К теории параметрической генерации света

А. В. Белинский[a], Т. М. Тарасова[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра компьютерных методов физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] belinsky@inbox.ru, [b] ttarasova7@gmail.com

Статья поступила 30.12.2014, подписана в печать 5.04.2015.

Развита теория параметрической генерации света в резонаторе с учетом потерь. Получены приближенные аналитические решения для двух- и трехрезонаторных схем генерации и выявлены критерии их адекватности. Правильность результатов подтверждена компьютерным моделированием.

Ключевые слова: лазерная физика, нелинейная оптика, параметрическая генерация света, оптический резонатор.
УДК: 535.015. PACS: 45.65.Yj.

Введение

Появление лазеров в самом начале 60-х годов прошлого века дало мощный импульс развитию нелинейной оптики, что привело в свою очередь к новым достижениям в лазерной технике. Были созданы высокоэффективные генераторы оптических гармоник и параметрические источники света с возможностью плавного изменения генерируемой частоты излучения (см., например, пионерскую работу С. А. Ахманова, Р. В. Хохлова [1] и широко известную монографию [2]). Параметрические источники света применяются и для приготовления неклассических состояний света, обладающих необычными свойствами. С их помощью генерируются коррелированные пары фотонов, используемые в экспериментах по изучению квантовой природы света, особенно ярко проявляющиеся в квантовых парадоксах Белла, Зенона, квантовой интерференции и других (см., например, [3–8]). Кроме того, свет, параметрически генерированный в резонаторе, за счет жесткой корреляции сигнальных и холостых фотонов является идеальным осветителем в сверхточных балансных оптических измерениях, поскольку уровень шума разностного фототока оказывается ниже дробового в диапазоне полосы частот ниже обратного времени удержания фотона резонатором [9–11].

Резонатор используется по следующей причине. Эффективность параметрического преобразования накачки составляет $\sim 10^{-7} \div 10^{-8}$, т. е. лишь один из десяти или более миллионов фотонов накачки распадается на два: сигнальный и холостой. Увеличить полезную длину нелинейного взаимодействия позволяет резонатор: за счет многократного обхода нелинейного кристалла увеличивается длина эффективного взаимодействия.

Точного аналитического решения задачи описания полей в резонаторе не существует в силу сложности исходной системы дифференциальных уравнений. Простейшее приближение состоит в пренебрежении истощением накачки. Однако это слишком грубое приближение. Более точное решение было предложено в [2]. Там учтено истощение накачки, но не принято во внимание увеличение сигнала. Такое положение дел не может вызвать удовлетворения, поскольку ведет к формальному нарушению закона сохранения энергии. Несмотря на это, рассматриваемое приближение до сих пор широко используется в научных работах вплоть до последнего времени (см., например, [12–16]). Поэтому в недавней работе [17] предпринята попытка разработки более точного аналитического решения. При этом предполагалось, что амплитуда накачки и генерируемых пучков света изменяется линейно по длине нелинейного кристалла. Это позволило получить более точное решение и избежать нарушения закона сохранения. Однако в [17] не учитывались потери и не было выработано строгого критерия адекватности предложенных приближений. В настоящей работе мы восполнили эти пробелы.

1. Аналитическая модель параметрического генератора

Для реализации параметрического преобразования света в резонаторе должны присутствовать по крайней мере три волны: сигнальная (s), холостая (i) и накачки (p). Их частоты связаны соотношением

$$\omega_s + \omega_i = \omega_p. \tag{1}$$

Не каждая из этих волн, вообще говоря, должна резонировать. Например, в так называемой двухрезонаторной схеме накачка проходит сквозь зеркала, практически не отражаясь [2]. Впрочем, бывают и трехрезонаторные схемы, в которых все три волны резонируют (см., например, [18, 19]).

Допустим в общем случае, что медленно меняющиеся комплексные амплитуды $A = A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots$ резонирующих волн и соответсвующие амплитуды $A' = A'_1,\ A'_2,\ A'_3,\ \ldots$ волн, полностью пропускаемых зеркалами (нерезонирующих), описываются уравнениями вида

$$\left(\frac{1}{U_n}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_n\right) A_n = f_n(A, A'), \tag{2a}$$

$$\left(\frac{1}{U_m}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_m\right) A'_m = f'_m(A, A'), \tag{2b}$$

где U — групповые скорости, α — коэффициенты потерь, f_n и f'_m — нелинейные функции амплитуд.

В случае коллинеарного синхронного параметрического взаимодействия (при выполнении условия фазового синхронизма) уравнения (2) приобретают более конкретный вид [2, с. 468–469]:

$$\left(\frac{1}{U_s}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}+\alpha_s'\right)A_s=\beta_s' A_p A_i^*, \tag{3a}$$

$$\left(\frac{1}{U_i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}+\alpha_i'\right)A_i=\beta_i' A_p A_s^*, \tag{3b}$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial z}=-\beta_p' A_s A_i, \tag{3c}$$

где $\beta_s', \beta_i', \beta_p'$ — соответствующие коэффициенты нелинейной связи.

Эти уравнения следует решать с учетом отражения пучков на зеркалах резонатора. Поэтому рассмотрим конкретные резонаторные схемы.

2. Двухрезонаторная схема

Двухрезонаторная схема параметрического генератора представляет собой нелинейный кристалл, помещенный в оптический резонатор, состоящий из трех зеркал (см. рис. 1, *а*). Поскольку предполагается, что волна накачки не резонирует, зеркала резонатора должны быть прозрачны для частоты ω_p, в отличие от сигнальной и холостой волн, которые резонируют и отражаются зеркалами М1, М2, М3. Зеркала М1, М2 считаем идеальными (с единичным коэффициентом отражения), а М3 — частично пропускающим, чтобы генерируемое параметрическое излучение могло выйти наружу, таким образом, комлексные медленно меняющиеся амплитуды падающей и отраженной плоских волн связаны соотношением

$$A_{s,i}(0,t)=r_{s,i}A_{s,i}(L,t), \tag{4}$$

где L — длина обхода резонатора, $r_{s,i}$ — коэффициенты отражения резонирующих волн.

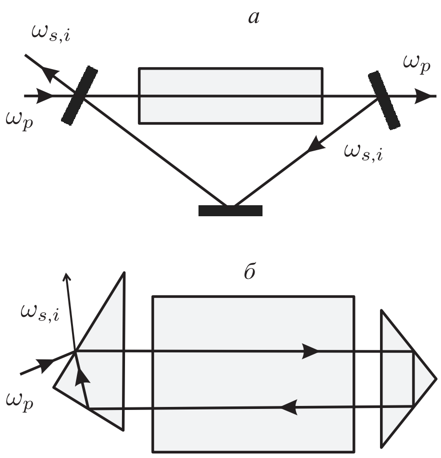

Рис. 1. а — Двухрезонаторная схема ПГС. Все три волны (накачка p, сигнальная s, холостая i) распространяются в нелинейной среде (заштрихованный прямоугольник), причем накачка проходит зеркала без потерь, а сигнальная и холостая волны резонируют. Для них M_1, M_2 — глухие зеркала, а M_3 — частично пропускающее. *б* — Трехрезонаторная схема ПГС. Все три волны взаимодействуют в нелинейном кристалле и все три резонируют

Решение системы уравнений (3) с учетом (4) — сложная задача, не поддающаяся точному аналитическому решению. Однако ее можно упростить, сделав следующие предположения.

1. Амплитуды волн мало изменяются за время порядка времени обхода волнами резонатора. Значит, можно пренебречь эффектами запаздывания.

2. Амплитуды волн A_s, A_i, A_p изменяются линейно по продольной координате z внутри активной среды, а вне активной среды не изменяются вообще. Это предположение возникло потому, что эффективность параметрического взаимодействия небольшая, и изменение амплитуд по длине кристалла в первом порядке теории возмущений можно представить как линейное.

Адекватность наших допущений можно проверить с помощью компьютерного моделирования (см. раздел 4). При малых значениях коэффициентов связи β_s', β_i', β_p' действительно зависимость амплитуд от координаты приближается к линейной.

Итак, амплитуды сигнальной и холостой волн внутри кристалла длиной L_{nl} будут изменяться следующим образом:

$$A_{s,i}(z,t)=A_{s,i}(0,t)+\left[A_{s,i}\left(L_{\text{nl}},t+T_{s,l}^{\text{nl}}\right)-A_{s,i}(0,t)\right]\frac{z}{L_{\text{nl}}}\approx$$

$$\approx A_{s,i}(0,t)+\left[A_{s,i}(L_{\text{nl}},t)-A_{s,i}(0,t)\right]\frac{z}{L_{\text{nl}}}, \tag{5}$$

где $0\leqslant z\leqslant L_{\text{nl}}$, $T_{s,l}^{\text{nl}}$ — время прохода нелинейного кристалла соответствующей волной, $A_{s,i}(0,t)$ — значение амплитуды на входе в активную среду, $A_{s,i}(L_{\text{nl}},t+T_{s,l}^{\text{nl}})$ — ее значение на выходе. В приближенной части (5) учтено первое предположение об эффектах запаздывания. Амплитуда на выходе кристалла с учетом второго предположения и (4) может быть выражена через амплитуду на входе:

$$A_{s,i}(L_{\text{nl}},t)-A_{s,i}(0,t)=\left(\frac{1}{r_{s,i}}-1\right)A_{s,i}(0,t)=$$

$$=\frac{1-r_{s,i}}{r_{s,i}}A_{s,i}(0,t). \tag{6}$$

Введем нормированную продольную координату $\zeta=z/L_{\text{nl}}$ и запишем окончательный вид выражения для амплитуд:

$$A_{s,i}(\zeta,t)=(1+K_{s,i}\zeta)A_{s,i}(0,t). \tag{7}$$

Здесь коэффициенты пропорциональности

$$K_{s,i}=\frac{1-r_{s,i}}{r_{s,i}} \tag{8}$$

зависят от коэффициентов отражения R_s, R_i на зеркалах резонатора. Данная аппроксимация, разумеется, адекватна только в случае исследования установившегося режима генерации. Для удобства переобозначим:

$$A_{s,i}=A_{s,i}^0+C_{s,i}\zeta=A_{s,i}^0(1+K_{s,i}\zeta),\quad C_{s,i}=A_{s,i}^0K_{s,i}. \tag{9}$$

Поскольку волна накачки не резонирует, ее значение A_p^0 на входе нелинейного кристалла будет постоянным, следовательно:

$$A_p=A_p^0+C_p\zeta. \tag{10}$$

Установившийся режим генерации дополним условием стационарности:

$$\frac{\partial A_s}{\partial t}=\frac{\partial A_i}{\partial t}=0. \tag{11}$$

Подстановка (9)–(11) в исходную систему дифференциальных уравнений (3) дает

$$A_s^0K_s+\alpha_sA_s^0(1+K_s\zeta)=\beta_s\left(A_p^0+C_p\zeta\right)A_i^0(1+K_i\zeta), \tag{12a}$$

$$A_i^0K_i+\alpha_iA_i^0(1+K_i\zeta)=\beta_i\left(A_p^0+C_p\zeta\right)A_s^0(1+K_s\zeta), \tag{12b}$$

$$C_p=-\beta_pA_s^0A_i^0(1+K_s\zeta)(1+K_i\zeta). \tag{12c}$$

Здесь $\alpha_{s,i}=\alpha'_{s,i}L_{\mathrm{nl}}$, $\beta_{s,i,p}=\beta'_{s,i,p}L_{\mathrm{nl}}$.

Ясно, что точность нашего приближения существенно зависит от выбора значения ζ, при котором мы будем решать систему (12). Легко понять, что на границах отрезка $[0,1]$ точность будет невысокой, ведь при этом мы берем значение амплитуд либо на входе, либо на выходе нелинейной среды. Поэтому выберем среднее значение $\zeta=1/2$. Последующий компьютерный эксперимент подтвердил правильность этой интуитивной догадки (см. раздел 4). Итак, имеем

$$A_s^0\left(K_s+\alpha_s\left(1+\frac{K_s}{2}\right)\right)= =\beta_sA_i^0\left(A_p^0-\beta_{\mathrm{pr}}A_s^0A_i^0\right)\left(1+\frac{K_i}{2}\right), \tag{13a}$$

$$A_i^0\left(K_i+\alpha_i\left(1+\frac{K_i}{2}\right)\right)= =\beta_iA_s^0\left(A_p^0-\beta_{\mathrm{pr}}A_s^0A_i^0\right)\left(1+\frac{K_s}{2}\right), \tag{13b}$$

где

$$\beta_{\mathrm{pr}}=\frac{\beta_p}{2}\left(1+\frac{K_s}{2}\right)\left(1+\frac{K_i}{2}\right). \tag{14}$$

Введем замену $R=A_s^0/A_i^0$, $S=A_s^0A_i^0$, тогда (13) можно представить в виде

$$R=\sqrt{\frac{\Gamma_i}{\Gamma_s}}, \tag{15a}$$

$$S=\frac{1}{\beta_{\mathrm{pr}}}\left(A_p^0-\sqrt{\Gamma_s\Gamma_i}\right), \tag{15b}$$

где

$$\Gamma_s=\frac{K_s+\alpha_s\left(1+\frac{K_s}{2}\right)}{\beta_s\left(1+\frac{K_i}{2}\right)},\quad \Gamma_i=\frac{K_i+\alpha_i\left(1+\frac{K_i}{2}\right)}{\beta_i\left(1+\frac{K_s}{2}\right)}. \tag{16}$$

Теперь нетрудно получить выражения для комплексных амплитуд на входе нелинейного кристалла

$$A_s^0=\sqrt{SR}=\sqrt{\frac{1}{\beta_{\mathrm{pr}}}\left(A_p^0\sqrt{\frac{\Gamma_i}{\Gamma_s}}-\Gamma_i\right)}, \tag{17a}$$

$$A_i^0=\sqrt{\frac{S}{R}}=\sqrt{\frac{1}{\beta_{\mathrm{pr}}}\left(A_p^0\sqrt{\frac{\Gamma_s}{\Gamma_i}}-\Gamma_s\right)} \tag{17b}$$

и коэффициентов аппроксимационных функций

$$C_s=K_s\sqrt{\frac{1}{\beta_{\mathrm{pr}}}\left(A_p^0\sqrt{\frac{\Gamma_i}{\Gamma_s}}-\Gamma_i\right)}, \tag{18a}$$

$$C_i=K_i\sqrt{\frac{1}{\beta_{\mathrm{pr}}}\left(A_p^0\sqrt{\frac{\Gamma_s}{\Gamma_i}}-\Gamma_s\right)}. \tag{18b}$$

Таким образом, изменение амплитуд по длине нелинейного кристалла вида

$$A_s(\zeta)=\sqrt{\frac{1}{\beta_{\mathrm{pr}}}\left(A_p^0\sqrt{\frac{\Gamma_i}{\Gamma_s}}-\Gamma_i\right)}(1+K_s\zeta), \tag{19a}$$

$$A_i(\zeta)=\sqrt{\frac{1}{\beta_{\mathrm{pr}}}\left(A_p^0\sqrt{\frac{\Gamma_s}{\Gamma_i}}-\Gamma_s\right)}(1+K_i\zeta) \tag{19b}$$

наглядно показывает, что действительные значения коэффициентов возможны лишь при начальной амплитуде волны накачки A_p^0, большей некоторого порогового значения A_p^{thr}:

$$A_p^0>A_p^{\mathrm{thr}}=\sqrt{\Gamma_s\Gamma_i}, \tag{20}$$

в противном случае ни генерации, ни возрастания амплитуды сигнальной волны не будет.

Итак, мы получили приближенное аналитическое описание параметрической генерации света в двухрезонаторной схеме в стационарном режиме. Его адекватность подтверждается компьютерным моделированием, описанным в разделе 5, при соблюдении условия $Cr^{(2)}=\left(\beta'_{s,i}A_p^0-\alpha'_{s,i}\right)L_{\mathrm{nl}}\leqslant 0.1$. При этом для осуществления генерации необходимо, чтобы выполнялось $Cr^{(2)}>1-r_{s,i}$.

3. Трехрезонаторная схема генерации

Трехрезонаторная схема параметрического генератора света отличается от двухрезонаторной тем, что в ней помимо сигнальной и холостой волн резонирует и волна накачки. Один из примеров ее реализации представлен на рис. 1,*б* [18].

Общий вид уравнений для трехрезонаторной схемы идентичен таковым для двухрезонаторной (3). Также остаются неизменными и аппроксимационные линейные функции для сигнальной и холостой волн (9). Но теперь волна накачки отражается от всех зеркал, и необходимо внести изменения в выражение для ее амплитуды

$$A_p=C_{0p}+C_{1p}\zeta,\quad A_p(1,t)r_p+A_p^0=A_p(0,t),\qquad C_{1p}=C_{0p}K_p-\frac{A_p^0}{r_p}. \tag{21}$$

Здесь r_p — коэффициент отражения частично пропускающего входного зеркала. Коэффициенты отражения остальных зеркал по-прежнему считаем равными единице.

Итак, в исходную систему (3) подставляем следующие выражения:

$$A_s=A_s^0(1+K_s\zeta), \tag{22a}$$

$$A_i=A_i^0(1+K_i\zeta), \tag{22b}$$

$$A_p=C_{0p}(1+K_p\zeta)-\frac{A_p^0}{r_p}\zeta. \tag{22c}$$

При тех же допущениях, что и в двухрезонаторной схеме, получим

$$A_s^0\left(K_s+\alpha_s\left(1+\frac{K_s}{2}\right)\right)=$$

$$= \beta_s \left(C_{0p} \left(1 + \frac{K_p}{2}\right) - \frac{A_p^0}{2r_p} \right) A_i^0 \left(1 + \frac{K_i}{2}\right), \quad (23a)$$

$$A_i^0 \left(K_i + \alpha_i \left(1 + \frac{K_i}{2}\right)\right) =$$

$$= \beta_i \left(C_{0p} \left(1 + \frac{K_p}{2}\right) - \frac{A_p^0}{2r_p} \right) A_s^0 \left(1 + \frac{K_s}{2}\right), \quad (23b)$$

$$C_{0p}K_p - \frac{A_p^0}{r_p} = -\beta_p A_s^0 A_i^0 \left(1 + \frac{K_s}{2}\right)\left(1 + \frac{K_i}{2}\right). \quad (23c)$$

Исключая C_{0p}, имеем

$$A_s^0 \left(K_s + \alpha_s \left(1 + \frac{K_s}{2}\right)\right) =$$

$$= \beta_s \left(\frac{1+r_p}{1-r_p} \left(\frac{A_p^0}{r_p} - 2\beta_{\text{pr}} A_s^0 A_i^0 \right) - \frac{A_p^0}{R_p} \right) A_i^0 \frac{2+K_i}{4}, \quad (24a)$$

$$A_i^0 \left(K_i + \alpha_i \left(1 + \frac{K_i}{2}\right)\right) =$$

$$= \beta_i \left(\frac{1+r_p}{1-r_p} \left(\frac{A_p^0}{r_p} - 2\beta_{\text{pr}} A_s^0 A_i^0 \right) - \frac{A_p^0}{r_p} \right) A_s^0 \frac{2+K_s}{4}, \quad (24b)$$

Введем замену $R = A_s^0 / A_i^0$, $S = A_s^0 A_i^0$:

$$R = \sqrt{\frac{\Gamma_i}{\Gamma_s}}, \quad (25a)$$

$$S = \frac{1-r_p}{\beta_{\text{pr}}(1+r_p)} \left(\frac{A_p^0}{1-r_p} - \sqrt{\Gamma_s \Gamma_i} \right). \quad (25b)$$

Сюда вошло выражение для пороговой амплитуды накачки

$$A_p^{\text{thr}} = (1-r_p)\sqrt{\Gamma_s \Gamma_i}. \quad (26)$$

Изменение генерируемых амплитуд по длине нелинейного кристалла будет следующим:

$$A_s(\zeta) = (1 + K_s \zeta) \sqrt{\frac{R\left(A_p^0 - A_p^{\text{thr}}\right)}{\beta_{\text{pr}}(1+r_p)}}, \quad (27a)$$

$$A_i(\zeta) = (1 + K_i \zeta) \sqrt{\frac{A_p^0 - A_p^{\text{thr}}}{R\beta_{\text{pr}}(1+r_p)}}. \quad (27b)$$

На первый взгляд кажется, что, согласно формулам для амплитуд сигнальной и холостой волн (19) и (27), увеличение нелинейности (параметра β_{pr}) приводит к уменьшению интенсивности генерируемого излучения. Однако в формуле (19) в параметры Γ_s и Γ_i, которые входят в отрицательные слагаемые амплитуд данных формул, включаются соответственно коэффициенты нелинейности β_s и β_i в степени -1. Таким образом, в формулах для амплитуд сигнальной и холостой волн (19) нелинейность в степени -2 в отрицательном слагаемом и в степени -1 в положительном слагаемом, т. е. интенсивность генерируемого излучения увеличивается с увеличением коэффициентов нелинейности. Аналогично и для формулы (27) трехрезонаторного случая.

Итак, мы получили аналитические решения задачи о формировании параметрически преобразованного излучения в резонаторе как для двухрезонаторного, так и для трехрезонаторного параметрического генератора в стационарном режиме. В последнем случае критерием адекватности аналитического решения будет выполнение условия $Cr^{(3)} = \beta'_{s,i} A_p^0 L_{\text{nl}} \leqslant 0.1$. Сравним теперь эти результаты с точным компьютерным решением.

4. Компьютерное моделирование

Для проверки правильности полученных аналитических результатов мы воспользовались численным моделированием. При этом исходная система дифференциальных уравнений (3) решалась методом Рунге–Кутта 4 порядка.

Аналитические зависимости (18) и (27) справедливы для установившегося режима генерации. Для его реализации в компьютерном моделировании мы осуществляли многократный проход излучения по резонатору до получения неизменных амплитуд волн. В случае двухрезонаторного параметрического генератора амплитуда на выходе умножалась на коэффициент отражения зеркала резонатора r_s, и получившееся значение снова подавалось на вход нелинейного кристалла; значение амплитуды волны накачки на входе было постоянным, равным A_p^0. В случае же трехрезонаторной схемы волна накачки также резонировала, и значение ее амплитуды на входе на i-й итерации было равно

$$A_{\text{in}}^i = A_{\text{out}}^{i-1} + A_p^0. \quad (28)$$

Цикл прохода волн по нелинейному кристаллу продолжался до тех пор, пока разница между амплитудой сигнальной волны на выходе между двумя последовательными итерациями не становилась меньше некоторого малого значения.

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды сигнальной волны на выходе генератора от итерации и зависимость установившейся амплитуды от координаты ζ для различных значений коэффициента связи β для двухрезонаторной схемы. Сплошные кривые — результат численного моделирования, штриховые — результат аналитической аппроксимации. Как видно из графиков, при уменьшении значения коэффициента связи амплитуда сигнальной волны вырождается в линейную функцию, и аппроксимация (9) при малых значениях коэффициента связи представляется вполне адекватной.

С помощью компьютерного моделирования мы определили (рис. 3), что относительная ошибка приближения составляет не больше 1.5% при значении параметра $Cr^{(2)} = \left(\beta'_{s,i} A_p^0 - \alpha'_{s,i}\right) L_{\text{nl}}$:

$$1 - r_{s,i} < Cr^{(2)} \leqslant 0.1. \quad (29)$$

Соответствующие результаты расчетов трехрезонаторной схемы представлены на рис. 4. Интересно, что, согласно последнему графику, точная компьютерная линия и аналитическая прямая практически полностью совпали. Сравнения с известным аналитическим приближением [2] нет, поскольку в [2] трехрезонаторное взаимодействие вообще не рассматривалось. Для данной схемы относительная погрешность приближения для амплитуды сигнальной

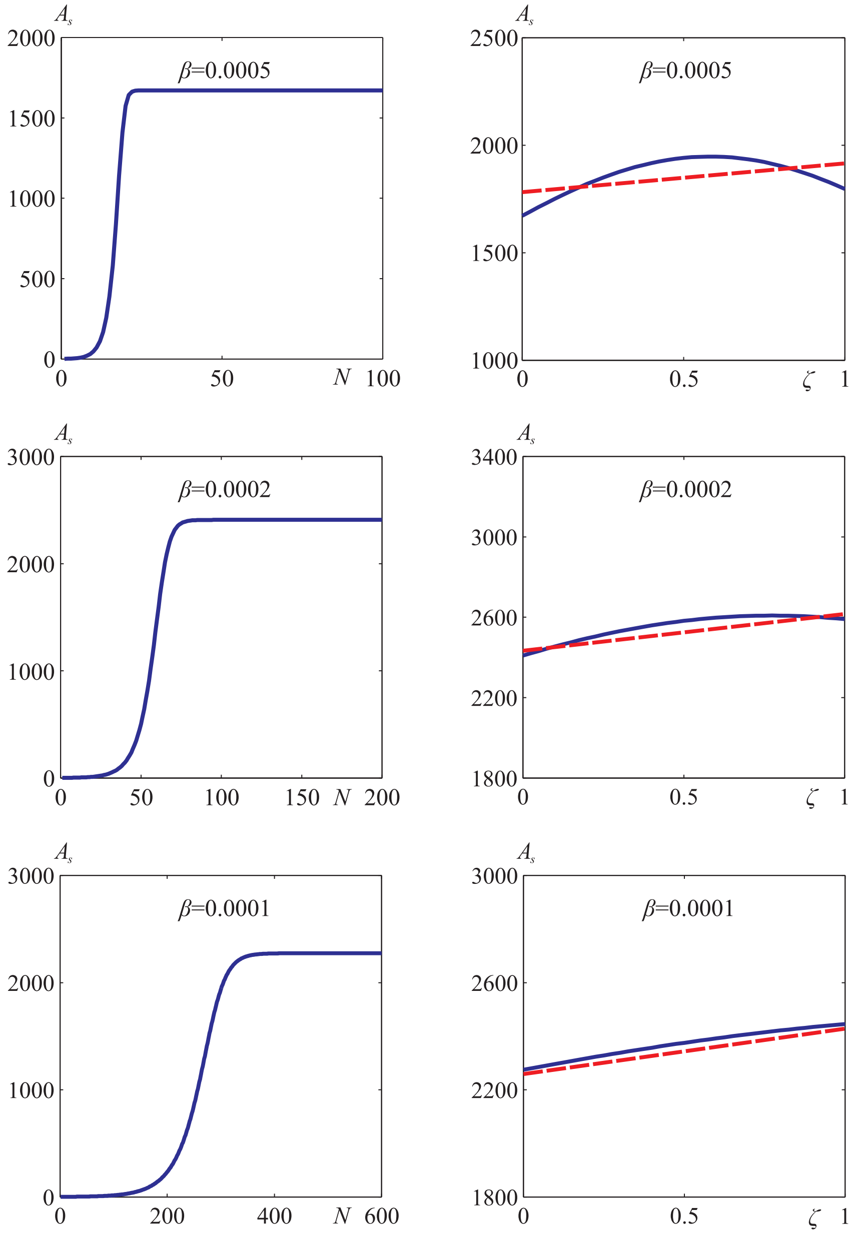

Рис. 2. Графики зависимости амплитуды сигнальной волны на выходе ПГС, работающего в вырожденном режиме, от номера итерации (слева) и зависимости амплитуды сигнальной волны от координаты ζ внутри кристалла (справа) для двухрезонаторной схемы. $A_p^0 = 1000$, $r_{s,i} = 0.93$, $\alpha_{s,i} = 0$. Сплошные кривые — численный расчет, штриховые — аналитический

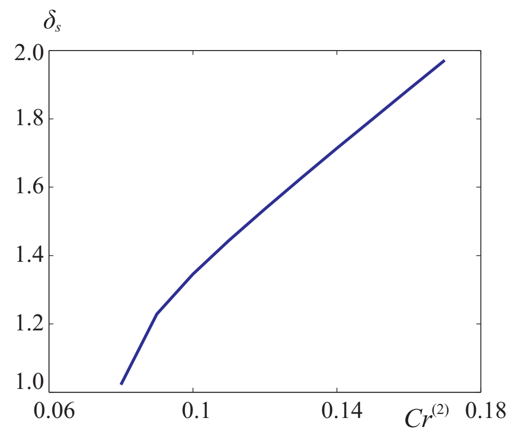

Рис. 3. График зависимости относительной ошибки амплитуды сигнальной волны от параметра $Cr^{(2)}$

волны оказалась менее процента при значениях параметра

$$Cr^{(3)} = \beta'_{s,i} A_p^0 L_{\rm nl} \leqslant 0.1. \qquad (30)$$

Согласно данным на рис. 4, накачка должна быть либо непрерывной, либо импульсы должны быть достаточной длины, чтобы успевал установится стационарный процесс.

На рис. 5 представлены интересные зависимости, иллюстрирующие пороговый характер параметрической генерации. Они построены при помощи итоговых зависимостей (19) и (27).

Для обоснования корректности выполнения закона сохранения энергии $\Delta E_p + \Delta E_s + \Delta E_i = 0$ мы осуществили численную проверку. При этом оказалось, что уменьшение энергии накачки абсолютно точно совпадает с суммарным приращением энергии сигнальной и холостой волн в конце нелинейной

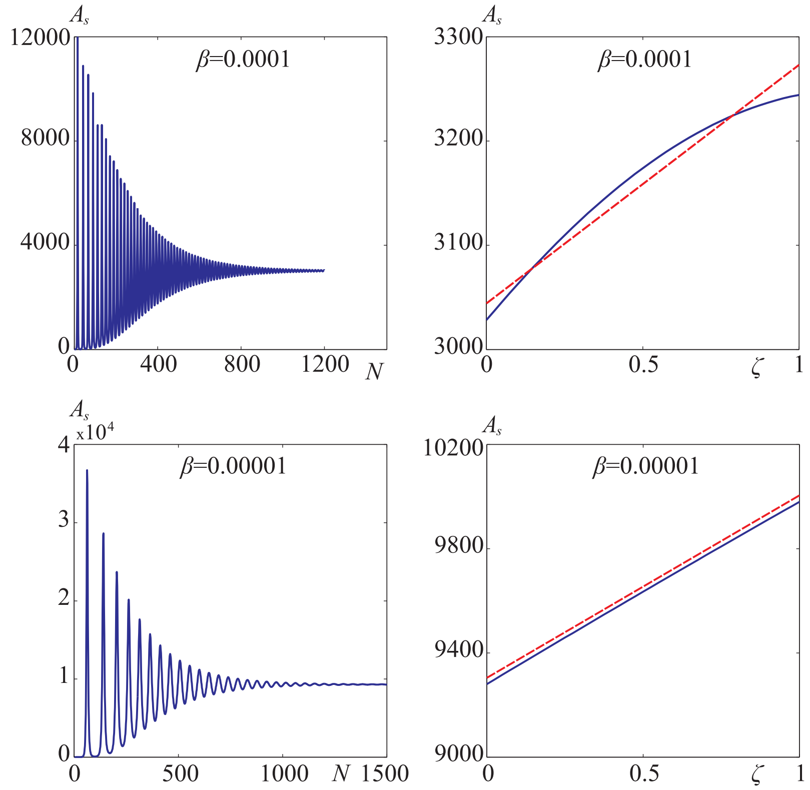

Рис. 4. Графики, аналогичные приведенным на рис. 2, но для трехрезонаторной схемы $A_p^0 = 1000$, $r_{s,i} = 0.93$, $r_p = 0.99$, $\alpha_{s,i} = 0$

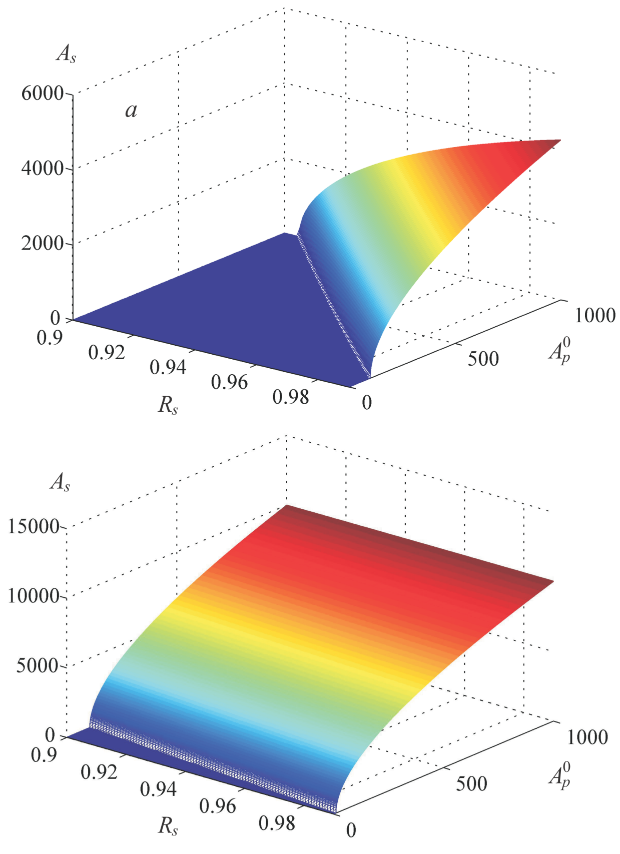

Рис. 5. а — Зависимость амплитуды сигнальной волны от коэффициента отражения и амплитуды накачки в двухрезонаторной схеме при отсутствии диссипативных потерь, построенная с помощью нашей аналитической модели. *б* — Аналогичный график для трехрезонаторной схемы

среды. Правда, по длине нелинейной среды этот баланс выполняется неточно, но для нас это и не важно, поскольку выполнение закона сохранения энергии имеет значение при прохождении излучением всей нелинейной среды.

Заключение

Итак, подведем основные итоги работы. Система уравнений, описывающих поля в нелинейном резонаторе, не имеет точного аналитического решения. Поэтому для теоретических оценок используются приближения различной степени грубости. Простейшее и самое грубое — приближение заданной накачки. Попытки его уточнения привели к разработке метода учета истощения накачки, который широко используется в многочисленных работах и учебнике [2]. Однако приращение амплитуд сигнальной и холостой волн при этом не учитывается, что вызывает разумное недоумение, поскольку ведет к формальному нарушению закона сохранения энергии. Тем не менее данное приближение до сих пор используется в задачах квантовой оптики (см., например, [12]), где, казалось бы, такое несоответствие должно вести к нарушению коммутационных соотношений, лежащих в основе квантования световых полей.

Авторы работы [17] предположили, что изменение амплитуд взаимодействующих пучков по длине взаимодействия в кристалле линейно. При этом задача допускает сравнительно несложное аналитическое решение. В данной работе мы его обобщили на случай наличия потерь и определили строгие критерии его адекватности.Численный эксперимент, моделирующий точное описание полей в резонаторе, подтвердил правильность нашего подхода. Относительные ошибки при характерных для этого устройства режимах непрерывной генерации не превышают нескольких процентов, чего вполне достаточно для адекватного описания. Более того, в трехрезонаторной схеме ошибки составляют менее доли процента.

В дальнейшем мы предполагаем обобщить наш подход на случай многочастотного последовательного параметрического взаимодействия света в резонаторе (см., например, [20–22]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-07-00938, 14-02-00458).

Авторы выражают благодарность профессору А. С. Чиркину за плодотворные обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

1. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* // ЖЭТФ. 1962. **43**, № 1. С. 351.
2. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофмзику и оптику. М., 1981.
3. *Aspect A., Dalibar J., Roger G.* // Phys. Rev. Lett. 1982. **49**. P. 1804.
4. *Белинский А.В., Клышко Д.Н.* // УФН. 1993. **163**, № 8. С. 1 (*Belinskii A.V., Klyshko D.N.* // Phys. Usp. 1993. **36**, N 8. P. 653).
5. *Евдокимов Н.В., Клышко Д.Н., Комолов В.П., Ярочкин В.А.* // УФН. 1996. **166**, № 1. С. 91 (*Evdokimov N.V., Klyshko D.N., Komolov V.P., Yarochkin V.A.* // Phys. Usp. 1996. **39**. P. 83).
6. *Белинский А.В.* // УФН. 2003. **173**, № 8. С. 905 (*Belinskii A.V.* // Phys. Usp. 2003. **46**. P. 877).
7. *Родионов А.В., Чиркин А.С.* // ЖЭТФ. 2004. **79**, № 6. С. 311.
8. *Белинский А.В.* Квантовые измерения. М., 2008.
9. *Reynaud S., Fabre C., Giacobino E.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 1987. **4**, N 10. P. 1520.
10. *Ахманов С.А., Ахмедиев Н.Н., Белинский А.В.* Новые физические принципы оптической обработки информации. М., 1990.
11. *Walls D.F., Milburn G.J.* Quantum Optics. 1994.
12. *Lariontsev E.G., Zolotoverkh I.I.* // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2002. **4**. P. 15.
13. *Carrion L., Girardeau-Montaut J.-P.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2000. **17**, N 1. P. 78.
14. *Cerullo G., De Silvestri S.* // Rev. Sci. Instrum. 2003. **74**, N 1. P. 1.
15. *Prawiharjo J., Hung H.S.S., Hanns D.C., Shepherd D.P.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2007. **24**, N 4. P. 895.
16. *Armstrong D.J., Alford W.J., Raymond T.D., Smith A.V.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 1997. **14**, N 2. P. 460.
17. *Белинский А.В., Федотов В.Е.* // Мир измерений. 2014. **162**, № 8. С. 35.
18. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика: генераторы второй гармоники и параметрические генераторы света. М., 1982.
19. *Kozlovsky W.J., Gustafson E.K., Eckradt R.C., Byer R.L.* // Opt. Lett. 1988. **13**, N 12. P. 1162.
20. *Новиков А.А., Чиркин А.С.* // ЖЭТФ. 2004. **126**, № 5. С. 1089.
21. *Белинский А.В., Исаева А.В., Макеев Е.В., Новиков А.А.* // УФН. 2006. **176**, № 5. С. 543 (*Belinskii A.V., Isaeva A.V., Makeev E.V., Novikov A.A.* // Phys. Usp. 2006. **49**. P. 523).
22. *Chirkin A.S.* // J. of Russian Laser Research. 2014. **35**, N 5. P. 462.

On the theory of parametric light generation

A. V. Belinsky[a], **T. M. Tarasova**[b]

Department of Computer Methods of Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *belinsky@inbox.ru,* [b] *ttarasova7@gmail.com.*

A theory of parametric light generation in a resonator with dissipative losses is presented. Approximate analytical solutions are obtained for schemes with two and three resonating waves and their adequacy criteria are formulated. Computer simulation confirmed the accuracy of the analytical solutions.

Keywords: laser physics, nonlinear optics, parametric light generation, optical resonator.
PACS: 45.65.Yj.
Received 30 December 2014.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2015).

Сведения об авторах

1. Белинский Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: belinsky@inbox.ru.
2. Тарасова Татьяна Михайловна — студентка; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: ttarasova7@gmail.com.