

Математическое моделирование рассеянного поля в рабочей зоне зеркального коллиматора

Ф. Б. Хлебников^{1,a}, А. Н. Боголюбов¹, В. С. Солосин², Н. Е. Шапкина¹

¹ *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

² *ФГБУ науки Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН (ИТПЭ РАН). Россия, 125412, Москва, ул. Ижорская, д. 13.*

E-mail: ^a mnfkh1@gmail.com

Статья поступила 14.07.2015, подписана в печать 01.09.2015.

Построена математическая модель зеркального коллиматора со скругленными краями. Методом интегральных уравнений решена задача расчета компонент электромагнитного поля в рабочей зоне. Представлены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: математическое моделирование, зеркальные коллиматоры.

УДК: 51-73. PACS: 02.30.Rz.

Введение

Одной из важных задач практической электродинамики является проблема получения в заданном объеме пространства поля, близкого по структуре к полю плоской электромагнитной волны. В частности, эта проблема возникает в задачах связанных с радиолокацией, в которых нужно исследовать процесс облучения тела удаленным источником. Сходные проблемы возникают при измерении диаграмм направленности антенн. Чтобы обеспечить поле, близкое по структуре к плоской волне, необходимо поместить исследуемое тело на достаточно большое расстояние от источника, в зону Фраунгофера, или, как принято говорить в радиолокации, в дальнюю зону. Для этого могут быть использованы открытые полигоны, однако влияние погодных условий, особенностей окружающей среды и других факторов существенно осложняет интерпретацию полученных результатов. Другим способом исследования является формирование поля, близкого к полю плоской волны, в закрытом пространстве измерительной лаборатории. В таких случаях применяют коллиматоры — устройства, преобразующие сферическую волну в плоскую. Измерительные стенды на базе безэховой камеры, в которых плоское поле формируется коллиматором, называются компактными полигонами [1].

Как и в оптике, в электродинамике можно выделить два типа коллиматоров: коллиматоры основанные на линзах и коллиматоры основанные на зеркалах. Существуют также и другие схемы формирования плоского поля, в частности, использующие решетки из простых антенн и голографические — основанные на использовании теневых масок типа зонной пластинки Френеля.

Коллиматоры в виде диэлектрических линз пока не получили широкого распространения из-за большого количества технических сложностей при изготовлении линзы, в частности требованиям к однородности материала линзы и точности обработки

ее поверхности, поэтому большая часть существующих коллиматоров для компактных полигонов — зеркальные коллиматоры.

Рабочей зоной коллиматора называют область, в которой отраженное поле можно с достаточной точностью считать полем плоской волны. Она представляет собой ограниченную цилиндрическую область, ось которой параллельна оси параболоида. Размеры рабочей зоны зависят от частоты падающей волны и размеров самого зеркала, при этом зеркало коллиматора должно быть достаточно большим, чтобы уменьшить влияние краевых дифракционных эффектов. Обычно поперечные размеры коллиматора приблизительно вдвое больше размеров рабочей зоны. Основными причинами неравномерности поля в рабочей зоне компактного полигона являются конструкция коллиматора, свойства радиопоглощающего материала и его расположение в безэховой камере, а также переотражения волны со вспомогательными устройствами.

1. Краевые эффекты на зеркальных коллиматорах

Одной из важнейших задач при использовании коллиматоров является вопрос об уменьшении влияния краевых дифракционных эффектов на поле в рабочей зоне коллиматора. Попытки уменьшения такого влияния начали предприниматься уже с момента появления первых компактных полигонов [2]. Широко известны и повсеместно применяются компактные полигоны с рефлекторами с зазубренными краями. Технология производства таких коллиматоров постоянно совершенствовалась, и на сегодняшний день она позволяет снизить неравномерность поля в рабочей зоне до величин порядка 1 Дб.

Ввиду необходимости в проведении измерений с большей точностью, уже в 1980-е гг. стали активно разрабатываться коллиматоры, позволяющие проводить более точные измерения. Одним из примеров подобных коллиматоров может служить зеркало

со скругленным краем [3, 4]. В двумерном случае зеркало строится как совокупность параболической части зеркала и скруглений на границах, отклоняющих падающие на края лучи таким образом, чтобы они не попадали в рабочую зону. Примером подобных скруглений могут служить эллиптические скругления.

В работе [4] была предложена модель трехмерного варианта симметричного зеркала со скругленными краями и сложным контуром сопряжения параболической и скругленной частей. В результате исследований методами физической оптики авторами был предложен нетривиальный невыпуклый криволинейный контур сопряжения в виде четырехконечной звезды [5].

Для оценки поведения поля коллиматора с загнутыми краями в рабочей зоне был сделан целый ряд расчетов. В работе [6] можно найти результаты численного эксперимента, проведенного методами геометрической теории дифракции. Эти результаты достаточно хорошо согласуются с результатами, полученными методом физической оптики.

В работе [7] приведены результаты эксперимента, основанного на установке дополнительных рассеивающих пластин на уже функционирующий коллиматор, расположенный в университете штата Огайо, США. Сглаживающая «юбка» была специально изготовлена одним из исследовательских центров под эгидой NASA. Результатом подобной модификации, как и предполагалось, стало существенное сглаживание поля в рабочей зоне. Этот эксперимент наглядно показывает возможность модифицирования коллиматора с зазубренным краем при помощи подобных устройств, тем не менее на практике к такой возможности прибегают редко ввиду большой сложности в производстве «юбки» и переоборудовании камеры.

В качестве примера более подробного теоретического исследования на эту тему можно привести работы [8, 9]. В первой из них рассмотрено построение коллиматора с зазубренным краем специальной формы, угол наклона зубцов которого, в соответствии с методами геометрической оптики, выбран таким образом, чтобы перенаправлять отраженные от ребер лучи мимо рабочей зоны коллиматора. Несмотря на это, сравнение полученного коллиматора с коллиматором, подобным построенному в работе [4], показало, что скругленные края позволяют получить намного более гладкое поле в рабочей зоне. В настоящее время коллиматоры со скругленным краем широко применяются на практике [10].

Отметим, что эффективным способом улучшения поля в рабочей зоне также является использование высококачественных радиопоглощающих материалов. В настоящее время такие материалы применяются повсеместно для покрытия стенок, пола, потолка и приборов внутри безэховой камеры [11, 12]. На сегодняшний день существует достаточно боль-

шое количество радиопоглощающих материалов как узкополосного действия, основанных на явлениях резонанса, так и более универсальных и широкополосных [13, 14, 15, 16].

2. Математическое моделирование поля коллиматора

В работе методом математического моделирования исследуется коллиматор с отогнутой кромкой. Подобные задачи достаточно эффективно решаются с помощью метода конечных элементов [17]. В нашей работе мы используем также весьма эффективный метод интегральных уравнений. Рассмотрим модельную задачу. Пусть электромагнитная волна от линейного источника падает на идеально проводящую бесконечную цилиндрическую поверхность с сечением сложной формы (рис. 1), ось которой параллельна источнику. Здесь поверхность AB , расположенная ближе к источнику, представляет собой поверхность параболического цилиндра, фокус которого совпадает с источником, поверхность CD — кругового, а поверхности AC и BD , соединяющие первые две, — цилиндрические поверхности эллиптического типа. Потребуем, чтобы обращенная к источнику часть исследуемой поверхности представляла собой как минимум поверхность типа C^1 .



Рис. 1. Сечение коллиматора с отогнутым краем

Система координат выбрана так, что ось z направлена вдоль оси цилиндра, поэтому задачу можно рассматривать как двумерную в плоскости xy . Здесь в качестве начала координат выберем фокус параболы, образованной пересечением параболического цилиндра и плоскости xy , ось y направим вдоль оси параболы, а источник поместим в начало координат. Уравнение эллипса (к примеру, AC) запишем как

$$x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0. \quad (1)$$

Требуя, чтобы полученный в сечении контур был достаточно гладким в точках сопряжения кривых, запишем условия гладкого сопряжения эллипса AC и параболы AB :

$$\begin{aligned} 4dl^3b_{12} + l^4b_{22} + 8d^2lb_{13} + \\ + 4dl^2b_{23} + 4d^2b_{33} + 4d^2l^2 = 0, \\ 4dl^2b_{12} + l^3b_{22} + 2dlb_{23} + 4d^2b_{13} + 4d^2l = 0, \quad (2) \\ (1 + 2l)db_{12} + l^2b_{22} + 2b_{32} + 2d = 0. \end{aligned}$$

Здесь l — x -координата точки сопряжения, d — фокусное расстояние параболы. С учетом этих условий

мы получим семейство эллипсов с двумя свободными параметрами.

Предположим, что камера достаточно велика по сравнению с исследуемым объектом. При такой постановке мы пренебрегаем влиянием стенок камеры и рассматриваем только поле, рассеянное зеркалом коллиматора. Дифрагированное поле можно представить в виде суперпозиции полей электрического и магнитного типа и записать с помощью функций Борнуса.

Для поля электрического типа рассмотрим уравнение Гельмгольца для функции Борнуса u [18] (здесь и далее предполагается зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$):

$$\Delta u + k^2 u = f(M) \quad (3)$$

с граничными условиями

$$u|_C = 0 \quad (4)$$

и условием излучения на бесконечности

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right). \quad (5)$$

Здесь C — контур, полученный путем гладкого сопряжения кривых, описанного выше (рис. 1), k — волновое число. Задача для поля магнитного типа имеет тот же вид, с точностью до граничного условия. Поле магнитного типа удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + k^2 u = f(M), \quad (6)$$

с граничными условиями Неймана на границе контура

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_C = 0, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right). \quad (8)$$

Для компонент электромагнитного поля в этом случае имеем

$$E_x = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \quad E_y = \frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad (9)$$

$$E_z = H_x = H_y = 0, \quad H_z = u(x, y). \quad (10)$$

Введем функцию Грина $g(M, P)$ свободного пространства как решение уравнения

$$\Delta g(M, P) + k^2 g(M, P) = -2\pi\delta(r_{MP}) \quad (11)$$

с условиями излучения на бесконечности с решением в виде функции Ханкеля второго рода нулевого порядка

$$g(M, P) = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(kr_{MP}). \quad (12)$$

Для полей электрического и магнитного типа, воспользовавшись свойствами потенциалов простого и двойного слоя, получаем следующие соотношения:

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial u(P)}{\partial n} g(M, P) ds = -u_0(M), \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} u(M) + \frac{1}{2\pi} \int_C u(P) \frac{\partial g(M, P)}{\partial n} ds = u_0(M), \quad (14)$$

где M — точка наблюдения на поверхности проводника, P — точка истока, а функция $u_0(M)$ характеризует падающую волну. Для случая возбуждения поверхности нитью электрического тока уравнение для тока на поверхности проводника имеет вид

$$H_0^{(2)}(kr_M) = -\frac{1}{2\pi} \oint_C J(P) H_0^{(2)}(k|r_M - r_P|) ds. \quad (15)$$

Зная распределение токов, можно вычислить поле в рабочей зоне коллиматора по формуле

$$H_z(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_C J(P) H_0^{(2)}(kr_{P,M}) dl_P.$$

Задача решается численно методом коллокации.

Перейдем к дискретному аналогу уравнения (15), разделив контур интегрирования на N дуг C_n . Представляя интеграл в формуле (15) в виде суммы интегралов по участкам C_n , $C = \sum C_n$, получим систему линейных уравнений относительно токов J_n

$$H_0^{(2)}(kr_m) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N J_n \int_{C_n} H_0^{(2)}(k|r_M - r_P|) ds, \quad (16)$$

в которой коэффициентами матрицы будут интегралы от функции Ханкеля

$$M_{m,n} = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_n} H_0^{(2)}(k|r_M - r_P|) ds. \quad (17)$$

Так как дуги C_n выбираются малыми, функцию Ханкеля можно аппроксимировать кусочно-постоянной функцией

$$M_{m,n} = -\frac{1}{2\pi} \Delta_n H_0^{(2)} \left(k \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right) \quad (18)$$

при $m \neq n$. Для $m = n$

$$M_{n,n} = -\frac{1}{2\pi} \Delta \left(1 - i \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma k \Delta_n}{4e} \right) \right), \quad (19)$$

где Δ_n — длины дуг контуров C_n , γ — постоянная Эйлера, e — основание натурального логарифма. Таким образом, распределение токов на цилиндре произвольной формы мы можем получить как решение системы линейных уравнений

$$M_{m,n} J_n = b_m \quad (20)$$

с симметричной матрицей. Тогда искомое поле имеет вид

$$U_{\text{app}} = \frac{1}{2\pi} \sum_n J_n H_0^{(2)}(kr_{n,m}) \cdot \Delta_n. \quad (21)$$

На основании приведенной выше модели была составлена программа в среде Mathcad и произведен ряд расчетов, в частности для нескольких характерных предельных случаев [19].

Для проверки корректности модели были произведены расчеты для простейшего случая цилиндра с круговым сечением, которое получается из контура, изображенного на рис. 1 при стремлении

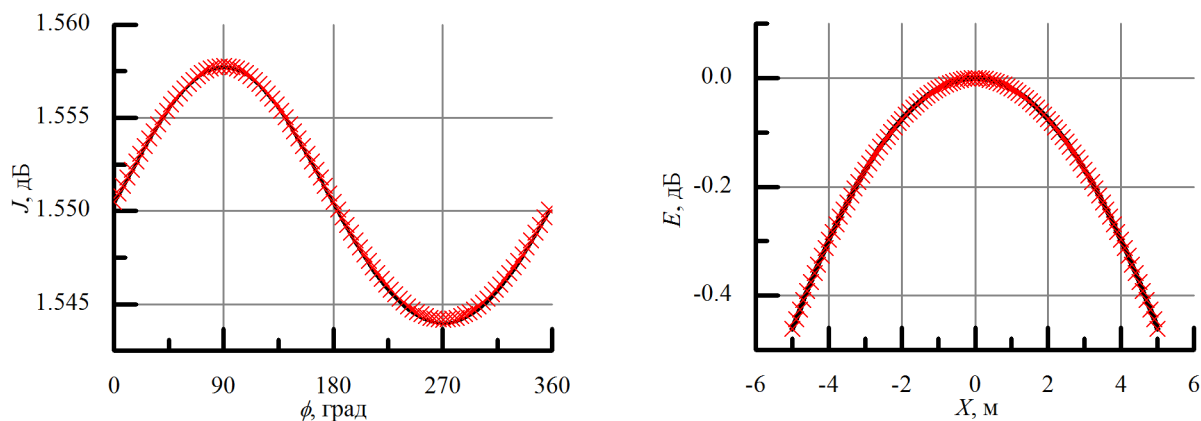


Рис. 2. Распределение токов на круговом цилиндре и его поле в рабочей зоне

длины дуги AB к нулю. Расположим источник излучения на большом расстоянии. Токи, наведенные на параболоиде в этом случае, как и рассеянное поле, вычисляются аналитически [20]. Как показал численный эксперимент, результаты, полученные с помощью данной математической модели, хорошо согласуются с аналитическим решением (рис. 2).

Более важный с практической точки зрения предельный случай — случай, в котором фокусное расстояние параболы устремляется к бесконечности. В этом случае передняя и задняя стенка сечения $z = \text{const}$ вырождаются в отрезки прямых. Так как источник излучения должен располагаться в фокусе параболической дуги, он также становится бесконечно удаленным, а падающая на тело волна — плоской. Был проведен ряд численных экспериментов с различными размерами скругления по отношению к длине волны. В качестве величины, характеризующей размер скругления, была выбрана длина большой полуоси эллипса a .

На графике, изображенном на рис. 3, разные кривые соответствуют разным размерам главной оси скругления a по отношению к длине волны λ . Хорошо видно, что увеличение размеров скругления положительно сказывается на поле в рабочей области, существенно подавляя неоднородности.

Одновременно с этим растет и поле вне рабочей зоны. Несмотря на то, что в рамках данной задачи это поле не рассматривается подробно, при реальных измерениях этот эффект может повлиять на точность эксперимента в безэховой камере из-за переотражений от стенок.

Наибольший интерес представляет исследование общего случая, в котором дуга AB не является вырожденной. В отличие от предыдущего случая, семейство возможных скруглений является многопараметрическим: подходящие эллипсы могут иметь различные углы наклона осей и координаты точки сопряжения с параболической частью контура. Тем не менее, общая тенденция остается неизменной: увеличение размеров закругления при прочих равных

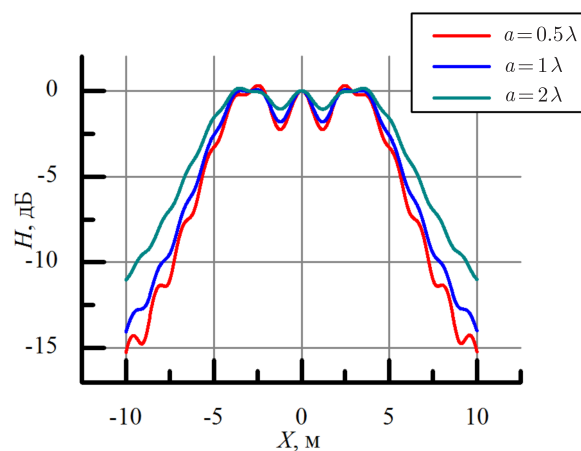


Рис. 3. Поле, отраженное плоским зеркалом с разными размерами скругления

параметрах улучшает поле в рабочей зоне, но одновременно увеличивает и амплитуду поля вне ее.

Использование скругления достаточно больших размеров эффективно подавляет большую часть дифракционных эффектов, как хорошо видно из рис. 4, где представлены распределения поля для разных профилей зеркала, отличающихся размерами скруглений. Если на первом графике, соответствующем наименьшему размеру скругления, присутствуют дополнительные максимумы в рабочей зоне, то уже на втором графике эти экстремумы пропадают и в дальнейшем гладкость поля только улучшается.

Закключение

Построенная математическая модель для двумерного случая, несмотря на свою простоту, позволяет качественно оценить поле в рабочей зоне зеркального коллиматора с отогнутыми краями. Проведенные численные эксперименты показывают как преимущества, так и недостатки подобных коллиматоров: к преимуществам следует отнести существенное улучшение отраженного поля, но достигается оно при достаточно крупных размерах скругленных кромок.

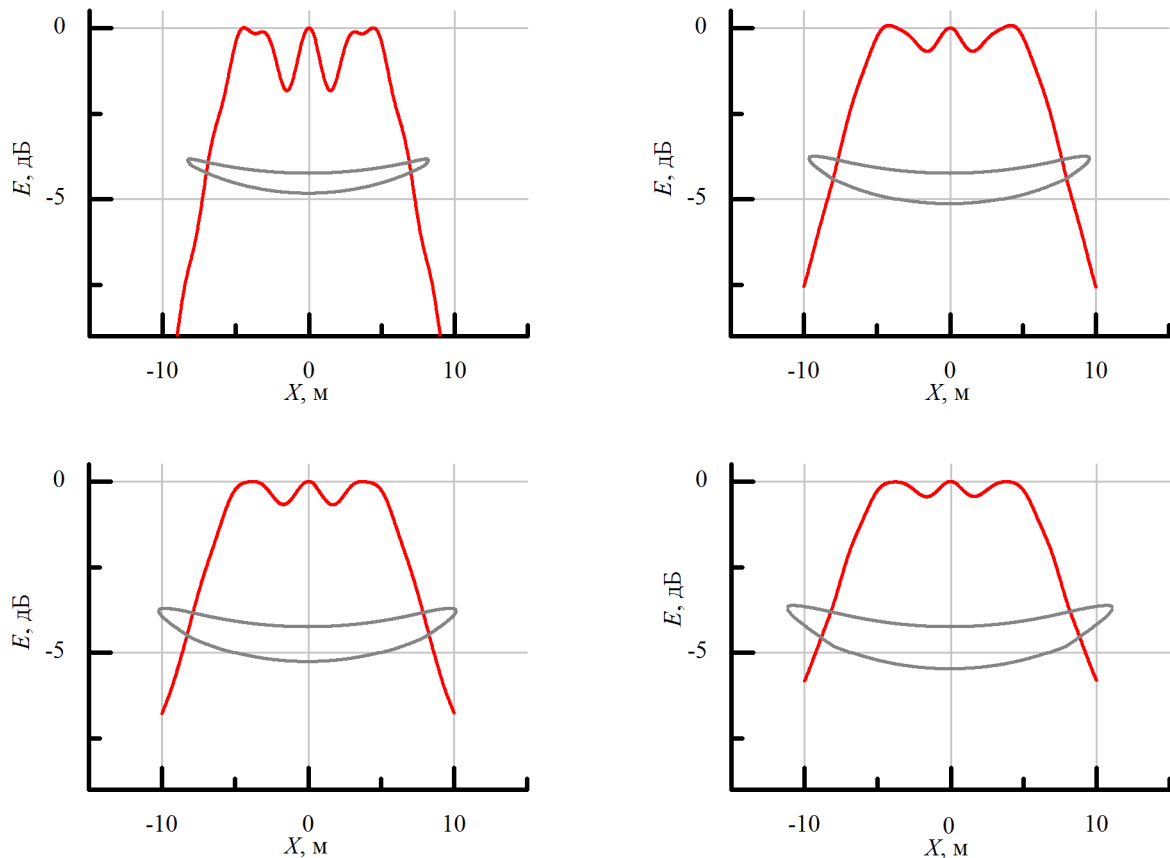


Рис. 4. Параболическое зеркало со скругленными краями и его поле в рабочей зоне

Список литературы

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М., 2007.
2. Emerson W. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1973. **21**, N 4. P. 484.
3. Pistorius C., Burnside D. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1987. **35**, N 3. P. 342.
4. Gupta I., Ericson K., Burnside W. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1990. **38**, N 6. P. 853.
5. Lee T., Burnside W., Gupta I. // Antenna Measurement Techniques Association 26th Ann. Mtg. Stone Mountain Park, Ga. 2004, 17–22 Oct.
6. Ellington S., Gupta I., Burnside W. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1990. **38**, N 12. P. 1969.
7. Burnside W., Gilreath M., Kent B., Clerici G. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1987. **35**, N 2. P. 176.
8. Muñoz-Acevedo A., Burgos S., Sierra-Castañer M. // Proc. of the 5th European Conf. IEEE Antennas and Propagation (EUCAP). 2011. P. 3586.
9. Lee T., Burnside W. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1996. **44**, N 1. P. 87.
10. Shields M., Fenn A. // Lincoln Laboratory J. 2007. **16**, N 2.
11. Appel-Hansen J. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1973. **21**, N 4. P. 490.
12. Никитенко А.В., Зубов А.С., Шапкина Н.Е. // Матем. моделирование. 2014. **26**, № 9. С. 18.
13. Severin H. // IRE Trans. Antennas and Propagation. 1956. **4**, N 3. P. 385.
14. Sun W., Liu K., Balanis C. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1996. **44**, N 6. P. 798.
15. Amano M., Kotsuka Y. // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2003. **51**, N 1. P. 238.
16. Johansson M., Holloway C., Kuester E. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 2005. **53**, N 2. P. 728.
17. Боголюбов А.Н., Боголюбов Н.А., Свешников А.Г. // Физические основы приборостроения. 2013. **2**, № 1. С. 10.
18. Свешников А.Г., Могилевский И.Е. Математические задачи теории дифракции. М., 2010.
19. Хлебников Ф.Б., Шапкина Н.Е., Солосин В.С. // 12-я Ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН. Москва, 4–7 апреля 2011.
20. Хлебников Ф.Б. // 5-я Международная конференция «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации». Суздаль, 18–19 сентября 2012.

The mathematical simulation of a diffracted field in the target area of a mirror collimator**F. B. Khlebnikov^{1,a}, A. N. Bogolyubov¹, V. S. Solosin², N. E. Shapkina¹**¹*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*²*Federal State Research Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics, Russian Academy of Sciences (ITAE RAS), Moscow 125412, Russia.**E-mail: ^amnfkh1@gmail.com.*

A mathematical model of a mirror collimator with rounded edges is developed. The problem of calculating electromagnetic field components in the target area is solved by the method of integral equations. The results of numerical computations are presented.

Keywords: mathematical simulation, mirror collimator.

PACS: 02.30.Rz.

Received 14 July 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2015).

Сведения об авторах

1. Хлебников Федор Борисович — аспирант; тел.: (499) 147-63-62, e-mail: mnfkh1@gmail.com.
2. Богобюбов Александр Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
3. Солосин Владимир Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 485-95-44, e-mail: svsl5105@yandex.ru.
4. Шапкина Наталья Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: neshapkina@mail.ru.