lambda, z, z_0) \lambda \, d\lambda =$$
$$= \operatorname{Im} \int\limits_0^\infty \widetilde{\nu}(\lambda, z_0, z_0) \lambda \, d\lambda =$$
$$= \operatorname{Im} \int\limits_0^\infty \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\exp\{-2z_0\eta_0\}}{\eta_0} \lambda \, d\lambda. \tag{19}$$

При условии, что $k_1^2 > k_0^2$ (нижнее пространство более плотное), получаем

$$\operatorname{Im} \int\limits_0^\infty \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\exp\{-2z_0\eta_0\}}{\eta_0} \lambda \, d\lambda =$$
$$= \operatorname{Im} \int\limits_0^{k_1} \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\exp\{-2z_0\eta_0\}}{\eta_0} \lambda \, d\lambda.$$

Итак, оптическая теорема для локального источника принимает вид

$$\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi k_0} \operatorname{Im} \int\limits_0^{k_1} \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\exp\{-2z_0\eta_0\}}{\eta_0} \lambda \, d\lambda -$$
$$- \frac{1}{k_0} \operatorname{Im} U_0^s(M_0) - =$$

$$= \frac{1}{k_0^2} \int\limits_{\Omega^+} |F_0|^2 \, d\omega + \frac{1}{k_1 k_0} \int\limits_{\Omega^-} |F_1|^2 \, d\omega + \frac{|\operatorname{Im} k_i^2|}{k_0} \int\limits_{D_i} |U_i|^2 \, d\tau. \quad (20)$$

В данном случае при отсутствии неоднородности D_i для точечного источника получаем

$$\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi k_0} \operatorname{Im} \int\limits_0^{k_1} \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\exp\{-2z_0\eta_0\}}{\eta_0} \lambda \, d\lambda = \frac{1}{k_0^2} \int\limits_{\Omega^+} |F_0^0|^2 \, d\omega + \frac{1}{k_1 k_0} \int\limits_{\Omega^-} |F_1^0|^2 \, d\omega. \quad (21)$$

Тогда в силу полученных результатов имеем для коэффициента Перселля следующее выражение:

$$F_p = 1 - \frac{4\pi}{k_0} \operatorname{Im} U_0^s(M_0) \times \left(1 - \frac{1}{k_0} \operatorname{Im} \int\limits_0^{k_1} \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\exp\{-2z_0\eta_0\}}{\eta_0} \lambda \, d\lambda \right)^{-1}. \quad (22)$$

Как видно из последнего соотношения, при $k_1 \to k_0$ формула (22) автоматически переходит в полученное ранее соотношение (10), так как $\eta_1 \to \eta_0$.

Заключение

В настоящей работе получено обобщение оптической теоремы на случай возбуждения локальных структур точечным источником, в том числе и в случае, когда все пространство разделено на два полупространства с различными характеристиками. Показано, что полученное соотношение позволяет рассчитывать сумму сечения рассеяния и поглощения в замкнутой аналитической форме, вычисляя лишь рассеянное поле в одной единственной точке. Полученные результаты имеют первостепенное значение при рассмотрении возбуждения плазмонных структур, так как затраты на выполнение процедуры осреднения коэффициента усиления флюоресценции и эффективность оптической антенны по положению источника существенно снижаются.

Список литературы

1. *Newton R.G.* // J. Phys. 1976. **44**, N 7. P. 639.
2. *Jackson J.D.* Classical electrodynamics. N. Y., 1962.
3. *Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A.* Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles. Cambridge, 2002.
4. *Mishchenko M.I.* // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2006. **101**. P. 404.
5. *Ерёмин Ю.А.* // Дифференц. уравнения. 2007. **43**, № 9. С. 1168 (*Eremin Yu.A.* // Differ. Equations. 2007. **43**, N 9. P. 1194).
6. *Carney P.S., Schotland J.C., Wolf E.* // Phys. Rev. E. 2004. **70**. 036611.
7. *Mackowski D.W.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. **11**. P. 2851.
8. *Фарафонов В.Г., Ильин В.Б.* Рассеяние света неоднородными несферическими частицами. СПб., 2009.
9. *Anger P., Bharadwaj P., Novotny L.* // Phys. Rev. Lett. 2006. **96**. 113002.
10. *Liaw J.-W., Tsai H.-Y., Huang C.-H.* // Plasmonics. 2012. **7**. P. 543.
11. *Liaw J.-W., Jiang C.-Y.* // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2013. **114**. P. 56.
12. *Novotny L., Van de Hulst N.* // Nature Photon. 2011. **5**, N 1. P. 83.
13. *Tang, L., Kocabas S.E., Latif S., Okyay A.K.* et al. // Nature Photon. 2008. **2**, N 4. P. 226.
14. *Novotny L., Hecht B.* Principles of nano-optics. Cambridge, 2006.
15. *Liaw J.-W., Chen C.-S., Chen J.-H.* // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2010. **111**, N 8. P. 454.
16. *Eremin Yu.A., Grishina N.V., Eremina E., Wriedt T.* // J. Modern Opt. 2013. **60**, N 7. P. 529.
17. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987 (*Colton D., Kress R.* Integral Equation Methods in Scattering Theory. N. Y., 1983).
18. *Ерёмин Ю.А., Свешников А.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 6. С. 8 (*Eremin Yu.A., Sveshnikov A.G.* // Moscow University Phys. Bull. 2013. **68**, N 6. P. 443).
19. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М., 2008.
20. *Барышев А.В., Ерёмин Ю.А.* // Матем. моделирование. 2010. **22**, № 5. С. 122.

An optical theorem for local sources in diffraction theory

Yu. A. Eremin[1,a], **A. G. Sveshnikov**[2,b]

[1] *Department of Mathematical Physics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics;*
[2] *Department of Mathematics, Faculty of Physics,*
Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *eremin@cs.msu.ru,* [b] *sveshnikov@phys.msu.ru.*

The optical theorem is generalized for the case of excitation of local structures by point sources. It is shown that an essential parameter, the Purcell factor, can be represented in analytical form. The results are generalized for the case of an interface between two semi-spaces. These results are of paramount importance for averaging of the coefficient of fluorescence amplification and the efficiency of an optical antenna by the position of an excitation source.

Keywords: optical theorem, local source, Purcell factor.
PACS: 42.25.–p; 42.25.Fx.
Received 20 February 2015.
English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2015).

Сведения об авторах

1. Ерёмин Юрий Александрович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-17-76, e-mail: eremin@cs.msu.ru.
2. Свешников Алексей Георгиевич — доктор физ. мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: sveshnikov@phys.msu.ru.