Исследование уравнения для энергетической щели на основе флуктуационной теории высокотемпературной сверхпроводимости

М. Е. Бычков[a], А. М. Савченко[b], Б. И. Садовников

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] bychkov.m.e@gmail.com, [b] a.m.savchenko@gmail.com

Статья поступила 23.06.2015, подписана в печать 30.07.2015.

На основе флуктуационной теории высокотемпературной сверхпроводимости исследовано уравнение для энергетической щели. Показано, что с помощью данного механизма может быть объяснен рост критической температуры T_c. Также на основе метода прямоугольных ям получено явное выражение для критической температуры.

Ключевые слова: высокотемпературная сверхпроводимость, спиновые флуктуации, фононы.
УДК: 538.945. PACS: 74.20.–z.

Введение

Теоретическое описание эффекта низкотемпературной сверхпроводимости довольно долгое время оставалось загадкой, пока в 1956–1957 гг. Дж. Бардин, Л. Н. Купер и Дж. Р. Шриффер не предложили миру свою теорию, которая довольно удачно описывала известные на то время эксперименты и явления, а также, что являлось наиболее важным, давала предсказания на дальнейшее развитие этой области. В 1958 г. Н. Н. Боголюбов показал, что волновая функция БКШ, которая изначально получена из вариационного аргумента, может быть получена путем канонического преобразования электронного гамильтониана [1, 2]. Теория БКШ постулирует существование слоя вблизи поверхности Ферми, в котором электроны с противоположными спинами образуют связанные пары, а вне этого слоя считается, что электроны не взаимодействуют.

Модель теории БКШ с достаточно высокой точностью предсказывает экспериментальное открытие веществ с критической температурой вплоть до 40 K, хотя большая часть известных на тот момент веществ обладала близкой к нулю критической температурой. До 1986 г. самой высокой критической температурой, равной 23 K, обладал сплав Nb_3Ge, что являлось скорее исключением из правил. Однако в 1986 г. И. Беднорцем и К. Мюллером был открыт сверхпроводник на основе оксидов меди, лантана и бария $La_{2-x}Ba_xCuO_4$ с критической температурой 35 K, затем был получен сплав $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ с $T_c = 40$ K [3], что дало повод для ввода нового понятия — высокотемпературный сверхпроводник. Вскоре после этого были синтезированы сплавы с критической температурой вплоть до 130 K [4], которые не могли быть корректно описаны существующей теорией [5].

Как правило, высокотемпературная сверхпроводимость реализуется в семействе сверхпроводящих керамик, в которых можно выделить медно-кислородные слои и слои различных примесей [6]. Кроме семейства керамик существуют и другие семейства веществ. Можно найти данные об открытии ВТСП в интерметаллидах [7], например, соединение $MgBr_2$ с $T_c = 40$ K, в семействе веществ на основе железа [8], например, соединение GdOFeAs с $T_c = 55$ K. Перспективным считается семейство на основе ртутных соединений. Однако на данный момент семейство керамик обладает самыми высокими показателями критической температуры T_c. Принято считать, что существование ВТСП в керамиках обусловлено именно наличием хорошо разделяемых слоев оксида меди. Данная гипотеза подтверждается анализом ВТСП на основе железа, так как вещества из этого семейства также обладают слоистой структурой. Известно, что, как и в случае низкотемпературных сверхпроводников, электроны проводимости в слоях оксида создают куперовские пары. Если в низкотемпературном случае спаривание осуществляется за счет электрон-фононного взаимодействия, то вопрос о причине спаривания электронов в высокотемпературном случае остается открытым.

Наличие изотопического эффекта в сверхпроводниках привело к появлению одного из направлений исследования в этой области. Как известно, изотопический эффект заключается в связи критической температуры T_c с массой вещества M соотношением вида $T_c M^a = \mathrm{const}$, где a называется индексом изотопического эффекта. Для высокотемпературных сверхпроводников этот эффект также имеет место. При анализе индекса a для различных сплавов было замечено, что при росте критической температуры T_c величина этого индекса уменьшается. На основе этих результатов можно сделать вывод, что фононный механизм спаривания электронов, являющийся основным для низкотемпературных сверхпроводников, в случае высоких критических температур объединяется с неким другим механизмом. В качестве такого механизма в настоящей работе рассматриваются спиновые флуктуации совместно с фононным механизмом [9].

Существует ряд экспериментов над сплавами вида $La_{2-x}Sr_xCuO_4$, в которых при концентрации примесей $x \geqslant 0.02$ происходит исчезновение дальнего антиферромагнитного порядка, а последующее рождение сверхпроводящего состояния сопровождается наличием спиновых флуктуаций [10–12]. Было бы логичным предположить наличие этих флуктуации далее в сверхпроводящем состоянии. В экспериментах над высокотемпературными сплавами на основе меди было обнаружено, что спиновые флуктуации, в отличие от низкотемпературных случаев, достаточно энергетичны, а скорость спиновых возбуждений (10^6 см/с) на порядок превышает скорость звука в этом веществе (10^5 см/с) [11, 12], что может говорить об активном участии этого механизма во взаимодействии электронов.

Основной задачей настоящей работы авторы считают построение выражения для T_c в наиболее общем случае или при необходимости — с минимальным количеством упрощающих допущений. Выражение для T_c строится последовательным построением сначала модельного гамильтониана на основе модели Фрелиха [13], затем диагонализации этого гамильтониана методом преобразования Боголюбова «$u - v$» и, наконец, решением интегрального уравнения для энергетической щели Δ

$$\Delta(\omega) = \int\limits_0^{\hbar\omega_c} \frac{\Delta(q)}{q} Q(q,\omega)\, \mathrm{th}\left(\frac{q}{2kT}\right) dq. \qquad (1)$$

1. Построение ядра интегрального уравнения для щели Δ

Как было отмечено выше, спаривание электронов может быть объяснено взаимодействием колебаний решетки и спиновых флуктуаций электронов проводимости [14–20]. Иными словами, электроны взаимодействуют друг с другом путем обмена квазичастицами, которые представляют собой квант связанных колебаний ионов кристаллической решетки со спиновыми флуктуациями электронов.

Выберем гамильтониан, описывающий фононную, спиновую часть, а также их взаимодействие. Уточним, что рассматривается модельный случай изотропной кристаллической решетки. Оператор $\widehat{A}$ имеет вид $A_k^\alpha = \partial\Omega/\partial x_k$ и является вектором намагниченности, а $\alpha_s = J_0\langle r_c\rangle^2$, где $J_0 = \int dx J(x)$ — потенциал обменного взаимодействия, $\langle r_c\rangle^2$ — обменный радиус корреляции. Для того чтобы описать в нашей системе спиновые флуктуации, введем $\delta\widehat{\Omega}$ и $\Delta\widehat{A}$ как малые изменения спиновых переменных. В качестве оси квантования выбирается ось z:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_s + \widehat{H}_{\mathrm{ph}} + \widehat{H}_{s-ph} =$$
$$= \int d\boldsymbol{x} \left[\frac{\widehat{m}_z^2}{2\chi} + \frac{1}{2}\alpha_s\left(\Delta\widehat{A}_{\nu z}^2\right) - J_0\delta\widehat{\Omega}^2 + \frac{\widehat{p}_\nu^2}{2\rho} + \frac{1}{2}\lambda\widehat{u}_{i\nu}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\widehat{p}'_\nu}{\rho}\widehat{m}_z\delta_{\nu'\nu}(\Delta\widehat{A}_{\nu z}) + \frac{\chi}{2\rho^2}p_{\nu'}p_{\nu''}\delta_{\nu'\nu_1}\delta_{\nu''\nu_2}\left(\Delta\widehat{A}_{\nu z}^2\right)\right], \qquad (2)$$

где $\widehat{\Omega}$ — оператор электронной намагниченности, χ — эффективная парамагнитная восприимчивость, $\widehat{m}^2/2\chi$ — оператор кинетической энергии спиновой системы, s — спин электрона, $\widehat{p}_\nu$ и $\widehat{u}_i$ — операторы фононов, а ρ — плотность вещества [14, 15].

Дальнейший шаг — переход к операторам в форме вторичного квантования, подчиняющимся статистике Бозе. Гамильтониан в новых операторах имеет вид

$$\widehat{H} = E_s + E_\nu + E_3 + \sum_{k,\nu=1,2} \omega_{ck\nu}\widehat{b}_{k\nu}^+\widehat{b}_{k\nu} +$$
$$+ \sum_k \left[\omega_{sk}\widehat{a}_{kz}^+\widehat{a}_{kz} + \omega_{ck3}\widehat{b}_{k3}^+\widehat{b}_{k3} - \right.$$
$$\left. - q_k\left(\widehat{b}_{k3}\widehat{a}_{-kz} - \widehat{b}_{k3}\widehat{a}_{kz}^+ - \widehat{b}_{-k3}^+\widehat{a}_{-kz} + \widehat{b}_{-k3}^+\widehat{a}_{kz}^+\right)\right]. \qquad (3)$$

Первые слагаемые E_s, E_ν и E_3 не содержат операторов рождения и уничтожения, а потому могут быть интерпретированы как энергии нулевых колебаний в спиновой и фононной системах, ω_{sk} — частота продольной спиновой волны, а ω_{ck3} — фононная мода, линейно связанная со спиновой. Важно отметить, что поперечные волны взаимодействуют с фононами нелинейном образом и в дальнейшем не рассматриваются.

При помощи стандартного преобразования Боголюбова «$u - v$» гамильтониан (3) диагонализуется:

$$\widehat{H} = \sum_{k,\nu=1,2} \omega_{\nu ck}\widehat{b}_{k\nu}^+\widehat{b}_{k\nu} + \sum_k \varepsilon_{ks}\widehat{c}_{kz}^+\widehat{c}_{kz} + \sum_k \varepsilon_{k3}\widehat{d}_{k3}^+\widehat{d}_{k3}. \qquad (4)$$

Так как в процессе диагонализации был совершен переход к новым операторам рождения–уничтожения, то уместно говорить уже о квазимагнонах (операторы $\widehat{c}_{kz}^+, \widehat{c}_{kz}$) и квазифононах (операторы $\widehat{d}_{k3}^+$, $\widehat{d}_{k3}$), тогда как ε_{sk} и ε_{3k} — частоты связанных спин-фононных колебаний, где $z = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ — безразмерный параметр спин-фононной связи, ξ — параметр спин-фононной связи:

$$\varepsilon_{ks}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\omega_{sk}^2 + \omega_{ck3}^2\right) + \sqrt{\left(\omega_{sk}^2 - \omega_{ck3}^2\right)^2 + 4z^2\omega_{sk}^2\omega_{ck3}^2}\right],$$
$$\varepsilon_{k3}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\omega_{sk}^2 + \omega_{ck3}^2\right) - \sqrt{\left(\omega_{sk}^2 - \omega_{ck3}^2\right)^2 + 4z^2\omega_{sk}^2\omega_{ck3}^2}\right].$$

Следующим шагом является построение ядра $Q(q,\omega)$ интегрального уравнения для энергетической щели Δ. Выделяя часть, ответственную за взаимодействие со спиновыми флуктуациями, получим

$$\widehat{H}_{e-\mathrm{ph}} = \frac{g_{\mathrm{ph}}}{\sqrt{V}}\sum_{q_1,q_2}\frac{1}{\sqrt{2\langle\omega_D\rangle}}\left[\sqrt{\omega_{cq_1\nu}}(n_\nu e_\nu)\left(\widehat{b}_{q_1\nu} + \widehat{b}_{-q_1\nu}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\omega_{cq_13}}(n_3e_3)\left(\widehat{b}_{q_13} + \widehat{b}_{-q_13}^+\right)\right]\widehat{c}_{q_2}^+\widehat{c}_{q_2-q_1}, \qquad (5)$$

где g_{ph} — константа связи электрон-фононного взаимодействия, ω_{cq_ν} — частота фононов с поляризацией ν, e_ν — вектор поляризации фононов, $\langle\omega_D\rangle$ — энергия Дебая или максимальная энергия фононов, участвующих во взаимодействии, n_ν — единичные векторы, соответствующие волновому вектору q_ν.

Представляя ядро интегрального уравнения для щели как суперпозицию трех гриновских функций, а также учитывая все коэффициенты гамильтониана (5), получим

$$Q(q,\omega) = N(0)\frac{g_{\text{ph}}^2}{9\langle\omega_D\rangle}\Bigg\{2\frac{\omega_{cq_1\nu}}{\omega^2+\omega_{cq_1\nu}^2} + \\ + \omega_{cq_13}\bigg(|u_{33}(q_1)+v_{33}(q_1)|^2\frac{\varepsilon_{cq_13}}{\omega^2+\varepsilon_{cq_13}^2} + \\ + |u_{3z}(q_1)+v_{3z}(q_1)|^2\frac{\varepsilon_{sq_1}}{\omega^2+\varepsilon_{sq_1}^2}\bigg)\Bigg\}, \quad (6)$$

где $N(0)$ — нормировочный множитель. Также было произведено усреднение единичных векторов и векторов поляризации, что в итоговом варианте дало множитель $\frac{1}{9}$. Введем обозначение $\lambda_0 = N(0)g_{\text{ph}}^2(9\langle\omega_D\rangle)^{-1}$, учтем явный вид функций преобразования «$u-v$» и перейдем к длинноволновому пределу, в котором наше ядро записывается в виде

$$Q(q,\omega) = \lambda_0\left\{2 + \frac{4q_k^2\omega_{sk}\omega_{ck3}}{\left(\varepsilon_{k3}^2-\varepsilon_{ks}^2\right)\left(\varepsilon_{k3}^2-\omega_{ck3}^2\right)} + \frac{\varepsilon_{ks}^2-\omega_{sk}^2}{\varepsilon_{ks}^2-\varepsilon_{k3}^2}\right\}. \quad (7)$$

2. Решение интегрального уравнения для щели Δ

Как можно заметить, решение, как и анализ уравнения (1), с использованием ядра (7) не представляется выполнимой задачей. Для дальнейшего исследования выберем резонансную область, в которой происходит наиболее интенсивное спаривание электронов, а поэтому выделение именно этой области никаким образом не сужает физический смысл модели. Область резонанса $\omega_{sk} \cong \omega_{ck3} = \omega_r$ позволит упростить ядро, используя следующие соотношения:

$$\varepsilon_{k3}^2-\varepsilon_{ks}^2 = -2\omega_r^2 z_r, \quad \varepsilon_{k3}^2-\omega_{ck3}^2 = -\omega_r^2 z_r, \quad \varepsilon_{ks}^2-\omega_{sk}^2 = \omega_r^2 z_r. \quad (8)$$

Запишем ядро, используя выражения (8), как

$$Q(q,\omega) = \lambda_0\left\{\frac{5}{2} + \frac{2}{z_r^2}\frac{q^2}{\omega^2}\right\}. \quad (9)$$

Далее будем говорить о резонансных переменных q_r и ω_r, поэтому индекс r для простоты опустим. Запишем итоговое уравнение для энергетической щели

$$\Delta(\omega) = \lambda_0\int\limits_0^{\hbar\omega_c}\frac{\Delta(q)}{q}\left\{\frac{5}{2} + \frac{2}{z_r^2}\frac{q^2}{\omega^2}\right\}\text{th}\left(\frac{q}{2kT}\right)dq. \quad (10)$$

Для решения (10) был найден алгоритм, позволяющий найти выражение для щели Δ, более не упрощая текущее ядро $Q(q,\omega)$. Данный алгоритм применим к уравнениям вида

$$y(x) - \lambda\int\limits_a^b[Ag(x)+Bg(t)]h(t)y(t)\,dt = f(x). \quad (11)$$

Совершив перегруппировку слагаемых в выражении (10), можно легко установить соответствие с модельным уравнением (11):

$$\Delta(\omega) = \lambda_0\int\limits_0^{\hbar\omega_c}\Delta(q)\left\{\frac{2}{z_r^2}\frac{1}{\omega^2} + \frac{5}{2}\frac{1}{q^2}\right\}q\,\text{th}\left(\frac{q}{2kT}\right)dq. \quad (12)$$

Подобрав коэффициенты, можно решать уравнение (12) алгоритмом для модельного уравнения (11). Первым шагом является построение характеристических значений уравнения (12) по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)s_1 \pm \sqrt{(A-B)^2s_1^2+4ABs_0s_2}}{2AB\left(s_1^2-s_0s_2\right)},$$

где

$$s_0 = \int\limits_a^b h(x)\,dx, \quad s_1 = \int\limits_a^b g(x)h(x)\,dx, \\ s_2 = \int\limits_a^b g^2(x)h(x)\,dx. \quad (13)$$

Формально решение (12) сводится к расчету интегралов (13) и последующего осмысленного составления из них различных комбинаций. К сожалению, из трех интегралов s_0, s_1 и s_2 только интеграл s_0 может быть рассчитан аналитически, однако наличие в этом решении дилогарифма Эйлера, а также тот факт, что под аргументом дилогарифма находится экспонента с температурной зависимостью T_c, делает дальнейшее выделение критической температуры в конечном решении практически невозможной задачей. Авторами был выбран подход оценок этих интегралов снизу или сверху, который, несмотря на свою очевидную грубость, позволяет получить конечный результат для энергетической щели Δ. Явные выражения для интегралов s_0, s_1 и s_2 имеют вид

$$s_0 = \lambda_0\frac{\hbar^2\omega_c^2}{2}, \quad s_1 = \lambda_0\ln\left[\frac{e\hbar\omega_c}{2kT_c}\right], \\ s_2 = \lambda_0\left(\frac{3}{2} - \frac{2k^2T_c^2}{\hbar^2\omega_c^2}\right). \quad (14)$$

Используя выражения для интегралов s_0, s_1 и s_2, возможно явно записать выражение для характеристических значений уравнения (12):

$$\lambda_{1,2} = \left\{(4+5z_r^2)\ln\left[\frac{e\hbar\omega_c}{2kT_c}\right] \pm \\ \pm\sqrt{(4-5z_r^2)^2\ln^2\left[\frac{e\hbar\omega_c}{2kT_c}\right] + 4z_r^2(3\hbar^2\omega_c^2-4k^2T_c^2)\cdot 5}\right\}\times \\ \times\left\{5\cdot\left[4\ln^2\left[\frac{e\hbar\omega_c}{2kT_c}\right] - \left(3\hbar^2\omega_c^2-4k^2T_c^2\right)\right]\right\}^{-1}. \quad (15)$$

Общее решение для уравнения (12) имеет вид

$$\Delta(\omega) = C\Delta_{1,2}, \quad \Delta_{1,2} = g(\omega) + \frac{1-\lambda_{1,2}As_1}{\lambda_{1,2}As_0}, \quad (16)$$

где C — некоторая константа, не зависящая от переменной ω, а $\Delta_{1,2}$ имеет вид

$$\Delta_{1,2} = \frac{1}{\omega^2} + \left\{ \left(-4+5z_r^2\right) \ln\left[\frac{e\hbar\omega_c}{2kT_c}\right] \mp \mp\sqrt{4z_r^2\left(-4k^2T_c^2+3\hbar^2\omega_c^2\right)\cdot 5 + \left(4-5z_r^2\right)^2 \ln^2\left[\frac{e\hbar\omega_c}{2kT_c}\right]} \right\} \times \times \left\{4\hbar^2\omega_c^2\right\}^{-1}. \quad (17)$$

Произведя замену переменных

$$x = \left(-4+5z_r^2\right) \ln\left[\frac{e\hbar\omega_c}{2kT_c}\right], \quad (18)$$

$$y = 4\left(-4k^2T_c^2 + 3\hbar^2\omega_c^2\right)\cdot 5, \quad (19)$$

получим итоговое выражение для энергетической щели Δ:

$$\Delta = \frac{1}{\omega_r^2} + \frac{x}{4\hbar^2\omega_c^2} + \frac{\sqrt{x^2+z_r^2 y}}{4\hbar^2\omega_c^2}. \quad (20)$$

Хотя получение явного вида критической температуры T_c, используя выражение (20), представляется невозможным при выбранном уровне допущений, некоторые качественные оценки могут быть сделаны уже сейчас.

Так, например, можно заметить, что при малых частотах ω значение для энергетической щели Δ возрастает. Если вспомнить, то под частотами ω подразумеваются резонансные частоты ω_r. То есть мы получили, что при уменьшении значения резонансных частот ω_r происходит увеличение ширины энергетической щели Δ, а уменьшение значения резонансных частот ω_r вызвано увеличением параметра связи ξ. Другими словами при увеличении параметра связи ξ поднимаются ветви частот связанных спин-фононных колебаний, что влечет за собой уменьшение значения резонансных частот ω_r, которые, в свою очередь, влияют на увеличение ширины энергетической щели Δ. Как известно, увеличение ширины энергетической щели Δ влечет за собой увеличение критической температуры T_c. Можно сказать, что предложенная модель позволяет теоретически объяснить увеличение критической температуры T_c у ряда веществ.

Так как формально данный подход претендует на общий, даже несмотря на удачное качественное описание физики модели, остается вопрос связи конечного результата с уже известным заранее результатом теории БКШ. Нас интересует именно связь конечного результата, так как большинство шагов к получению этого результата строилось на основе уже известных стандартных подходов. Авторы видят потенциальное развитие данной части теории в анализе выражения, которое получается требованием обнуления или сокращения в выражении (20) слагаемого, содержащего корень. Тогда, путем несложных преобразований, можно получить выражение для критической температуры T_c, которое структурно очень напоминает классический результат теории БКШ:

$$T_c = \frac{e\hbar\omega_c}{k}\, e^{-\widetilde{A}\widetilde{f}},$$

где $\widetilde{A} = 4\hbar^2\left(-4+5z_r^2\right)^{-1}$, $\widetilde{f} = \frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left(\omega_r^2\Delta - 1\right)$.

3. Решение интегрального уравнения для щели Δ методом прямоугольных ям

Для нахождения выражения для критической температуры T_c уже в явном виде воспользуемся методом прямоугольных ям [21]. Метод предполагает разбиение интервала интегрирования в уравнении (1) на подинтервалы с последующей аппроксимацией ядра на этих интервалах константами. Затем предлагается решать набор алгебраический уравнений, результатом которых является выражение для температуры T_c.

В настоящей модели предлагается взять три интервала: $(0,\omega_D)$, (ω_D,ω_s) и (ω_s,ω_c). На первом интервале $(0,\omega_D)$ основной вклад в ядро дает фононная система, а потому, учитывая три поляризации фононов, а также грубое усреднение $1/2$, получим константу, равную $3\lambda_0$. Во втором интервале (ω_D,ω_s) будет преобладать спиновая система и ее взаимодействие с фононной, а потому, учитывая только две активно взаимодействующие моды и усреднение, получаем константу, равную λ_0. Последний член нашего модельного потенциала $-\mu$ характеризует кулоновское отталкивание электронов, поэтому он существует во всех интервалах. В выбранных обозначениях

$$Q_{11} = 3\lambda_0 - \mu,$$
$$Q_{12} = Q_{22} = Q_{21} = \lambda_0 - \mu,$$
$$Q_{13} = Q_{23} = Q_{33} = Q_{32} = Q_{31} = -\mu.$$

Для нахождения температурной зависимости предлагается допустить существование трех энергетических щелей $\Delta_{1,2,3}$, по одной на каждый выбранный интервал.

Система алгебраических уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} -\Delta_1 = Q_{11}Z_1\Delta_1 + Q_{12}Z_2\Delta_2 + Q_{13}Z_3\Delta_3, \\ -\Delta_2 = Q_{21}Z_1\Delta_1 + Q_{22}Z_2\Delta_2 + Q_{23}Z_3\Delta_3, \\ -\Delta_3 = Q_{31}Z_1\Delta_1 + Q_{32}Z_2\Delta_2 + Q_{33}Z_3\Delta_3, \end{cases} \quad (21)$$

где $Z_{1,2,3}$ в пределе слабой связи имеют вид

$$Z_1 = \ln\left[\frac{1.14\hbar\omega_D}{kT_c}\right], \quad Z_2 = \ln\left[\frac{\omega_s}{\omega_D}\right], \quad Z_3 = \ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right].$$

Можно записать выражения для $\Delta_{1,2,3}$, пользуясь формулами Крамера для системы алгебраических уравнений, так что $\Delta_{1,2,3} = D_{1,2,3}/D_0$:

$$\begin{cases} \Delta_1 = -\dfrac{\Delta_1-\Delta_2}{2Z_1\lambda_0}, \\ \Delta_2 = \dfrac{\Delta_1-3\Delta_2+2\Delta_3}{2Z_2\lambda_0}, \\ \Delta_3 = \dfrac{\mu\Delta_2+\Delta_3(-\mu+\lambda_0)}{\mu Z_3\lambda_0}. \end{cases} \quad (22)$$

Теперь, последовательно выделяя Δ_3, Δ_2, получаем выражение для Δ_1, содержащее в слагаемом Z_1 температурную зависимость T_c:

$$\Delta_1 = \\ = -\frac{\Delta_1\big(-1+\mu Z_3+Z_2(\mu+(-1+\mu Z_3)\lambda_0)\big)}{Z_1\Big(\mu+\lambda_0\big(-3+3\mu Z_3+2Z_2(\mu+(-1+\mu Z_3)\lambda_0)\big)\Big)}. \tag{23}$$

Подставляя выражения для Z_1, Z_2 и Z_3 в явном виде, получим

$$\ln\left[\frac{1.14\hbar\omega_D}{kT_c}\right] = \\ = -\left\{-1+\mu\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right] + \right. \\ \left. +\ln\left[\frac{\omega_s}{\omega_D}\right]\left(\mu+\left(-1+\mu\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]\right)\lambda_0\right)\right\}\times \\ \times\left\{\mu+\lambda_0\left(-3+3\mu\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]+\right.\right. \\ \left.\left. +2\ln\left[\frac{\omega_s}{\omega_D}\right]\left(\mu+\left(-1+\mu\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]\right)\lambda_0\right)\right)\right\}^{-1}. \tag{24}$$

Удобно сделать замену переменных

$$\varphi = -1+\mu\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]+ \\ +\ln\left[\frac{\omega_s}{\omega_D}\right]\left(\mu+\left(-1+\mu\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]\right)\lambda_0\right),$$

$$\phi = -3+3\mu\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]+ \\ +2\ln\left[\frac{\omega_s}{\omega_D}\right]\left(\mu+\left(-1+\mu\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]\right)\lambda_0\right).$$

В новых переменных выражение для T_c примет вид

$$T_c = \frac{1.14\hbar\omega_D}{k}\exp\left[-\frac{\varphi}{\mu+\lambda_0\phi}\right]. \tag{25}$$

Метод прямоугольных ям, несмотря на свою простоту и некоторую грубость в аппроксимации ядра $Q(q,\omega)$ уравнения (1) для энергетической щели Δ, дает довольно неплохой результат. К примеру, итоговое выражение (25) обладает узнаваемой структурой, характерной для классического результата теории БКШ. Проводя качественный анализ функций φ и ϕ, а также конструкции, которую они создают в (25), можно говорить о некотором увеличении критической температуры T_c при учете спиновых взаимодействий.

Заключение

В настоящей работе на основе флуктуационной теории высокотемпературной сверхпроводимости получен спектр связанных спин-фононных колебаний, с помощью которого качественно может быть объяснен рост критической температуры T_c в магнитных сверхпроводящих системах.

На базе модели Фрелиха о взаимодействии фононов с электронами как основном механизме сверхпроводимости был построен модельный гамильтониан, учитывающий фононную и спиновую системы, а также взаимодействие фононов со спиновыми флуктуациями.

С помощью унитарного преобразования Н. Н. Боголюбова гамильтониан был приведен к диагонализованному виду, в котором описывается взаимодействие квазифононов и квазимагнонов. На основе диагонализованного гамильтониана получено ядро $Q(q,\omega)$ уравнения для энергетической щели Δ.

Далее было рассмотрено общее решение этого уравнения в области резонанса, именно в которой происходит пиковое взаимодействие электронов. Результатом такого подхода стало выражение для энергетической щели Δ, учитывающее взаимодействие со спиновыми флуктуациями. К сожалению, получение явного выражения для критической температуры T_c оказалось невозможным, однако на основе качественного анализа была показана тенденция к росту T_c при учете введенного механизма спаривания. Так как основное решение претендует на общность, был показан возможный частный случай, при котором можно получить известные классические результаты.

Для полноты исследования было предложено использовать модернизированный метод прямоугольных ям для получения явной зависимости критической температуры T_c. Несмотря на грубую аппроксимацию ядра $Q(q,\omega)$, удается сохранить физику модели и получить результат, который способен качественно описывать повышение критической температуры T_c для ряда веществ.

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* Избранные труды. В 3 т. Киев, 1971.
2. *Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. М., 1958.
3. *Bednorz J.G., Muller K.A.* // Phys. B. 1986. **64**. P. 189.
4. *Sheng Z.Z., Hermann A.M.* // Nature. 1988. **332**. 6159. P. 55.
5. *Mason T.E., Aeppli G., Mook H.A.* // Phys. Rev. Lett. 1987. **68**. 1414.
6. *Batlogg B.* // Solid State Comm. 1998. **107**. P. 639.
7. *Preuss P.* // Berkeley Lab. Retrieved 12 March 2012.
8. *Zhi-An R., Guang-Can C., Xiao-Li D.* // EPL. 2008. **83**. 17002.
9. *Lynn J.W.* // Phys. Rev. Lett. 1990. **148**, No. 1—2. P. 115.
10. *Guo-meng Z., Singh K.K.* // Phys. Rev. B. 1994. **50**. P. 4112.
11. *Endoh Y., Yamada K., Gable D.* et al. // Phys. Rev. B. 1988. P. 4112.
12. *Shirane G., Endoh Y., Burgenear R.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1987. **59**. P. 1613.
13. *Frolich H.* // Proc. Roy. Soc. 1952. A.**215**. P. 291.
14. *Sadovnikov B.I., Savchenko A.M.* // Physica. A. 1999. **271**. P. 411.
15. *Дергачев М.А., Савченко А.М., Садовников Б.И.* // Мат. заметки. 2013. **93**. P. 3.

16. *Алабердин Е.Р., Вихорев А.А., Савченко А.М., Садовников Б.И.* // Теор. и мат. физ. 1996. **107**. P. 129.
17. *Алабердин Е.Р., Вихорев А.А., Савченко А.М., Садовникова М.Б.* // Теор. и мат. физ. 1999. **120**. P. 144.
18. *Sadovnikova M.B., Savchenko A.M., Scarpetta G.* // Phys. Lett. A. 2000. **274** P. 236.
19. *Савченко А.М., Садовникова М.Б., Карчев О.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. **6**. P. 51. (*Savchenko A.M., Sadovnikova M.B., Karchev O.G.* // Moscow University Phys. Bull. 2008. **63**, N 6. P. 420.)
20. *Tallon J.L., Loram J.W.* // Physica. C. 2001. **349**. P. 53.
21. *Коэн М., Глэдстоун Г., Йенсен М., Шриффер Дж.* Сверхпроводимость полупроводников и переходных металлов. М., 1972. (*Cohen M.L.* // Superconductivity / Ed. by R. D. Parks. N. Y., 1969. P. 615; *Gladstone G., Jensen M.A., Shriffer J.R.* // Ibid. P. 665.)

A study of the equation for an energy gGap on the basis of the fluctuation theory of high-temperature superconductivity

M. E. Bychkov[a], **A. M. Savchenko**[b], **B. I. Sadovnikov**

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *bychkov.m.e@gmail.com,* [b] *a.m.savchenko@gmail.com.*

The equation for an energy gap is investigated using the fluctuation theory of high-temperature superconductivity. It is shown that the proposed mechanism can explain an increase in critical temperature, T_c. An explicit expression for the critical temperature is obtained using the technique of rectangular pits.

Keywords: high-temperature superconductivity, spin fluctuations, phonons.
PACS: 74.20.–z.
Received 23 June 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2015).

Сведения об авторах

1. Бычков Максим Евгеньевич — аспирант; e-mail: bychkov.m.e@gmail.com.
2. Савченко Александр Максимович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: a.m.savchenko@gmail.com.
3. Садовников Борис Иосифович — доктор физ.-мат. наук, профессор.