Тороидальное разложение векторного потенциала магнитного поля и его приложения

В. В. Аксенов

Институт вычислительной математики и математической Геофизики СО РАН.
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 6.
E-mail: aksenov@omzg.sscc.ru

Статья поступила 05.05.2015, подписана в печать 28.08.2015.

Предложено тороидальное (ортогональное) разложение векторного потенциала магнитного поля. На основе этого разложения разработаны уравнения электродинамики постоянного и переменного электромагнитных полей. Обсуждаются приложения разработанной теории к природным явлениям и лабораторным экспериментам.

Ключевые слова: тороидальное разложение, векторный потенциал.
УДК: 517.958. PACS: 02.30.Em.

1. О тороидальном разложении

Проблема представления бездивергентного векторного поля вспомогательным векторным полем не является чем-то необычным до тех пор, пока исходное бездивергентное векторное поле не приобретает физический смысл. Например, пусть исходное бездивергентное векторное поле есть магнитное поле. Тогда возникают проблемы, исследование которых, с нашей точки зрения, представляет интерес.

Бездивергентное векторное поле $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$ порождает вспомогательное (дополнительное) векторное поле по правилу:

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}. \qquad (1)$$

Если считать, что векторные поля $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{A}$ — математические объекты, изучаемые в математике векторным анализом, то никаких проблем не возникает, так как $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}\equiv 0$. Свойства векторного поля $\boldsymbol{A}$ здесь не имеют значения, так как комбинация математических операторов $\nabla\cdot\nabla\times$ всегда дает ноль из-за исключения подобных членов при любых свойствах векторного поля $\boldsymbol{A}$.

Иная ситуация возникает, когда бездивергентный вектор $\boldsymbol{H}$ является, например, тороидальным или полоидальным магнитным полем электродинамических источников.

Поэтому будем предполагать, что бездивергентное магнитное поле $\boldsymbol{H}$ определено за пределами области с источником, который представляет собой тороидальный электрический ток. Граница этой области регулярна. На этой границе продолжает выполняться условие бездивергентности $\nabla\cdot\boldsymbol{H}|_{\Gamma=0}$. При выполнении вышеперечисленных оговорок, тем не менее возникает вопрос о природе вспомогательного векторного поля $\boldsymbol{A}$, состоящий в следующем. Остается ли вспомогательное векторное поле $\boldsymbol{A}$ математическим объектом или приобретает некие физические свойства, являясь по существу источником векторного магнитного поля $\boldsymbol{H}$, согласно формуле $\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$? Эта проблема известна. В 1960-е гг. в квантовой физике был продемонстрирован простой опыт, результат которого известен под названием эффекта Ааронова–Бома [1]. В нем свойства векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ (так он называется в физике) проявились необычным образом. Объяснений этому эффекту несколько. Наиболее интересны две публикации [2, 3], в которых предлагаются два различных объяснения этого эффекта.

Чтобы выявить свойства теперь уже векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ из формулы (1) автором в [4] было предложено тороидальное (ортогональное) разложение векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ за пределами области с источником в следующем виде:

$$\boldsymbol{A}=(Q\boldsymbol{r})+\nabla\times(Q\boldsymbol{r}). \qquad (2)$$

Здесь Q — скалярная функция трех или четырех переменных, если учесть временную зависимость, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор. Формула (2) однозначно указывает на дуализм векторного потенциала при его тороидальном разложении. Первое слагаемое в (2) есть математический объект, представленный скалярной функцией $Q(r,\theta,\phi,t)$, где r, θ, ϕ — сферические координаты, t — время. Второе слагаемое есть, по существу, тороидальное магнитное поле — физический объект. Действительно, если подставить (2) в (1), получим

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times(Q\boldsymbol{r})+\nabla\times\nabla\times(Q\boldsymbol{r}). \qquad (3)$$

Здесь, по определению, тороидальное магнитное поле $H_T=\nabla\times(Q\boldsymbol{r})$, полоидальное магнитное поле $H_P=\nabla\times\nabla\times(Q\boldsymbol{r})$. Соответствие размерностей в (3) будет продемонстрировано ниже. Поэтому важнейшей проблемой в (2) является присутствие тороидального магнитного поля в векторном потенциале $\boldsymbol{A}$, что делает его дуальным и придает ему физический смысл в том случае, когда тороидальное магнитное поле присутствует в области вне источника, а это далеко не всегда имеет место. Соответствующие теоремы опубликованы в [4].

Таким образом, использование тороидального разложения векторного потенциала позволило выявить физико-математическую природу его составляющих, продемонстрировать его возможный дуализм, но породило новые проблемы. Одной из них является следующая: возможно ли воспроизведение вспомогательного поля вне области с источником с помощью одной скалярной функции. Необходимо найти условия, при которых допустимо расширение действия классической теоремы Гельмгольца об однозначном воспроизведении всего векторного поля вне области по нормальной его компоненте на регулярной границе. Эту проблему решает теорема 1 из [4], доказанная для шара и автоматически распространяемая на области с регулярной границей. Условие, которое при этом возникает, будет обсуждено ниже.

Вторая, не менее сложная проблема порождается псевдотороидальным разложением векторного потенциала из (2) в том случае, когда скалярных функций две и они представлены в разложении следующим образом [5]:

$$\boldsymbol{A} = T\boldsymbol{r} + \nabla \times (P\boldsymbol{r}). \tag{4}$$

Здесь $T = T(r, \theta, \phi, t)$, $P = P(r, \theta, \phi, t)$ — скалярные функции. В этом случае тороидальное магнитное поле будет определено как $\boldsymbol{H}_T = \nabla \times (T\boldsymbol{r})$, а полоидальное как $\boldsymbol{H}_P = \nabla \times \nabla \times (P\boldsymbol{r})$. Вычислим ротор от тороидального поля $\nabla \times \boldsymbol{H}_T = \nabla \times \nabla \times (T\boldsymbol{r}) = \overline{\boldsymbol{H}}_P$. Последняя формула дает полоидальное поле, но от функции T, которая по определению порождает только тороидальное поле. Чтобы снять это противоречие, в [4] предложено ограничиться сугубо тороидальным разложением векторного потенциала в виде (2), положив $T = P = Q$. Однако тогда необходимо решить возникающие принципиальные проблемы.

Первая проблема, как упоминалось выше, касается однозначного воспроизведения всего магнитного поля (тороидального и полоидального) с помощью одной скалярной функции по нормальной компоненте магнитного поля на регулярной границе. Такая теорема доказана в [4]. Связь между компонентами потенциала и функцией Q при этом задается формулами

$$H_{P\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}(Qr) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rA_\phi,$$

$$H_{P\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(Qr) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rA_\theta,$$

$$H_{Pr} = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial(Qr)}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(Qr)}{\partial\phi}\right) = -\frac{1}{\sin\theta}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta A_\phi + \frac{\partial}{\partial\phi}A_\theta\right),$$

$$H_{T\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(Qr) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_r,$$

$$H_{T\phi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(Qr) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}A_r.$$

Вторая проблема возникает из физической картины явления и заключается в необходимости выяснить, могут ли тороидальные токи в области с источником порождать одновременно тороидальное и полоидальное магнитные поля за пределами области с источником. Такая теорема с положительным ответом сформулирована и доказана в [6]. При этом единственным условием, приводящим к положительному результату, в том числе и в [4], является условие $\nabla \times \boldsymbol{H}_T = \boldsymbol{H}_P$. Доказательство его вытекает из тождественных соотношений, если определить векторный потенциал с помощью (2). Действительно,

$$\boldsymbol{H}_T = \nabla \times (Q\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{H}_P = \nabla \times \nabla \times (Q\boldsymbol{r})$$

и тогда

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_T = \nabla \times \nabla \times (Q\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{H}_P. \tag{5}$$

Следующая общетеоретическая проблема появляется тогда, когда ротор вспомогательного векторного поля $\boldsymbol{A}$ равняется нулю ($\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$). Это возможно за пределами источника. Однако необходимо выяснить, какой объект остается в пространстве за пределами источника. Ответ прост: $\boldsymbol{A} = \nabla\phi$. Скалярный потенциал ϕ есть потенциал нулевого поля. Он был использован А. Н. Тихоновым и Д. Н. Четаевым для удовлетворения граничных условий при изучении магнитных полей в анизотропных средах [7, 18, 19,], а также авторами [3] для объяснения эффекта Ааронова–Бома в квантовой физике. Нас же интересуют следующее. С одной стороны, остается ли в пространстве за пределами источника какой-либо физический объект, в случае $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$, а с другой — остается ли верной теорема Стокса о циркуляции вектора $\boldsymbol{A}$ по замкнутому контуру, если $\nabla \times A = 0$. В работе [3] дан отрицательный ответ. По нашему мнению, теорема Стокса справедлива и в этом случае. Более того, в пространстве за пределами источника остается физический объект — тороидальное магнитное поле, определенное с помощью (3). Действительно,

$$\oint(\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{dl}) = \oint(\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{ds}) = \oint(\boldsymbol{H}_T\cdot\mathbf{ds}) + \oint(\boldsymbol{H}_P\cdot\mathbf{ds}). \tag{6}$$

Пусть теперь $\nabla\times\boldsymbol{A} = 0$, тогда $\nabla\times[(Qr)+\nabla\times(Qr)] = 0$. Отсюда $\nabla\psi = [(Qr)+\nabla\times(Qr)]$. Это то же самое, что

$$\boldsymbol{H}_T = \nabla\psi - (Q\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

Здесь ψ и Q — отличные от нуля произвольные скалярные функции класса C^∞.

Пусть теперь за пределами источника полоидальное поле ($\boldsymbol{H}_P = 0$) равно нулю. В этом случае с учетом формулы (7) будем иметь

$$\oint(\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{dl}) = \oint(\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{ds}) = \oint(\boldsymbol{H}_T\cdot\mathbf{ds}) = \oint(\nabla\psi-(Q\boldsymbol{r})) \neq 0. \tag{8}$$

Из (8) следует, что возможна ситуация, когда, несмотря на то что $\boldsymbol{H}_P = 0$, тороидальное поле $\boldsymbol{H}_T$ может оказаться не равным нулю в связи с изначально отличными от нуля скалярными потенциалами ψ и Q или отличной от нуля их разностью в (8).

Это обстоятельство сохраняет действие теоремы Стокса, примененной к векторному потенциалу $\boldsymbol{A}$ в случае $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$, и убеждает в том, что в пространстве за пределами источника в этом случае может остаться физический объект — тороидальное магнитное поле. Это реализует дуализм векторного потенциала, упомянутый выше, и стимулирует к поиску приложений, где бы тороидальное разложение векторного потенциала проявлялось.

2. Приложения электродинамики тороидальных и полоидальных электромагнитных полей

1. Одним из часто возникающих в приложениях вопросов у физиков, геофизиков и технических специалистов в связи с разложениями (2) и (3) является вопрос о соответствии размерностей в них входящих слагаемых. Выше сделана оговорка, что эти разложения вводятся для области вне источника. Когда это условие выполнено, электродинамические источники есть по существу константы, равные интегралам по области с источником. Поэтому при дифференцировании с помощью операторов $\nabla\times$, $\nabla\cdot$, ∇ вне источника в (2) и (3) размерные константы не теряют своей размерности. Действительно, в области с источником при $t = 0$ является справедливым разложение функции Q из (2) в ряд по сферическим функциям вида

$$Q(r,\theta,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \psi_n(r) A_n^m P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \qquad (9)$$

где r, θ, ϕ — сферические координаты точек вне источника. Среднее от функции Q на регулярной границе равно нулю $\langle Q\rangle|_\Gamma = 0$. Комплексные коэффициенты A_n^m при этом равны [6]

$$A_n^m = \int\limits_W \psi_n(r') J_T(r',\theta',\phi') P_n^m(\cos\theta') e^{im\phi'}\, dw'. \qquad (10)$$

Здесь r', θ', ϕ' — сферические координаты точек в области с источником, $J_T(r',\theta',\phi')$ — комплексная плотность тороидального тока в источнике, W — область с источником. Поскольку функция Q в (2) и (3) дифференцируется по не штрихованным координатам области вне источника, то размерные константы A_n^m, включающие физическую величину — плотность тороидального тока, дифференцированием не искажаются. Размерность констант остается без изменений. Поэтому вне источника размерности магнитных полей $\boldsymbol{H}_T$ и $\boldsymbol{H}_P$ из (3) не изменяются при любом количестве указанных выше дифференциальных операторов, примененных к функции Q. Более подробное доказательство этого факта можно найти в [6].

2. В приложении разложений (2) к физике, опираясь на справедливость равенств (5), можно указать на возникающую из (5) возможность взаимной генерации тороидальным полем полоидального и наоборот. Действительно,

$$\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{H}_T = \boldsymbol{H}_P,\\ &\nabla \times \boldsymbol{H}_P = \nabla\times\nabla\times\nabla\times(Q\boldsymbol{r}) = -\nabla\times(\Delta Q\boldsymbol{r}) = \chi \boldsymbol{H}_T, \end{aligned} \qquad (11)$$

где

$$\Delta Q = -\chi Q = \begin{cases} -\dfrac{\gamma}{\eta} Q, & t = 0,\\ -(i\omega\mu\sigma)^{1/2} Q, & t > 0. \end{cases}$$

Здесь γ — скорость диффузии поля; η — магнитная вязкость; $(i\omega\mu\sigma)^{1/2}$ — волновой параметр среды, в которой распространяется переменное магнитное поле; σ — удельная проводимость среды; μ — магнитная проницаемость среды; ω — круговая частота переменного поля. Тогда пара взаимно генерирующих магнитных полей (переменных или постоянных, согласно (11)) есть

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_T = \boldsymbol{H}_P, \quad \nabla \times \boldsymbol{H}_P = \chi \boldsymbol{H}_T \qquad (12)$$

при условии, что взаимная генерация возможна только в проводящей среде, когда параметр $\chi \neq 0$. Эта возможность известна в физике. Здесь она получила тождественное математическое описание, восходящее к тороидальному разложению векторного потенциала (2).

3. Если доопределить в этих же терминах тороидальное и полоидальное электрические поля в виде [8]

$$\boldsymbol{E}_T = -i\omega\mu\nabla\times(Q\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{E}_P = \frac{1}{\sigma}\nabla\nabla\cdot(Q\boldsymbol{r}) \qquad (13)$$

(здесь σ — проводимость среды, где определено полоидальное электрическое поле), то возникает еще одно свойство. Оно важно для приложений переменного электромагнитного поля, а именно его двумодальность. Ее удобно записать в известных терминах электромагнитных полей магнитного и электрического типов.

Поле магнитного типа:

$$\boldsymbol{H}_P^{\rm mt} = \nabla\times\nabla\times(Q\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{E}_T^{\rm mt} = -i\omega\mu\nabla\times(Q\boldsymbol{r}). \qquad (14)$$

Поле электрического типа:

$$\boldsymbol{H}_T^{\rm et} = \nabla\times(Q\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{E}_P^{\rm et} = \frac{1}{\sigma}\nabla\nabla\cdot(Q\boldsymbol{r}). \qquad (15)$$

4. Двумодальность электромагнитного поля выводит на давно известное в физике свойство электромагнитного поля. А именно на силовые и несиловые электромагнитные поля в том смысле, который придал этим свойствам в свое время Лоренц. Соответствующие теоремы опубликованы в [6]. Силовая составляющая электромагнитного поля в источнике имеет вид [6]

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_L = \left[\sigma\boldsymbol{E}_T^{\rm mt}\times\mu\boldsymbol{H}_P^{\rm mt}\right] \neq 0,\\ &\text{ЭДС} = -\mu\oint\limits_W \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}_P^{\rm mt}}{\partial t}\cdot \mathbf{ds}\right) \neq 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Несиловая составляющая соответственно

$$\overline{\boldsymbol{F}}_L = \left[\chi \boldsymbol{H}_T^{\text{et}} \times \mu \boldsymbol{H}_T^{\text{et}}\right] \equiv 0,$$
$$\text{ЭДС} = \oint\limits_W \left(\nabla \times \boldsymbol{E}_P^{\text{et}} \cdot \mathbf{ds}\right) \equiv 0. \tag{17}$$

Двумодальный характер наблюдаемого на Земле магнитного и электромагнитного полей доказан в [6, 8]. Он подтверждает существование в природе вертикального к поверхности Земли электрического поля, наблюдавшегося в экспериментах на местности Д. Н. Четаевым [9]. Присутствие в атмосфере Земли несиловой моды из (15) оправдывает существование вертикального электрического поля в атмосфере Земли, так как это поле есть неотъемлемая часть второй несиловой модификации электромагнитного поля Земли. В прошлом она полностью исключалась из теоретического описания наблюдаемых на Земле электромагнитных полей в атмосфере.

5. Самым, пожалуй, важным из предложенной теории тороидальных и полоидальных электромагнитных полей, восходящих к разложениям (2), является их присутствие в известных дифференциальных уравнениях Максвелла. Явного их присутствия не наблюдается. Однако вариант уравнений Максвелла для тороидальных токов и названных электромагнитных полей H_T, H_P, E_T, E_P (и только для них) можно записать в следующей форме:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_P = \sigma \boldsymbol{E}_T + \frac{\partial \boldsymbol{D}_P}{\partial t} + \chi \boldsymbol{H}_T + \boldsymbol{J}^{\text{ст}}, \quad \nabla \times \boldsymbol{H}_T = \boldsymbol{H}_P,$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E}_T = -\frac{\partial \boldsymbol{B}_P}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{E}_P = 0, \tag{18}$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{H}_P, \boldsymbol{H}_T, \boldsymbol{E}_T, \boldsymbol{E}_P) = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D}_P = \rho, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D}_T = \rho',$$
$$\boldsymbol{B}_P = \mu \boldsymbol{H}_P, \quad \boldsymbol{D}_P = \varepsilon \boldsymbol{E}_P, \quad \boldsymbol{B}_T = \mu \boldsymbol{H}_T, \quad \boldsymbol{D}_T = \varepsilon \boldsymbol{E}_T.$$

Здесь $J^{\text{ст}}$ — сторонний ток. Уравнения только для силовой составляющей в низкочастотной области преобразуются в следующую систему:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_P = \sigma \boldsymbol{E}_T + \chi \boldsymbol{H}_T + \boldsymbol{J}^{\text{ст}}, \quad \nabla \times \boldsymbol{E}_T = -\frac{\partial \boldsymbol{B}_P}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{H}_P, \boldsymbol{B}_P, \boldsymbol{H}_T, \boldsymbol{B}_T, \boldsymbol{E}_T) = 0. \tag{19}$$

Несиловая мода также может быть записана с помощью своих уравнений:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_T = \boldsymbol{H}_P, \quad \nabla \times \boldsymbol{E}_P = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{D}_P}{\partial t} = -\chi \boldsymbol{H}_T,$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{H}_T, \boldsymbol{H}_P, \boldsymbol{E}_P) = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D}_P = \rho, \quad \boldsymbol{D}_P = \varepsilon \boldsymbol{E}_P. \tag{20}$$

Уравнения (18) и (20) содержат в себе ранее не замеченное явление. Оно связано с возбуждением изменяющейся во времени электрической индукцией для полоидального поля $\partial \boldsymbol{D}_P/\partial t$ тороидального магнитного поля $\chi \boldsymbol{H}_T$. Отсюда возникает возможность экспериментальной проверки соотношений (18) и (20) в лабораторных условиях путем измерения магнитного поля магнитометром вблизи конденсатора с сильно поляризующимся веществом между обкладками и с приложенным к обкладкам конденсатора быстро изменяющимся электрическим током. Известный «ток смещения», протекающий между обкладками конденсатора возбуждает несиловое тороидальное магнитное поле малой напряженности, которое необходимо измерять магнитометром из-за его несилового характера. Уравнения (18)–(20) требуют сформулировать граничные условия на регулярных границах областей с источниками. Граничные условия для тороидальных и полоидальных электромагнитных полей устанавливаются, исходя из условий конкретной физической задачи. Они ничем принципиально новым не отличаются от стандартных граничных условий для касательных и вертикальных компонент электромагнитных полей на реальных физических и регулярных математических границах [8]:

$$\boldsymbol{H}_P^1 - H_P^2\big|_{r=R} = 0, \quad \boldsymbol{H}_T^1 - \boldsymbol{H}_T^2\big|_{r=R} = 0,$$
$$\boldsymbol{E}_T^1 - E_T^2\big|_{r=R} = 0, \quad E_{Tn} = 0, \quad E_{Pn}^1 = \frac{\sigma_{\text{E}}}{\sigma'} E_{Pn}^2. \tag{21}$$

Здесь σ_{E} — проводимость верхнего слоя Земли, σ' — проводимость воздуха.

Совокупность уравнений (12), (18)–(20) и граничных условий (21) полностью описывает электродинамику, восходящую к разложению (2).

6. Тем не менее остается проблема о подтверждении существования сформулированной выше электродинамики в природных и лабораторных условиях. Что касается природных условий, в которых существует тороидальное и полоидальное электромагнитные поля и тороидальные электрические токи, то в [8, 10–12] подробно обсуждаются эксперименты и их интерпретация с природными электромагнитными полями по данным всемирной магнитной съемки 1964/65 г. и данным двух международных геофизических годов — 1933 и 1957/58. В этих работах доказано, что тороидальное магнитное поле присутствует в главном геомагнитном поле до 10% напряженности и в спокойных солнечно-суточных вариациях до 40% напряженности на поверхности Земли. Более того, в [11, 12] доказано, что источником тороидального и полоидального магнитного и электромагнитного полей на поверхности Земли являются тороидальные электрические токи, имеющие место в F-слое земного ядра и в ионосфере соответственно. Конфигурация тороидальных токов в источниках восстановлена по данным магнитной съемки 1964/65 г. в постоянном поле и по данным международного геофизического года 1957/58 для спокойных солнечно-суточных вариаций (переменной части наблюдаемого электромагнитного поля на Земле). Экспериментальное подтверждение изложенной здесь электродинамики дает надежду на использование ее в геофизической практике, тем более что пример ее использования для глубинного зондирования Земли приведен в работе [12]. Это пример так называемого двумодального зондирования Земли переменным полем геомагнитных вариаций. Такое зондирование дает более устойчивые результаты, по сравнению с известными результатами

при определении расстояний до проводников в Земле и их удельного сопротивления.

7. Следующим весьма актуальным приложением электродинамики тороидальных и полоидальных электромагнитных полей является прогноз землетрясений. Главная проблема формулируется следующим образом: существуют ли в физических полях реальные предвестники землетрясений и в чем они заключаются? В [13, 14] предложено решать этот вопрос путем математического моделирования поведения физических полей в зависимости от поведения тензора напряжений в очаге. Предложено использовать систему дифференциальных уравнений теплоэлектромагнитоупругости в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial t^2} = \boldsymbol{e}\cdot\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma}_{ij} - \left(3\overline{\lambda}+2\overline{\mu}\right)\alpha\nabla T + \\
+ [\sigma\boldsymbol{E}\times\mu_e\boldsymbol{H}] - \rho\boldsymbol{g} - \boldsymbol{F}_c, \\
\sigma\mu_e\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} = \Delta\boldsymbol{H} + \sigma\mu_e(\boldsymbol{H}\nabla)\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t} - \\
- \sigma\mu_e\left(\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}\nabla\right)\boldsymbol{H} - \sigma\mu_e\boldsymbol{H}\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}, \qquad (22) \\
C_V\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\Delta T - (3\overline{\lambda}+2\overline{\mu})\alpha T_0\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t} + \rho Q.
\end{gathered}$$

Система уравнений (22) описывает связанные эффекты в электро-/теплопроводных деформируемых трещиноватых телах (в нашем случае это объемы в очаговой зоне землетрясений). В этих объемах токи смещения малы, объемный заряд незначителен, джоулевы тепловыделения малы. Система составлена на основе фундаментальных законов сохранения и термодинамических неравенств. При этом свойства среды очага в известных уравнениях входят в виде феноменологических параметров Ламе λ, μ. Однако эти параметры столь сильно усреднены, что невозможно с их помощью увидеть главные микрофизические свойства пород очага. Наиболее важным для прогноза процесса разрушения свойством пород очага, как нам представляется, является их возможная микротрещиноватость, а также наличие в них зерен и пор, способствующих развитию процесса трещинообразования. Поэтому, с нашей точки зрения, для описания состояния очага его среду лучше всего моделировать не параметрами Ламе, а параметрами Работнова–Ломакина [14]. Параметры Работнова–Ломакина задают разномодульную среду, в которой по определению из-за наличия трещин, зерен и пор модуль упругости при растяжении и сжатии разный. В геофизике к такому описанию горных пород впервые обратились авторы из [15]. Они проанализировали ранее полученные результаты такого описания трещиноватых сред и пришли к выводу о приемлемости описания параметров горных пород с трещинами, включениями и порами следующим образом:

$$\overline{\lambda} = \lambda - \nu\xi^{-1}, \quad \overline{\mu} = \mu - \nu\xi. \qquad (23)$$

Параметр трещиноватости ξ в (23) можно определить двумя способами:

1) $\xi = \overline{\sigma}/\overline{\sigma}_0$, $\overline{\sigma} = \frac{1}{3}\sigma_{ij}$, $\overline{\sigma}_0 = \left(\frac{3}{2}S_{ij}\cdot S_{ji}\right)^{1/2}$, где $S_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$ — девиатор напряжений;
2) $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}$, $I_1 = U_{ii}$ — первый инвариант тензора деформаций, $I_2 = \left[\frac{1}{2}U_{ij} + U_{ji}\right]^2$ — второй инвариант тензора деформаций, U_{ij} и U_{ji} — компоненты тензора деформаций.

В этой постановке тензор напряжений Гука–Дюамеля–Неймана в трещиноватой среде очага можно записать следующим образом:

$$\sigma_{ij} = 2\overline{\mu}U_{ij} + \delta_{ij}\overline{\lambda}U_{kk} - \nu\sqrt{I_2} + (3\overline{\lambda}+2\overline{\mu})\alpha(T-T_0). \qquad (24)$$

Параметры, имеющие место в очаге: $\boldsymbol{U}$ — вектор смещений (перемещений); $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль максимального напряжения; $\boldsymbol{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; $\boldsymbol{E}$ — вектор напряженности электрического поля; T — температура; $\boldsymbol{g}$ — вектор ускорения; σ — удельная проводимость среды в очаге; μ_e — магнитная проницаемость среды в очаге; $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$ — коэффициенты Работнова–Ломакина; ν — модуль упругости; ρ — плотность среды в очаге; σ_{ij} — тензор напряжений; $(3\overline{\lambda}+2\overline{\mu})/3$ — модуль всестороннего сжатия, приведенный к трещиноватой среде очага; 3α — коэффициент объемного расширения; χ — коэффициент теплопроводности; C_V — теплоемкость при постоянном объеме; T_0 — начальная температура в очаге; $\boldsymbol{F}_c$ — вектор дополнительных объемных сил (в частности, приливных сил и сил, возникающих в связи с фазовыми превращениями в горных породах очага или сил сцепления скелета горных пород в очаге); Q — дополнительное тепло; U_{ij} — тензор деформаций; δ_{ij} — единичный тензор.

Граничные условия на свободной дневной поверхности Земли для системы (22) имеют традиционный вид

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2\big|_S, \quad \sigma_{ij}\big|_S = 0, \\
\boldsymbol{E}_S^1 = \boldsymbol{E}_S^2, \quad E_n^1 = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_0}E_n^2\Big|_S, \qquad (25) \\
U_1 = U_2\big|_S, \quad T_1 = T_2\big|_S.
\end{gathered}$$

Здесь коэффициент 1 обозначает воздух, коэффициент 2 — Землю, S — поверхность Земли, n — нормаль к поверхности Земли, σ_0 — удельную проводимость воздуха, σ_τ — удельную проводимость верхнего слоя Земли. Подробный анализ проблемы прогноза землетрясений дан в [13, 14]. В них делается вывод о том, что из всех физических полей, измеряемых на Земле, реальным источником сведений о готовящемся землетрясении обладает только вертикальная к поверхности Земли компонента электрического поля из второй несиловой модификации электрического поля, определенной в (15). Эта компонента присутствует в граничных условиях (21) и (25). Ее основное свойство состоит в том, что для нее поверхность Земли является реальным и очень мощным усилителем сигнала, идущего от очага, согласно (25), за счет огромной разницы в удельных проводимостях верхнего слоя Земли и атмосферы

($\sigma_\tau \gg \sigma_0$). Из-за малой проводимости воздуха, располагающейся в знаменателе формулы (25), сигнал от очага, содержащий сведения о тензоре напряжений [13, 14], увеличивается на порядки. Поэтому этот сигнал может быть измерен. Его мониторинг даст информацию о готовящемся землетрясении.

8. Кроме природных явлений, так или иначе содержащих в себе тороидальные электромагнитные поля, эти поля возникают и в лабораторных экспериментах. Самым ярким из них является упомянутый выше эффект Ааронова–Бома [1]. В этом эксперименте квантовая частица, пролетая мимо бесконечно длинной катушки с электрическим током, испытывает отклонение в траектории, несмотря на то, что за пределами такой катушки магнитное поле при классическом его определении равно нулю ($\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$) [1]. Считается, что взаимодействие идет с векторным потенциалом из-за $\boldsymbol{A} = \nabla\overline{\phi}$, хотя скалярный потенциал $\overline{\phi}$ не является физическим объектом. Согласно предложенной здесь электродинамике квантовая частица в эффекте Ааронова–Бома испытывает взаимодействие не с математической функцией — скалярным потенциалом $\overline{\phi}$, а с несиловым тороидальным магнитным полем [17]. При этом теорема Стокса остается справедливой в связи с (8) и вопреки анализу из [3]. Действительно, пусть в пространстве $\Re^3$ вдоль координаты z прямоугольной системы координат x, y, z расположена бесконечно длинная катушка с плотной намоткой, в центре цилиндра которой закреплена кроме прямоугольной еще и сферическая система координат r, θ, ϕ. В проводе катушки циркулирует постоянный электрический ток с плотностью $\boldsymbol{J}$ или переменный с плотностью $\boldsymbol{J}e^{i\omega t}$. Согласно стандартным уравнениям Максвелла эти токи связаны с векторным потенциалом уравнениями $\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}$ или $\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} + \chi^2 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}$, где $\chi = (i\omega\mu\sigma)^{1/2}$. Множитель $e^{i\omega t}$ в последнем уравнении опущен. Ясно, что в катушке циркулирует только ϕ — товая компонента плотности тока $\boldsymbol{J}_\phi$. Спроектируем первое уравнение на ϕ — токовую ось сферической системы координат:

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 rA_\phi}{\partial r^2} + \\ + \frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta A_\phi - \\ - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\theta\partial\phi} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} = J_\phi. \quad (26)$$

Если спроектировать второе уравнение, то к (26) добавится еще слагаемое $\chi^2 A_\phi$. Нетрудно заметить, что, согласно определению (3), последнее слагаемое в (26) есть как раз деленная на координату r удвоенная напряженность $H_{T\theta}$ — компонента несилового магнитного поля $\boldsymbol{H}_T$ $\left(\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} = \frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\phi} = \frac{2}{r}H_{T\theta}\right)$. Поэтому выражение (26) есть прямое доказательство генерирования током проводимости (J_ϕ-компонентой) несиловой компоненты магнитного поля $H_{T\theta}$, которая, согласно формуле (8), остается в пространстве $\Re^3$ даже при $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$. Это обстоятельство обеспечивает взаимодействие квантовой частицы с несиловым тороидальным магнитным полем, а не с векторным потенциалом.

9. В токамаке при попытке удержать сильно нагретую проводящую плазму в целях получения термоядерной реакции также используется сильное тороидальное магнитное поле внутри «бублика» токамака. Согласно развитой здесь электродинамики магнитное поле внутри токамака, скорее всего, подчиняется следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}_T = \nabla \times (Q\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{H}_P = \nabla \times \nabla \times (Q\boldsymbol{r}), \\ &\nabla \times \boldsymbol{H}_T = \boldsymbol{H}_P, \quad\ \ \nabla \times \boldsymbol{H}_P = \chi \boldsymbol{H}_T, \end{aligned} \quad (27)$$

где γ — скорость диффузии поля в плазме тора, μ — магнитная проницаемость в плазме, σ — проводимость плазмы в пространстве тора. Согласно (27) вихри несилового тороидального магнитного поля создают силовое полоидальное магнитное поле и наоборот. Это один из вариантов так называемого динамо-возбуждения магнитного поля [5]. Чем напряженнее тороидальное магнитное поле, создаваемое обмотками тороида, а оно в токамаке обычно достигает 3–5 Тл [16], тем интенсивнее будет созданное им дополнительное полоидальное магнитное поле $\boldsymbol{H}_P$. Фактически происходит самовозбуждение и бесконтрольное нарастание магнитного поля различной топологии, отличной от тороидальной, за счет самого магнитного поля, находящегося внутри токамака и при появлении внутри токамака проводящей плазмы. Это приводит к появлению неконтролируемой неустойчивости плазменного шнура за счет разбегания заряженных частиц плазмы вдоль силовых линий произвольной топологии. Оценка самовозбуждения в большой модели МТР из [16], согласно определениям из (27), выглядит следующим образом. Если принять $\nabla \times \sim \frac{1}{L}$, где L — линейный размер плазменного шнура внутри токамака, то

$$\frac{1}{L}\boldsymbol{H}_P \approx \frac{\gamma}{\eta}\boldsymbol{H}_T, \quad \frac{1}{L}\boldsymbol{H}_T \approx \boldsymbol{H}_P. \quad (28)$$

Пусть малый радиус плазменного шнура $R = 2$ м, тогда $L = 2\pi R = 4\pi$ м, а напряженность тороидального магнитного поля $|\boldsymbol{H}_T| = 5$ Тл. Тогда возбуждаемая тороидальным магнитным полем напряженность дополнительного полоидального магнитного поля будет порядка

$$|\boldsymbol{H}'_P| = 5/4\pi \sim 0.4 \text{ Тл}. \quad (29)$$

При этом оценка скорости диффузии по первоначальным магнитным полям следующая:

$$\gamma = \frac{\eta}{L}\frac{|\boldsymbol{H}_P|}{|\boldsymbol{H}_T|}. \quad (30)$$

В свою очередь дополнительное тороидальное магнитное поле будет прирастать на величину

$$\boldsymbol{H}'_T = \frac{\eta}{L\gamma}\boldsymbol{H}'_P = \frac{\boldsymbol{H}_T}{\boldsymbol{H}_P}\boldsymbol{H}'_P. \quad (31)$$

Процесс самовозбуждения будет нарастать практически мгновенно за счет взаимной генерации упомянутых магнитных полей согласно (27). При этом с ростом температуры внутри токамака скорость диффузии также будет нарастать за счет падения проводимости в плазменном шнуре и роста полоидального поля внутри токамака.

Естественно, что сформулированный здесь подход к описанию электродинамики в токамаке нуждается в более тщательном анализе с привлечением уравнения Больцмана, описывающего поведение частиц плазмы при возрастании температуры в таком сложном магнитном поле, отличном от тороидального, возникающем в токамаке за счет самогенерации. В настоящее время электродинамика в токамаке описывается известными классическими уравнениями Максвелла [16], которые несколько отличаются по своей сути от уравнений (27).

Заключение

Лабораторные эксперименты, приведшие к фиксации эффекта Ааронова–Бома [1], а также многочисленные и неуспешные попытки осуществить возбуждение и удержание термоядерной реакции в токамаке [16], с нашей точки зрения, имеют объяснение в предложенной здесь электродинамике. Квантовый эффект Ааронова–Бома вызван все тем же магнитным полем, только его несиловой составляющей. При этом теорема Стокса остается верной и в этом случае. Дуализм векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ в его не стандартном определении с помощью формул (2) подтверждается эффектом Ааронова–Бома. Что касается электродинамики в токамаке, то в связи с самогенерацией здесь определенных тороидальных и полоидальных магнитных полей в проводящей среде плазменной струи внутри токамака неустойчивость в плазменном шнуре создается за счет разбегания заряженных частиц вдоль силовых линий сложной топологии, отличной от тороидальной. Как преодолевать возникающую самогенерацию магнитного поля внутри токамака, создающую сложную конфигурацию силовых линий магнитного поля внутри токамака, отличную от тороидальной, есть другая, более сложная задача, с которой непременно столкнутся создатели международного проекта ИТЭР.

Список литературы

1. *Aharonov V., Bohm D.* // Phys. Rev. 1959. **115**, № 3. P. 485.
2. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэнс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. М., 1966.
3. *Чирков А.Г., Агеев А.Н.* // Журн. техн. физики. 2001. **71**, № 2. С. 16.
4. *Аксенов В.В.* // Дифференциальные уравнения. 2012. **48**, № 7. С. 1056.
5. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М., 1980.
6. *Аксенов В.В.* // Мат. моделирование. 2014. **26**, № 5. С. 3.
7. *Четаев Д.Н.* // Докл. АН СССР. 1967. **174**, № 4. С. 775.
8. *Аксенов В.В.* Электромагнитное поле Земли. Новосибирск, 2010.
9. *Четаев Д.Н.* Дирекционный анализ магнитотеллурических наблюдений. М., 1985.
10. *Aksenov V.V.* // Bull. of the Novosibirsk Computing Center. 2012. **15**.
11. *Аксенов В.В.* // Изв. вузов. Геология и разведка. 2012. № 5. С. 54.
12. *Аксенов В.В.* // Изв. вузов. Геология и разведка. 2014. № 2. С. 45.
13. *Алексеев А.С., Аксенов В.В.* // Докл. РАН. 2003. **392**, № 1. С. 106.
14. *Аксенов В.В.* // Докл. АН высшей школы России. 2007. № 1 (8). С. 20.
15. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* // Физика Земли. 1984. № 10. С. 71.
16. *Азизов Э.А.* // Усп. физ. наук. 2012. **182**, № 2. С. 202. (*Azizov E.A.* // Phys. Usp. 2012. **55**. P. 190.)
17. *Аксенов В.В.* // Изв. вузов. Геология и разведка. 2012. № 4. С. 61.
18. *Четаев Д.Н.* // Физика Земли. 1966. № 9. С. 105.
19. *Четаев Д.Н.* // ЖТФ. 1962. **32**, № 11. С. 1342.

The toroidal decomposition of the vector potential of a magnetic field and its applications

V. V. Aksenov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: aksenov@omzg.sscc.ru.

The toroidal (orthogonal) decomposition of the vector potential of a magnetic field is proposed. Based on this decomposition, equations of electrodynamics of non-varying and varying electromagnetic fields are derived. Applications of the developed theory to natural phenomena and laboratory experiments are discussed.

Keywords: toroidal decomposition, vector potential.

PACS: 02.30.Em.

Received 5 May 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2015).

Сведения об авторе

Аксенов Валентин Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник;
тел.: (383) 330-93-84, e-mail: aksenov@omzg.sscc.ru.