

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Моделирование распределения температуры на границе раздела вода–воздух с использованием теории контрастных структурН. Т. Левашова^{1,a}, О. А. Николаева^{1,b}, А. Д. Пашкин^{2,c}*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,**¹кафедра математики; ²кафедра физики атмосферы.**Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: ^anatasha@npanalytica.ru, ^bnikolja3004@gmail.com, ^cartem64@mail.ru*

Статья поступила 23.04.2015, подписана в печать 25.05.2015.

Предложена математическая модель для описания распределения температуры в приповерхностном слое на границе раздела вода–воздух. Модель составлена на основании теории контрастных структур. С помощью численных расчетов получено распределение температуры в приграничном слое шириной 10 см. Результаты расчетов хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Ключевые слова: граница раздела вода–воздух, контрастные структуры, переходный слой, коэффициент теплообмена.

УДК: 51-73. PACS: 02.30.Jr.

Введение

При изучении распределения температуры на границе вода–воздух особую роль играет слой порядка нескольких сантиметров вблизи границы раздела. На рис. 1 представлен график изменения температуры в приповерхностном слое порядка 10 сантиметров на границе раздела воды и воздуха, полученный при измерениях в лабораторных условиях [1]. На графике отчетливо заметно наличие нескольких участков, на которых изменение температуры происходит различным образом. Согласно проведенным измерениям монотонное изменение температуры от меньших значений к большим, вообще говоря, не имеет места, напротив, вблизи поверхности наблюдаются области с инверсным распределением температуры. Четкое разграничение участков с различным поведением графика температуры свидетельствует о том, что

на момент проведения эксперимента как в водной среде, так и в воздухе имела место стратификация. Целью настоящей работы является разработка математической модели, позволяющей описать немонотонное изменение температуры в переходном слое на границе раздела воды и воздуха.

В основе представленной модели лежат экспериментально подтвержденные данные о скачкообразном изменении коэффициента теплообмена как на границе раздела вода–воздух, так и на границах слоев, обусловленных стратификацией каждой из сред. Для описания резких изменений температуры на границах слоев мы применили теорию диссипативных контрастных структур. Контрастной структурой называется функция, внутри области определения которой есть интервал, на котором происходит резкое изменение значений этой функции. Эта область называется внутренним переходным слоем.

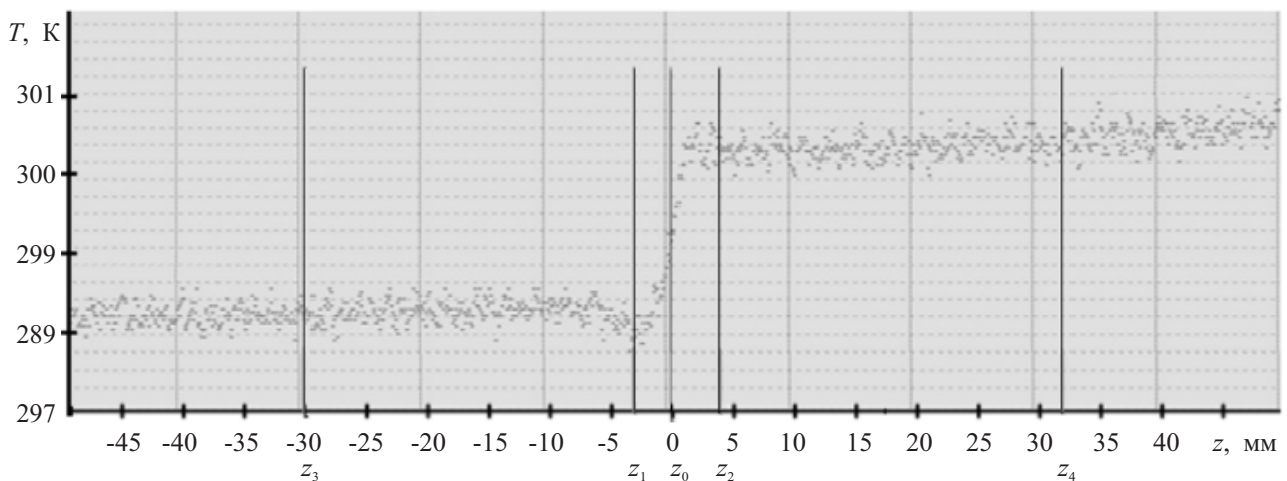


Рис. 1. Экспериментально полученный график изменения температуры в приповерхностном слое вода–воздух

Теория контрастных структур часто используется для моделирования фазовых переходов, в частности процессов горения и других автоволновых процессов [2].

1. Теоретическая модель

Для описания распределения температуры вдоль отрезка прямой, перпендикулярной границе раздела, поставим следующую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(K(\tilde{z}) \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} \right) - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \tilde{f}(T, \tilde{z}, \tilde{t}), \\ \tilde{z} \in (-\tilde{a}, \tilde{a}), \quad \tilde{t} \in (0; \tilde{t}_0); \\ \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=-\tilde{a}} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{a}} = 0, \quad T(\tilde{z}, 0) = T_0(\tilde{z}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T — температура в Кельвинах, \tilde{z} — координата вдоль прямой, перпендикулярной границе вода–воздух (в метрах), \tilde{t} — время в секундах (размерные пространственные и временные переменные помечены значком «тильда»), c — удельная теплоемкость среды в Дж/(кг·К) (для газа — при постоянном давлении), ρ — плотность среды в кг/м³. Через $K(\tilde{z})$ обозначен коэффициент теплообмена в Вт/(м·К). Как видно из экспериментальных графиков (рис. 1), зоны инверсного распределения температуры расположены на расстоянии порядка нескольких сантиметров от этой границы, поэтому решение задачи (1) проводится на отрезке $\tilde{z} \in [-\tilde{a}; \tilde{a}]$ при $\tilde{a} = 0.05$ м в течение \tilde{t}_0 секунд. Функция $T_0(\tilde{z})$ задает начальное распределение температуры, необходимое для численных расчетов методом стационарирования. Граничные условия Неймана означают, что суммарный поток тепла через границы рассматриваемой области равен нулю.

Временной промежуток, в течение которого проводятся измерения, является достаточно продолжительным, чтобы установилось стационарное распределение температуры, и вместе с тем достаточно коротким, чтобы изменение окружающей среды было несущественным и не могло повлиять на это распределение. Учитывая это условие эксперимента, при конструировании модели мы считали функцию $\tilde{f}(T, \tilde{z}, \tilde{t})$ в правой части уравнения (1) не зависящей от времени.

В различных слоях стратифицированной среды теплообмен обусловлен различными причинами. На расстоянии нескольких миллиметров от границы вода–воздух обмен является молекулярным, а при удалении от границы становится турбулентным. Коэффициент теплообмена при молекулярном взаимодействии на два порядка меньше, чем при турбулентном. Кроме того, турбулентный обмен в воздухе происходит интенсивнее, чем в воде, поэтому коэффициент теплообмена в воздухе на порядок больше, чем в воде. Также из экспериментальных данных известно, что внутри переходного слоя существует

плоскость, вдоль которой коэффициент теплообмена скачкообразно изменяется в несколько раз. Эту плоскость принято считать границей раздела воды и воздуха. Тем самым существуют четыре области, в которых коэффициент теплообмена принимает разные значения:

$$K(z) = \begin{cases} 100 \cdot D, & \tilde{z} \leq \tilde{z}_1; \\ D, & \tilde{z}_1 < \tilde{z} \leq \tilde{z}_0; \\ m \cdot D, & \tilde{z}_0 < \tilde{z} \leq \tilde{z}_2; \\ 1000 \cdot D, & \tilde{z} > \tilde{z}_2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $1 < m < 10$, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 — границы переходного слоя, \tilde{z}_0 — точка на границе раздела. Линии $\tilde{z} = \tilde{z}_i$, $i = 0, 1, 2$, отмечены на рис. 1.

Приведем задачу (1) к безразмерному виду. В качестве масштабов измерения длины, температуры и времени примем соответствующие единицы, указанные в [3]. В качестве единицы длины используем длину капиллярных волн $h_\sigma = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_\omega g}} \approx 2.77 \cdot 10^{-3}$ м, где σ и ρ_ω — соответственно поверхностное натяжение и плотность воды, g — ускорение свободного падения. За характерное время выберем $t_* = \frac{h_\sigma}{v_\sigma} \approx 0.017$ с, где $v_\sigma = \sqrt{h_\sigma g}$ — фазовая скорость капиллярных волн. Масштаб изменения температуры выберем из соображений удобства численного расчета. Примем $T_* = 0.5$ К. Обозначим $u = \frac{T}{T_*}$, $u_0 = \frac{T_0}{T_*}$, $z = \frac{\tilde{z}}{h_\sigma}$, $a = \frac{\tilde{a}}{h_\sigma}$, $t = \frac{\tilde{t}}{t_*}$, $t_0 = \frac{\tilde{t}_0}{t_*}$.

Задача (1), записанная в безразмерных величинах, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(k(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, z), \\ z \in (-a, a), \quad t \in (0; t_0); \\ \frac{du}{dz} \Big|_{z=-a} &= 0, \quad \frac{du}{dz} \Big|_{z=a} = 0, \quad u(z, 0) = u_0(z). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $k(z) = K(\tilde{z}) \frac{t_*}{h_\sigma^2} \frac{1}{c\rho}$ — безразмерный коэффициент теплопроводности.

Согласно данным, содержащимся в [4], величину D в выражении (2) для коэффициента теплообмена следует считать равной 0.6 Вт/(м·К), тогда для безразмерного коэффициента теплопроводности в области молекулярного теплообмена со стороны воды получаем значение $k(z_0 - 0) \simeq 3.1 \cdot 10^{-4}$.

2. Выбор неоднородности в правой части исходя из теории контрастных структур

Настоящая модель разработана для описания лабораторных экспериментов, проводившихся в течение достаточно короткого промежутка времени, чтобы влияние на рассматриваемый объект исследования таких факторов, как солнечная радиация, интенсивное испарение, перемешивание или волнение на поверхности воды было пренебрежимо мало. В основу модели положено допущение, что весь рассматриваемый переходный слой вода–воздух представляет собой активную среду, т. е. среду, далекую

от состояния термодинамического равновесия [2]. Основным свойством активной среды является способность продолжительное время находиться в одном из возможных состояний, определяемых заданными внешними факторами, и переключаться от одного из таких состояний к другому под влиянием интенсивного внешнего воздействия. Температура среды в пограничном слое вода–воздух при данных внешних физических условиях может иметь два состояния: температура в воде u_w и температура в воздухе u_a . Роль внешнего воздействия, переключающего состояние среды от температуры u_w к температуре u_a , играет раздел двух сред. Согласно приведенным в предыдущем пункте расчетам, в уравнении (3) при старшей производной по координате стоит малый параметр, т. е. уравнение является сингулярно возмущенным. Для построения модели, описывающей стационарный переходный слой, мы опирались на исследования, проведенные в цикле работ, посвященных исследованию сингулярно возмущенных краевых задач, допускающих решения вида контрастных структур [5–9]. При моделировании распределения температуры на границе вода–воздух интерес представляет решение с внутренним переходным слоем, область локализации которого не изменяется в течение рассматриваемого промежутка времени, т. е. фактически решение стационарной задачи для дифференциального уравнения второго порядка, отвечающей (3). В работе [9] показано существование решения такого вида у краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда неоднородность в его правой части представляет собой кусочно-непрерывную функцию. Опираясь на результаты этой работы, мы выбрали функцию $f(u, z)$ в правой части уравнения (3) в виде

$$f(u, z) = \begin{cases} u - (u_w + \delta W), & z < z_0; \\ u - (u_a + \delta A), & z \geq z_0. \end{cases}$$

Здесь u_a и u_w — известные значения температуры в воздухе и воде соответственно. В лабораторных условиях эти величины имеют порядок 300К. Небольшие по величине (порядка нескольких Кельвин) слагаемые δA и δW отличны от нуля только на участках немоного изменения температуры, отчетливо заметных на экспериментальных графиках, в частности величина δA отлична от нуля при $z_2 < z < z_4$ (см. рис. 1), а величина δW отлична от нуля в слое $z_3 < z < z_1$. Кусочно-непрерывное слагаемое в правой части уравнения теплопроводности можно интерпретировать как источник тепла, обеспечивающий существование переходного слоя, положение которого не изменяется во времени.

3. Численный расчет

Задача (3) была решена численно на отрезке $z \in \left[-\frac{\tilde{a}}{h_\sigma}; \frac{\tilde{a}}{h_\sigma}\right]$, где $\tilde{a} = 0.05$ м, $h_\sigma = 2.77 \cdot 10^{-3}$ м. На этом отрезке вводилась равномерная сетка из $N = 10000$ шагов. Для решения была использована шеститочечная неявная схема, называемая также «схемой с полусуммой» [10]. Итерации по времени велись с шагом $\tau = 0.001$ до полного установления. Начальное распределение выбиралось в виде

$$u_0(z) = \begin{cases} u_w + 0.5(u_a - u_w) \exp(10(z - z_0)), & z < z_0; \\ u_a - 0.5(u_a - u_w) \exp(-10(z - z_0)), & z > z_0. \end{cases}$$

4. Результаты численных экспериментов

На рис. 2 представлены два графика распределения температуры в переходном слое шириной 10 см вблизи границы раздела в случае, когда температура воздуха выше, чем температура воды. Точками отмечены результаты экспериментальных измерений [1], сплошной линией обозначен результат численного решения задачи (3). Безразмерный коэффициент теплообмена выбирался в виде кусочно-постоянной

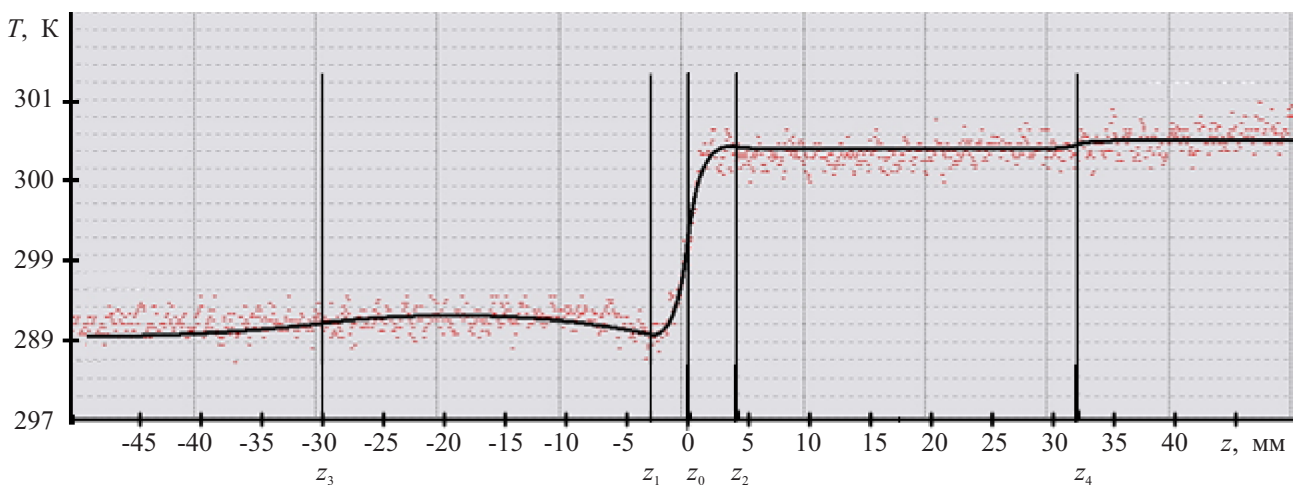


Рис. 2. График распределения температуры в приграничном слое шириной 10 см вблизи раздела вода–воздух в случае, когда температура воды меньше температуры воздуха. Точки — экспериментальные замеры, сплошная линия — результат численного расчета согласно представленной модели

Таблица 1

Параметры модели в случае, когда температура воды меньше температуры воздуха

u_a , К	δA , К	u_w , К	δW , К	\tilde{z}_0 , м	\tilde{z}_1 , м	\tilde{z}_2 , м	\tilde{z}_3 , м	\tilde{z}_4 , м
300.4	-0.2	297.9	1.4	0	-0.003	0.004	-0.03	0.032

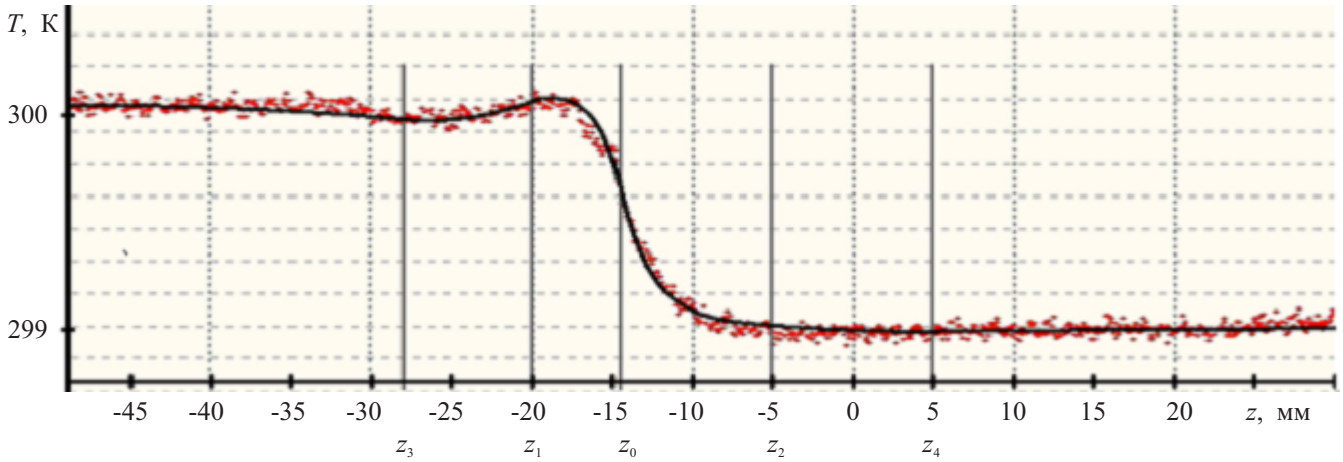


Рис. 3. График распределения температуры в приграничном слое шириной 10 см вблизи раздела вода–воздух в случае, когда температура воды больше температуры воздуха. Точки — экспериментальные замеры, сплошная линия — результат численного расчета согласно представленной модели

Таблица 2

Параметры модели в случае, когда температура воды больше температуры воздуха

u_a , К	δA , К	u_w , К	δW , К	\tilde{z}_0 , м	\tilde{z}_1 , м	\tilde{z}_2 , м	\tilde{z}_3 , м	\tilde{z}_4 , м
299	-1.5	300.1	-3	-0.0145	-0.02	-0.005	-0.028	0.005

функции следующего вида:

$$k(z) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-2}, & z \leq z_1; \\ 10^{-4}, & z_1 < z \leq z_0; \\ 1.5 \cdot 10^{-4}, & z_0 < z \leq z_2; \\ 10^{-1}, & z > z_2. \end{cases}$$

Здесь введены обозначения $z_i = \frac{\tilde{z}_i}{h_\sigma}$, $i = 0, 1, 2$. Параметры модели представлены в табл. 1.

На рис. 3 представлены графики распределения температуры в переходном слое в случае, когда температура воздуха ниже, чем температура воды. Здесь использовано следующее выражение для безразмерного коэффициента теплообмена:

$$k(z) = \begin{cases} 3.1 \cdot 10^{-2}, & z \leq z_1; \\ 2 \cdot 10^{-4}, & z_1 < z \leq z_0; \\ 4 \cdot 10^{-4}, & z_0 < z \leq z_2; \\ 10^{-1}, & z > z_2. \end{cases}$$

Параметры модели представлены в табл. 2.

Как видно из графиков, численные расчеты, полученные на основании предложенной модели, хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Заключение

В работе предложена математическая модель, описывающая распределение температуры в при-

граничном слое вблизи раздела вода–воздух. При построении модели используется теория контрастных структур. На основании этой теории выбирается постановка модельной краевой задачи таким образом, чтобы ее решение имело внутренний переходный слой, положение которого не изменяется со временем. Использование настоящей модели дает возможность определять соотношения между коэффициентами теплообмена в различных слоях стратифицированной среды, а также ширину каждого из этих слоев и количество теплоты, выделяющееся или поглощающееся на участках с инверсным распределением температуры. Также следует отметить, что рассматриваемая модель допускает модификации. В частности, с ее помощью можно описывать изменяющееся во времени распределение температуры, например суточные или сезонные колебания в приповерхностных слоях водоемов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-01-00200-а и 14-04-01568-а).

Список литературы

1. Аксенов В.Н., Андреев Е.Г., Тарасов М.И. // Третья всероссийская конференция «Физические проблемы экологии»: Сб. тезисов докладов. М., 2001. 7. С. 43.
2. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М., 1987.

3. Зилитинкевич С.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л., 1970.
4. Иванов А.А. Введение в океанографию. М., 1978.
5. Волков В.Т., Нефедов Н.Н. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. **46**, № 4. С. 614. (*Volkov V.T., Nefedov N.N. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2006. 46, N 4. P. 585.*)
6. Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, № 2. С. 276. (*Bozhevov'nov Y.V., Nefedov N.N. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. 50, N 2. P. 264.*)
7. Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Ягермцев А.В. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. **53**, № 3. С. 35. (*Levashova N.T., Nefedov N.N., Yagremtsev A.V. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. 53, N 3. P. 273.*)
8. Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. **54**, № 10. С. 35. (*Antipov E.A., Levashova N.T., Nefedov N.N. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. 54, N 10. P. 1536.*)
9. Нефедов Н.Н., Ни М.К. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. (в печати).
10. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. В 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. М., 2013.

Simulation of the temperature distribution at the water–air interface using the theory of contrast structures

N. T. Levashova^{1,a}, O. A. Nikolaeva^{1,b}, A. D. Pashkin^{2,c}

¹Department of Mathematics; ²Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia. E-mail: ^anatasha@npanalytica.ru, ^bnikolja3004@gmail.com, ^cartem64@mail.bu.

A mathematical model for describing the temperature distribution in the near-surface layer at the water–air interface is proposed. The model is composed based on the theory of contrast structures. Using numerical calculations, the temperature distribution in a 10-cm wide near-boundary layer has been obtained. The calculation results coincide well with the experimental data.

Keywords: water–air interface, contrast structures, transition layer, heat-exchange coefficient.

PACS: 02.30.Jr.

Received 23 April 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2015).

Сведения об авторах

1. Левашова Наталия Тимуровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: natasha@npanalytica.ru.
3. Николаева Ольга Александровна — студентка; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: nikolja3004@gmail.com.
3. Пашкин Артем Денисович — студент; тел.: (495) 939-15-41, e-mail: artem64@mail.bu.