ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Самосогласованная модель электронной компоненты тонкого токового слоя в магнитосфере Земли

А. А. Быков[a], К. Е. Ермакова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] abkov@yandex.ru

Статья поступила 30.10.2015, подписана в печать 05.11.2015.

Предложена и исследована аналитически и численно самосогласованная модель электронной компоненты тонкого токового слоя (ТТС) земной магнитосферы, основанная на понятии натяжения силовых линий. Показано, что модель имеет определенную область применимости, за пределами которой результаты могут быть некорректны; в пределах области корректности модель позволяет значительно увеличить скорость сходимости итерационного алгоритма решения полной самосогласованной модели ТТС, включающей также уравнения Больцмана для ионной компоненты.

Ключевые слова: тонкий токовый слой, натяжение силовых линий, самосогласованная модель, итерационный процесс, метод крупных частиц.

УДК: 51.73, 53.043. PACS: 94.30.ct, 02.60.Cb.

Введение

Тонкие токовые слои (ТТС) формируются в магнитосферах планет под действием солнечного ветра, который захватывает силовые линии магнитного поля и растягивает их в направлении от источника плазмы. Формирование ТТС и распад ТТС оказывают большое влияние на процессы распространения радиоволн. Теоретическое изучение ТТС является перспективным направлением компьютерного моделирования в геофизике, поэтому изучение ТТС — актуальная проблема. Впервые ТТС в хвосте магнитосферы Земли был описан Норманном Нессом [1], с тех пор ведется интенсивное теоретическое и экспериментальное исследование этого феномена. В работах [2] и [3] рассмотрены тонкие токовые слои в магнитосферах Юпитера и Венеры.

ТТС образуется электронной и ионной компонентами плазмы. Образование и поддержание обусловлены в основном магнитным полем, создаваемым ионами при движении в области сильно изменяющегося магнитного поля. Учет только ионного магнитного поля характерен для модели Харриса [4], которая используется для описания ТТС в ряде работ, например, в [3]. Ввиду большой протяженности ТТС, параметры плазмы на его протяжении изменяются на несколько порядков. Имеются в том числе области, в которых модель Харриса требует уточнения, в том числе учета магнитного поля, создаваемого электронной компонентой плазмы токового слоя. Это было подтверждено рядом численных экспериментов [5–7], которые показали, что в областях со слабым магнитным полем электроны могут нести существенные токи.

В работе [8] для расчета магнитного поля электронной компоненты вычисляются токи, создаваемые дрейфом электронов в скрещенных магнитном и электрическом полях. Учитываются дрейф кривизны магнитной силовой линии, градиентный дрейф и уравнение Пуассона для электрического потенциала. Самосогласованная модель решается итерационным повторением попеременно расчета движения ионной компоненты в заданных магнитном и электрическом полях, расчета ионного тока и создаваемого им поля, расчета электронного тока и электрического потенциала на фоне заданного ионного поля.

В настоящей работе рассматривается самосогласованная модель тонкого токового слоя в магнитосфере Земли с учетом электронной компоненты. Мы учитываем значительное различие в подвижности электронной и ионной компонент, обусловленное большим отношением массы иона и массы электрона. Соответственно время установления равновесия электронной концентрации и электрического потенциала значительно меньше времени реакции ионной компоненты. Это открывает возможность расчета самосогласованного электрического потенциала и электронного тока на заданном ионном фоне, с заданной концентрацией и плотностью ионного тока. Поэтому можно считать, что уравнения нестационарной динамики ионной компоненты можно дополнить выражением для электрического потенциала и электронного тока как легко вычисляемых функций от плотности ионов и ионного тока.

В настоящей работе показано, как можно составить эффективный алгоритм вычисления этих функций, а также что использование электронного функционала значительно ускоряет сходимость итерационного процесса для ионной компоненты.

Показано, что в рамках описания самосогласованной модели электронной компоненты, основанной на понятии натяжения силовых линий, возникают ограничения на некоторые параметры, которые должны учитываться также в стандартном подходе, не включающем самосогласованную электронную модель.

1. Самосогласованная модель

1.1. Модель ионной компоненты плазмы ТТС

1. Уравнение Больцмана с учетом магнитного поля. Для описания ионной компоненты используем уравнение Больцмана с учетом электрического и магнитного полей [9]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{V} \nabla_{\boldsymbol{r}} f + \frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}\right) \nabla_{\boldsymbol{v}} f = \frac{\delta f}{\delta t} \qquad (1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. В условиях ТТС плазму можно считать разреженной, так что столкновительный член $\delta f/\delta t$ можно считать равным нулю. Мы рассматриваем медленно протекающие процессы, поле меняется мало за время пролета каждого иона (в том числе и ионов с наименьшей энергией). Поэтому уравнение (1) рассматривается в стационарной форме $\partial f/\partial t = 0$. Выделим область ТТС $G = \{-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ -d < z < d\}$, вне которой поле можно считать однородным, $\boldsymbol{B}^{(+)} = (-B_0, 0, B_n)$ при $z > d$ и $\boldsymbol{B}^{(-)} = (B_0, 0, B_n)$ при $z < -d$, причем B_0 — заданное поле, создаваемое ионным током ТТС j_{iy}, B_n — также заданное поле, создаваемое токами, протекающими в удаленных от ТТС областях, остающихся вне нашего рассмотрения в настоящей работе.

2. Граничные условия для функции распределения. На границе области G зададим функцию распределения ионов, скорости которых направлены так, что $V_z < 0$ для $z = d$ и $V_z > 0$ для $z = -d$. Для верхней границы, $z = d$, положим $f^{(+)}(\boldsymbol{V}) = C_0^{(+)} f_0^{(+)}(\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y, V_z)$, где $f_0^{(+)}(\boldsymbol{V}) = \left(\sqrt{2\pi}\delta V_0\right)^{-1} e^{-\{[(V_x - V_{x0}^{(+)})^2 + (V_y - V_{y0}^{(+)})^2 + (V_z - V_{z0}^{(+)})^2]/2(\delta V_0)^2\}}$ при $V_z < 0$, $f_0^{(+)}(\boldsymbol{V})$ не задана при $V_z \geqslant 0$. Вектор $\boldsymbol{V}_0^{(+)} = (V_{x0}^{(+)}, V_{y0}^{(+)}, V_{z0}^{(+)})$ определяет наиболее вероятное направление облучающего ионного потока и направлен вдоль силовой линии магнитного поля, $\boldsymbol{V}_0^{(+)} \parallel \boldsymbol{B}^{(+)}$, причем $V_{x0}^{(+)} > 0$, $V_{y0}^{(+)} = 0$, $V_{z0}^{(+)} < 0$. Величина $V_D = |\boldsymbol{V}_0^{(+)}|$ определяет среднюю скорость набегающего ионного потока, δV_0 задает ширину распределения в пространстве скоростей, мы предполагаем, что $\delta V_0 \ll V_D$. Константу $C_0^{(+)}$ выберем так, чтобы обеспечить заданную плотность ионного потока, облучающего слой с верхней стороны. Плотность ионного потока, рассеянного слоем в вернем направлении, будет в данном приближении равна плотности набегающего потока. Аналогично определим граничные условия на плоскости $z = -d$. В результате решения уравнения (1) мы вычисляем $f_i(z, v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$ в заданном электрическом поле $\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z(z)) = -\nabla\varphi$, $\varphi = \varphi(z)$, и в заданном магнитном поле $\boldsymbol{B}(z) = (B_x(z), 0, B_z)$, $B_z = B_n = \text{const}$, $B_y = 0$. В результате найдем плотность ионной компоненты

$$n_i(z) = \iiint f_i(z, v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})\, dv_{ix}\, dv_{iy}\, dv_{iz}$$

и плотность ионного тока

$$J_{iy}(z) = \iiint e v_{iz} f_i(z, v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})\, dv_{ix}\, dv_{iy}\, dv_{iz}.$$

Остальные компоненты ионного тока равны нулю. Ионный ток $J_{iy}(y)$ создает ионное магнитное поле $B_x(z) = (4\pi/c)\int\limits_{-\infty}^{z} J_{iy}(\zeta)\, d\zeta$. Мы рассматриваем симметричный ТТС, для которого $n_i(-z) = n_i(z)$, $J_{iy}(-z) = J_{iy}(z)$, $B_x(-z) = -B_x(z)$, $B_x(-\infty) = -B_0$, $B_x(+\infty) = B_0$, причем B_0 считаем заданной величиной. Параметр $B_n/B_0 > 0$ предполагаем заданным, причем $B_n/B_0 \ll 1$. Типичное значение этого параметра, равного тангенсу наклона силовых линий по отношению к плоскости слоя, $B_n/B_0 = 0.1$ [1].

3. Метод крупных частиц. Для расчета функции распределения ионов мы используем численное решение уравнения (1) методом крупных частиц [10]. В пространстве скоростей выберем полярную систему координат и представим вектор $\boldsymbol{V}$ для плоскости $z = d$ с помощью координат $(|\boldsymbol{V}|, \theta, \varphi)$. Сформируем в пространстве скоростей ячейки $D_{m,k} = \{V_{m-1} < |\boldsymbol{V}| < V_m, (\theta, \varphi) \in G_k\}$, $m = 1, 2, \ldots, M$, $V_0 = 0$, V_M выберем так, что $f_0^{(+)}(\boldsymbol{V})$ пренебрежимо мала при значении $|\boldsymbol{V}| > \boldsymbol{V}_M$. Области G_k, $k = 1, 2, \ldots, K$ покрывают часть сферы. Выберем G_k так, чтобы обеспечить меньший диаметр этих областей в наиболее вероятном направлении ионного потока для улучшения аппроксимации. Количество ячеек сетки по координатам $|\boldsymbol{V}|$ и (θ, φ) выберем так, чтобы обеспечить сходимость получаемых результатов, причем для оценки погрешности аппроксимации используем метод Рунге–Ромберга [11]. Движение частицы с массой $m_{m,k} = Q_{m,k} m_i$ и зарядом $q_{m,k} = Q_{m,k} q_i$, где $Q_{m,k} = \int_{D_{m,k}} C_0^{(+)} f_0^{(+)}(\boldsymbol{V}) v dv d\Omega$, рассчитывается с помощью численного интегрирования уравнений движения точечного заряда в заданном электрическом и магнитном полях. Каждая такая крупная частица имеет то же отношение заряда к массе q_i/m_i, что и у иона. Получаем набор траекторий $(x(t), y(t), z(t))_{m,k}$, $t_1 < t < (t_2)_{m,k}$, причем t_1 есть время входа частицы в слой $-d < z < d$, t_2 есть время вылета частицы из этого слоя. Далее используем процедуру расчета плотности ионов и ионного тока методом «размазывания» заряда и линейного тока [12].

1.2. Модель электронной компоненты

1. Квазижидкостная модель электронной компоненты. Предполагаем, что электронная компонента ведет себя как квазижидкость с пренебрежимо малой массой частиц, нейтрализующая пространственный заряд ионной компоненты [9]. Далее покажем, что уравнение Максвелла $db_x/dz = (4\pi/c)(j_{iy} + j_{ey})$ с учетом закона равновесного пространственного распределения электронной квазижидкости во внешнем электрическом поле и с учетом явного выражения для электронного тока в дрейфовом приближении позволяет найти парциальные вклады электронной j_{ey} и ионной j_{iy} компонент в полный ток. Вклад электронной компоненты в полный ток будет значителен в областях с малым магнитным полем, а также в областях с большой кривизной силовых линий магнитного поля. Именно для этих областей, расположенных в окрестности центральной плоскости слоя, учет электронного тока наиболее важен.

2. Движение электронной компоненты вдоль направления магнитного поля. Предполагаем, что функция распределения электронов по скоростям анизотропна, и будем различать температуру электронной компоненты в направлении силовых линий магнитного поля и в перпендикулярном направлении. Эти величины определяются условиями формирования электронного потока в областях, удаленных от ТТС, и в рамках настоящей работы считаются заданными. Предположение о заданности функции распределения электронов на входе в область ТТС используется в ряде работ, посвященных динамике электронной компоненты, например [8, 13]. Соответственно мы вводим две величины электронного давления, $P_{e\parallel}$ и $P_{e\perp}$. Движение электронной компоненты в направлении вдоль силовых линий магнитного поля определяется условием равновесия давления электронов $P_{e\parallel}$, действия электрического поля и действия магнитного поля:

$$m_e n \frac{dV_{e\parallel}}{dt} = -enE_\parallel - \nabla_\parallel P_{e\parallel} - \mu n \nabla_\parallel B, \qquad (2)$$

где $V_{e\parallel}$ — средняя скорость электронной компоненты вдоль направления магнитного поля, $\nabla_\parallel = \partial/\partial \boldsymbol{l}$ — производная вдоль направления магнитного поля, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{B}/B$ — единичный вектор в направлении магнитного поля, $B = |\boldsymbol{B}|$, член $-enE_\parallel$ определяет объемную силу со стороны электрического поля, действующую на электронную компоненту, $-\nabla_\parallel P_{e\parallel}$ — действие давления электронов, член $-\mu n \nabla_\parallel B$ отвечает за диамагнетизм плазмы, $E_\parallel = -\nabla_\parallel \varphi = -\partial\varphi/\partial \boldsymbol{l}$. Давление электронов $P_{e\parallel}$ определяется температурой: $P_{e\parallel} = nT_{e\parallel}$. Величина μ есть средний магнитный момент электрона, который определяется усреднением по ансамблю электронов и зависит от электронной температуры $T_{e\perp} = \mu B$ [8]. Величина $T_{e\perp}$ пределяет среднюю энергию вращательного движения электронов и не зависит от движения вдоль силовых линий. Здесь и в дальнейшем мы учитываем условие квазинейтральности и не различаем концентрацию ионов и электронов, $n_e \simeq n_i = n$. Предполагая массу электрона пренебрежимо малой по сравнению с массой ионов, из (2) получим уравнение для расчета электрического потенциала

$$en \nabla_\parallel \varphi = \nabla_\parallel P_{e\parallel} + \mu n \nabla_\parallel B. \qquad (3)$$

Это уравнение — часть самосогласованной модели, так что n и $\boldsymbol{B}$ предполагаются найденными из кинетического уравнения для ионов.

3. Движение электронной компоненты поперек направления магнитного поля. Движение поперек направления магнитного поля определяется градиентом давления электронов в направлении поперек силовых линий магнитного поля, а также силой Лоренца,

$$m_e n \frac{d\boldsymbol{V}_{e\perp}}{dt} = -en\boldsymbol{E}_\perp - \nabla_\perp P_{e\perp} - \left(\frac{en}{c}\right) \boldsymbol{V}_e \times \boldsymbol{B}. \qquad (4)$$

Здесь давление электронов $P_{e\perp}$ также определяется температурой, $P_{e\perp} = nT_{e\perp}$. Предполагая массу электрона пренебрежимо малой и умножая (4) векторно на $\boldsymbol{B}$, найдем

$$\boldsymbol{V}_{e\perp} = c\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} + \frac{c}{en}\frac{\nabla_\perp P_{e\perp}\times\boldsymbol{B}}{B^2}.$$

4. Переход к нормированным переменным. Все расчеты будем проводить в нормированных (безразмерных) переменных. Нормированное значение величины x будем обозначать $\widehat{x}$. Введем следующие нормированные переменные (подробное их рассмотрение можно найти в работе [8]): $\widehat{z} = z\omega_0/[\varepsilon^{4/3}]V_D$ — нормированная z-координата, где $\omega_0 = eB_0/mc$ — ионная гирочастота в магнитном поле B_0, на краях слоя аналогичную замену делаем для координат x, y. $\widehat{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}/[\varepsilon^{2/3}]V_D$ — нормированный вектор скорости частицы, $\widehat{\varphi} = mV_D^2[\varepsilon^{4/3}]\varphi/2e$ — нормированный электростатический потенциал, $\widehat{\boldsymbol{E}} = c\boldsymbol{E}/[\varepsilon^{2/3}]V_D B_0$ — нормированная компонента электрического поля E_z. Нормированный ионный ток запишем в виде $\widehat{J}_{iy} = J_{iy}/(env_D\varepsilon^{2/3})$, нормированный электронный ток — в виде $\widehat{J}_e = J_{ey}/(env_D\varepsilon^{2/3})$, нормированную концентрацию — в виде $\widehat{n} = n/n_0$, $\widehat{b} = (\widehat{b}_x^2 + \widehat{b}_z^2)^{1/2} = B/B_0$ — нормированное полное магнитное поле. Движение электронов считаем анизотропным, будем различать электронные температуры, соответствующие движению вдоль и поперек силовых линий, как $T_{e\parallel}$ и $T_{e\perp}$. Введем нормированные электронные температуры $\mathcal{T}_{e\parallel} = T_{e\parallel}/T_i$, $\mathcal{T}_{e\perp} = T_{e\perp}/T_i$, где T_i — ионная температура, рассчитанная относительно средней скорости потока. Нормированное давление электронов в направлении вдоль и поперек силовых линий обозначим соответственно $\widehat{P}_\parallel = P_{e\parallel}/n_0T_i$, $\widehat{P}_\perp = P_{e\perp}/n_0T_i$.

Электроны будем считать сильно замагниченными, поэтому для давления в перпендикулярном направлении выполняется закон сохранения магнитного момента.

В соответствии с [8] нормированная компонента электронного давления, перпендикулярная магнитному полю, равна $\widehat{P}_\perp = \widehat{n}\widehat{b}$, а компонента электронного давления, параллельная магнитному полю, равна $\widehat{P}_\parallel = \widehat{n}\frac{1-q^2\widehat{b}}{1-q^2}$, где $q = v_{\perp 0}/v_0 = \sin\theta_0$ — синус среднего питч-угла электронов на большом удалении от слоя, $\boldsymbol{v}_\perp$ — компонента скорости электрона, перпендикулярная направлению магнитного поля, $v_{\perp 0}$ — та же величина, вычисленная вдали от слоя в однородном поле $(B_0, 0, B_n)$. Далее используем только нормированные переменные, поэтому везде символ нормирования $\widehat{}$ опускаем.

1.3. Электронные токи

1. Дрейф электронной компоненты в скрещенных электрическом и магнитном полях. Мы рассмотрим вклад в электронный ток в направлении поперек слоя трех видов дрейфа электронной компоненты [9, 14]. Дрейф электронной компоненты в скрещенных электрическом и магнитном полях создает ток $\boldsymbol{j}_{e\perp 1} = -(n/b^2)[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b}]$. Используя выражение для электрического поля $\boldsymbol{E} = -(2\varepsilon^{2/3})^{-1}\bigtriangledown\varphi$, получим $\boldsymbol{j}_{e\perp 1} = (2\varepsilon^{2/3})^{-1}(n/b^2)[\bigtriangledown\varphi\times\boldsymbol{b}]$. Раскрываем векторное произведение:

$$j_{e.y.1} = \frac{1}{2\varepsilon^{2/3}}\frac{n}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}b_x. \qquad (5)$$

2. Дрейф анизотропии градиента давления электронов в направлении вдоль и поперек силовых линий магнитного поля (поляризационный дрейф). Еще одна компонента электронного тока обусловлена анизотропией давления электронов в направлениях вдоль и поперек магнитного поля, $\boldsymbol{j}_{e\perp 2} = (1/2b)(P_\parallel/\tau_\parallel - P_\perp/\tau_\perp)[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}\bigtriangledown)\boldsymbol{b}]/b^3$. Учитывая выражения для $P_\parallel$ и $P_\perp$, получим

$$j_{e.y.2} = \left(\frac{n}{2}\frac{1-q^2b}{\tau_\parallel(1-q^2)} - \frac{n}{2}\frac{b}{\tau_\perp}\right)\frac{b_z^2}{b^3}\frac{\partial b_x}{\partial z}.$$

3. Дрейф электронной компоненты, вызванный градиентом давления в направлении поперек силовых линий магнитного поля. Наличие компоненты градиента давления электронов $P_\perp$ в направлении поперек силовых линий магнитного поля также генерирует дрейф электронной компоненты. Величина тока равна $\boldsymbol{j}_{e\perp 3} = -[[\bigtriangledown P_\perp\times\boldsymbol{b}]\times\boldsymbol{b}]/2b^2\tau_\perp$, эта компонента тока лежит в плоскости (x,z) и создает поле B_y.

4. Вывод уравнения для электрического потенциала. Электрическое поле в окрестности ТТС определяется в первую очередь движением электронов. Для расчета электростатического потенциала мы используем предположение о равновесном распределении плотности электронной компоненты.

Используя выражения для $P_{e\parallel}$ и $P_{e\perp}$ в нормированной системе единиц, из (3) получим

$$\bigtriangledown_\parallel\varphi = \varepsilon^{2/3}\left(\frac{1}{\tau_\parallel}\frac{\bigtriangledown_\parallel[n(1-q^2b)]}{(1-q^2)n} + \frac{\bigtriangledown_\parallel b}{\tau_\perp}\right). \qquad (6)$$

Учтем, что $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{B_x}{B} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{B_z}{B}$ и $\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x} = 0$, получим из (6)

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varepsilon^{2/3}\left(\frac{1}{\tau_\parallel}\frac{1}{(1-q^2)n}\frac{d}{dz}\Big[n(1-q^2b)\Big] + \frac{1}{\tau_\perp}\frac{db}{dz}\right).$$

Теперь, используя (5), можно вычислить электронную компоненту тока в направлении y:

$$j_{e\perp 1} = \frac{1}{\tau_\parallel}\frac{(1-q^2b)b_x}{2(1-q^2)b^2}\frac{dn}{dz} + \left(\frac{1}{\tau_\perp} - \frac{q^2}{\tau_\parallel(1-q^2)}\right)\frac{nb_x^2}{2b^3}\frac{db_x}{dz}.$$

Запишем теперь закон индукции в нормированных переменных: $j_i + j_{e\perp 1} + j_{e\perp 2} = C\,db_x/dz$. В дальнейшем будем считать параметр $C = 1$.

Подставим сюда ранее полученные выражения для компонент тока и приведем подобные слагаемые:

$$\frac{db_x}{dz}\left\{1 - \frac{n}{2b^3}\left[\left(\frac{1}{\tau_perp} - \frac{q^2}{\tau_\parallel(1-q^2)}\right)b_x^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{1-q^2b}{\tau_\parallel(1-q^2)} - \frac{b}{\tau_\perp}\right)b_z^2\right]\right\} =$$
$$= j_i + \frac{1}{\tau_\parallel}\frac{(1-q^2b)b_x}{2(1-q^2)b^2}\frac{dn}{dz}. \qquad (7)$$

Без ограничения общности можно считать, что начало координат расположено в точке, в которой $b_x = 0$. Таким образом, y — нормированная компонента полного магнитного поля — может быть найдена из задачи Коши для уравнения (7) при $x > 0$ с начальным условием $b_x(0) = 0$. Здесь $b = \sqrt{b_x^2 + b_z^2}$ — нормированное полное магнитное поле, $b \to 1$ при $|z| \to +\infty$, b_z — заданное постоянное магнитное поле, направленное поперек слоя, $|b_z| < 1$, n — нормированная концентрация, $n \to 1$ при $|z| \to +\infty$, $|q| < 1$. Отметим, что в правую часть уравнения входит не только электронный, но и ионный ток, поэтому оно рассматривается как элемент общей самосогласованной системы.

1.4. Итерационный алгоритм решения самосогласованной задачи

После решения уравнений для динамики ионов методом крупных частиц численно решается уравнение (7). Сформулируем итерационный алгоритм решения самосогласованной задачи. Решение задачи (7) можно считать оператором, действующим на $j_i(z) + j_e(z)$ и $n(z)$:

$$\varphi = \Phi(j_{iy}+j_{ey}, n), \quad b_x = \mathcal{B}(j_{iy}+j_{ey}, n).$$

Запишем решение кинетических уравнений для ионной компоненты также в виде операторов, которые вычисляются методом крупных частиц:

$$n = \mathcal{N}(\varphi, b_x), \quad j_{iy} = \mathcal{J}_{iy}(\varphi, b_x),$$

где $\varphi = \varphi(z)$, $b_x = b_x(z)$. Тогда один итерационный шаг состоит в последовательном вычислении

$$\begin{cases} n^{(k)} = \mathcal{N}_i\left(\varphi^{(k-1)}, b_x^{(k-1)}\right), & j_{iy}^{(k)} = \mathcal{J}_{iy}\left(\varphi^{(k-1)}, b_x^{(k-1)}\right), \\ \varphi^{(k)} = \Phi\left(j_{iy}^{(k)}+j_{ey}^{(k)}, n^{(k)}\right), & b_x^{(k)} = \mathcal{B}\left(j_{iy}^{(k)}+j_{ey}^{(k)}, n^{(k)}\right), \end{cases} \qquad (8)$$

k — номер итерации. Заметим, что оператор $b_x^{(k)} = \mathcal{B}\left(j_{iy}^{(k)}+j_{ey}^{(k)}, n^{(k)}\right)$ дает полное магнитное поле, т.е. сумму ионного поля, создаваемого током $j_{iy}^{(k)}$, и самосогласованного электронного тока. Отметим, что без использования самосогласованной электронной модели (7) можно было бы использовать итерационный процесс

$$\begin{cases} n^{(k)} = \mathcal{N}\left(\varphi^{(k-1)}, b_x^{(k-1)}\right), \\ \qquad j_{iy}^{(k)} = \mathcal{J}_{iy}\left(\varphi^{(k-1)}, b_x^{(k-1)}\right), \\ \varphi^{(k)} = \Phi\left(j_i^{(k-1)} + j_{ey}^{(k-1)}, n^{(k-1)}\right), \\ \qquad b_x^{(k-1)} = \mathcal{B}\left(j_{iy}^{(k-1)} + j_{ey}^{(k-1)}, n^{(k-1)}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Численный эксперимент показывает, что скорость сходимости самосогласованного варианта (8) значительно выше, чем у (9). Однако увеличение скорости сходимости не исчерпывает все преимущества самосогласованной схемы расчета электронного тока. Дело в том, что уравнение (7) дает сразу несколько важных аналитических результатов.

1.5. Условия существования ТТС

Проанализируем отдельно каждую линию обращения магнитного поля, т. е. линию $z = z_0$, вдоль которой $b_x = 0$. Отметим, что таких линий может быть несколько. Рассмотрим случай $j_i(z_0) > 0$ (случай $j_i(z_0) < 0$ рассматривается аналогично). В плоскости инверсии $b(z_0) = (0, 0, b_z)$, так как две остальные компоненты поля равны нулю, $\frac{db_x}{dz}(z_0) > 0$, $n(z_0) = n_c$, и положим $z = z_0$ в уравнении (7):

$$\frac{db_x}{dz}\left\{1 - \frac{n}{2b_z}\left[\frac{1 - q^2 b_z}{\tau_\parallel(1 - q^2)} - \frac{b_z}{\tau_\perp}\right]\right\} = j_i(z) \quad \text{при} \quad z = z_0. \tag{10}$$

Учтем, что в соответствии с законом индукции $\frac{db_x}{dz}(z_0) = j(z_0)$. Поэтому

$$\frac{j(z_k)}{j_i(z_k)} = \left\{1 - \frac{n}{2b_z}\left[\frac{1 - q^2 b_z}{\tau_\parallel(1 - q^2)} - \frac{b_z}{\tau_\perp}\right]\right\}^{-1}. \tag{11}$$

Это выражение позволяет явно вычислить коэффициент относительного изменения плотности тока в задачах с учетом и без учета электронной компоненты, который в [8] был получен только в рамках численного эксперимента.

Выражение (11) показывает, что существует область изменения параметров задачи, где конфигурация магнитного поля со множественной инверсией (т. е. сменой знака) соответствует неустойчивому, быстро разрушающемуся равновесию. Оценим эту область параметров. Для этого рассмотрим ситуацию, в которой инверсии тока не происходит, т. е. коэффициент в правой части (11) положителен:

$$1 > \frac{n}{2b_z}\left[\frac{1 - q^2 b_z}{\tau_\parallel(1 - q^2)} - \frac{b_z}{\tau_\perp}\right].$$

Это неравенство определяет область стабильности токового слоя, следствием является ограничение снизу на величину нормальной компоненты магнитного поля $b_n = b_z$:

$$b_n > \frac{n\tau_\perp/\tau_\parallel}{2\tau_\perp(1 - q^2) + n\left[1 - q^2(1 - \tau_\perp/\tau_\parallel)\right]}.$$

Например, для характерного случая равных температур электронов $\tau_\parallel = \tau_\perp$ получим условие стабильности слоя в виде

$$b_n > \frac{n}{2\tau_\perp(1 - q^2) + n}.$$

К тому же если $q \ll 1$ и $n \simeq 1$, это условие примет вид $b_n(2\tau_\perp + 1) > 1$. Если $\tau_\perp = 5$, то наименьшее значение b_z будет примерно 0.1, при $\tau_\perp = 10$ получается $b_{z\,\min}$ около 0.05. Отметим, что этот вывод вполне соответсвует результатам [8], где отмечено, что типичное значение электронной температуры в области ТТС может быть в несколько раз меньше, чем ионной.

2. Полуаналитические модели

Решение уравнения (7) аналитически не представляется возможным. Численное решение проблем не представляет, но не дает возможности оценить отличие самосогласованной электронной модели от классической. Поэтому рассмотрим возможность получить некоторые простые аналитические результаты за счет получения приближения к точному решению этого уравнения.

2.1. Кусочно-константные концентрация и плотность тока

Известно, что плотность ионного тока сосредоточена в ограниченном слое в окрестности центральной плоскости ТТС, причем толщина этого слоя меньше ларморовского радиуса ионов в поле B_0. Аналогично ведет себя концентрация, которая вне указанного слоя выходит на константу n_0. Поэтому естественно аппроксимировать концентрацию и плотность ионного тока кучочно-константной функцией, $n(z) = n_1$ при $|z| < z_0$ и $n(z) = n_2$ при $|z| > z_0$, $j_{iy}(z) = j_1$ при $|z| < z_0$ и $j_{iy}(z) = 0$ при $|z| > z_0$. В этом случае интегрирование уравнения (7) в области $|z| < z_0$ дает

$$2\tau_\perp b_x + n_1\left(-\ln(b_x + b) + \frac{b_x}{b} + b_n \operatorname{arctg}\frac{b_x}{b_n} - \right. \\ \left. - n_1 \frac{b_x}{b}\frac{\tau_\perp}{\tau_\parallel} + \ln b_n\right) = 2j_{i1}\tau_\perp z. \tag{12}$$

Полученное выражение представляет собой зависимость $b_x(z)$ в неявном виде. Подставляя в него вместо z точку z_0, найдем $b_{x0} = b_x(z_0 - 0)$. В области $|z| > z_0$ получим $b_x(z) = \mathrm{const}$, так как на бесконечности $j_{iy}(z) = 0$. Теперь для нахождения постоянного значения $b_x(z)$ во второй области нужно произвести сшивку двух частей. Для этого рассмотрим промежуток $z_0 - \varepsilon \leqslant z \leqslant z_0 + \varepsilon$. Мы будем предполагать, что имеем линейные модели следующего вида для функций $b_x(z)$, $n(z)$, $j_{iy}(z)$:

$$b_x = b_{x0} - \frac{z - (z_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon}(b_{x0} - b_{x1}),$$

$$n = n_0 - \frac{z - (z_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon}(n_0 - n_1),$$

$$j_{iy} = j_{iy0} - \frac{z-(z_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}(j_{iy0}-j_{iy1}).$$

Подставим их в уравнение (7), причем для простоты вычислений будем считать параметр $q=0$. Затем произведем интегрирование полученного выражения по z на отрезке $[z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon]$. Получим следующий результат:

$$-(b_{x0}-b_{x1})G = \\ = j_{iy0}\varepsilon - \frac{n_0-n_1}{2\varepsilon}\,\frac{\varepsilon}{\tau_{\parallel}}\,\frac{\ln(b_{x0}^2+b_z^2)-\ln(b_{x1}^2+b_z^2)}{2(b_{x0}-b_{x1})}, \quad (13)$$

где G — переобозначенный интеграл следующего вида по переменной $y = -\frac{z-(z_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}$:

$$\int\limits_{-1}^{0}\left(1-\frac{n_0+y(n_0-n_1)}{2\sqrt{\left((b_{x0}+y(b_{x0}-b_{x1}))^2+b_z^2\right)^3}}\times \\ \times\left(\frac{1}{\tau_{\perp}}(b_{x0}+y(b_{x0}-b_{x1}))^2 + \\ + \left(\frac{1}{\tau_{\parallel}}-\frac{\sqrt{(b_{x0}+y(b_{x0}-b_{x1}))^2+b_z^2}}{\tau_{\perp}}\right)b_z^2\right)\right)dy = G.$$

Занулим первое слагаемое в правой части (13)ввиду малости ε:

$$(b_{x0}-b_{x1})G = \frac{n_0-n_1}{4\tau_{\parallel}(b_{x0}-b_{x1})}\left(\ln(b_{x0}^2+b_z^2)-\ln(b_{x1}^2+b_z^2)\right) \quad (14)$$

Полученный результат представляет собой уравнение с единственной неизвестной b_{x1}.

Таким образом, объединение выражений (12) и (14) дает полное аналитическое описание предложенной модели с кусочно-постоянными функциями концентрации и тока.

Теперь решим уравнение (7) численно, используя приближение кусочно-постоянных функций концентрации и тока. Результатом численного эксперимента является рис. 1. Проанализируем полученный результат. Как видно из рис. 1,*б*, в области, где $0 \leqslant z \leqslant z_0$, функция выходит из нуля и возрастает.

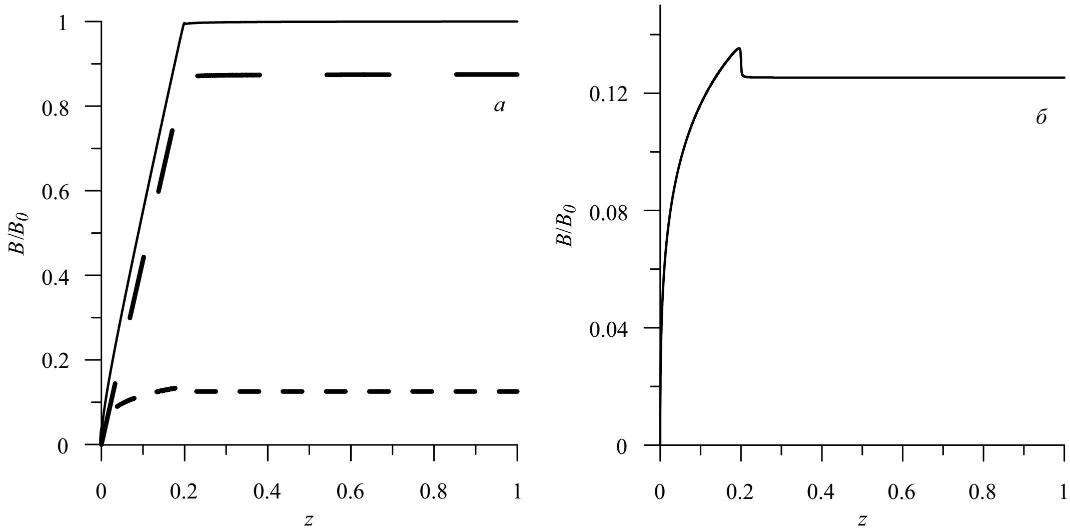

Рис. 1. Профили безразмерных магнитных полей, полученные в приближении кусочно-постоянных функций концентрации и тока: *а* — $\tau_{\perp}=5$, $\tau_{\parallel}=5$, $q=0.2$, $b_n=0.1$; полное $B_t(z)$ (сплошная линия), ионное $B_i(z)$ (длинный штрих) и электронное $B_e(z)$ (короткий штрих) магнитные поля; *б* — профиль электронного магнитного поля $B_e(z)$ в увеличенном масштабе

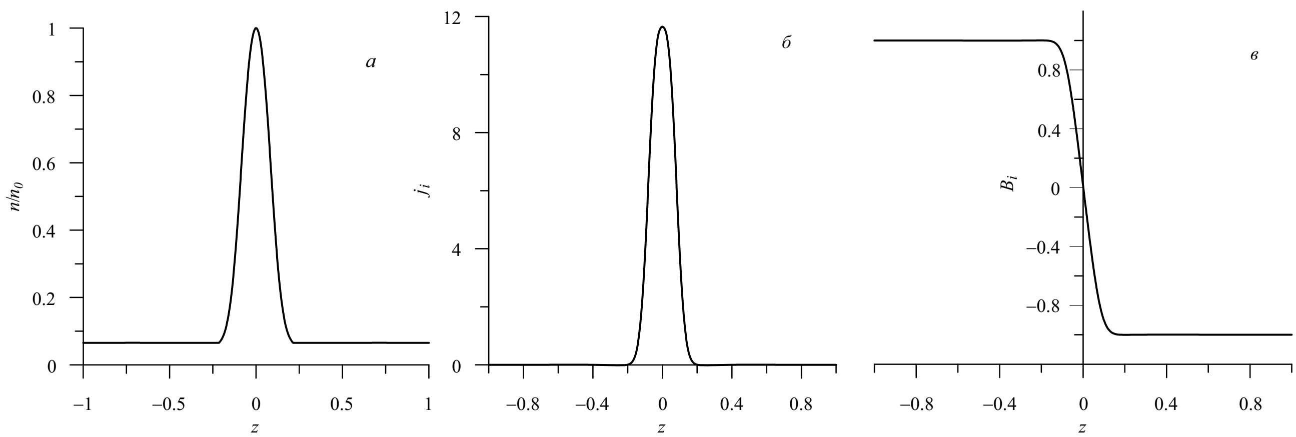

Рис. 2. Характеристики ионной компоненты; $\tau_{\perp}=5$, $\tau_{\parallel}=5$, $q=0.2$, $b_n=0.1$: *а* — профиль безразмерной концентрации ионов $n(z)$; *б* — профиль безразмерной плотности ионного тока $j_i(z)$; *в* — профиль безразмерного магнитного поля ионной компоненты $B_i(z)$

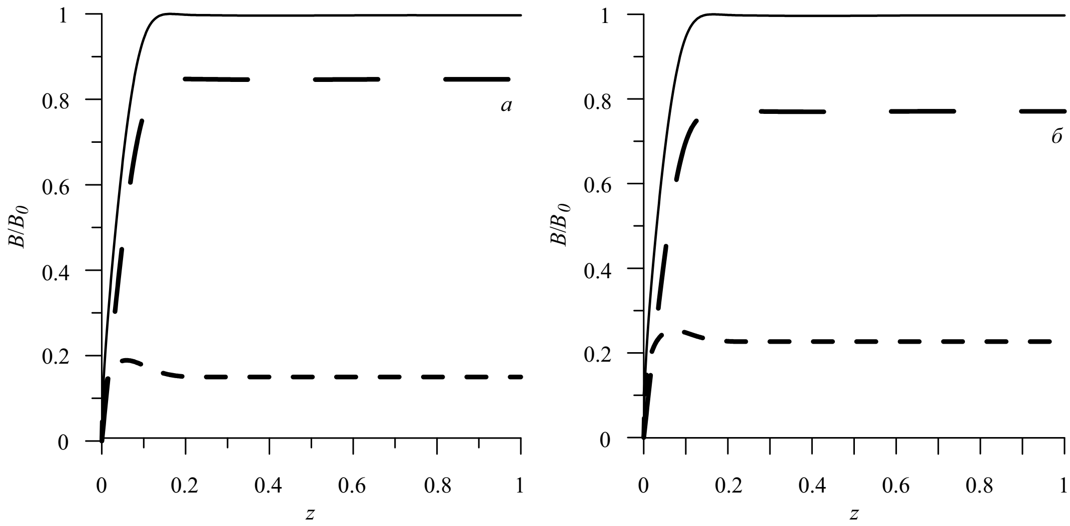

Рис. 3. Профили безразмерных полного $B_t(z)$ (сплошная линия), ионного $B_i(z)$ (длинный штрих) и электронного $B_e(z)$ (короткий штрих) магнитных полей при разных значениях параметра $\tau_\perp$, ($\tau_\| = 5$, $q = 0.2$, $b_n = 0.1$): $\tau_\perp = 5$ (*а*), $\tau_\perp = 3.3$ (*б*)

Затем происходит скачок, после чего функция выходит на постоянное значение во второй области. Таким образом проведенный численный эксперимент подтверждает правильность аналитической модели, описанной выше.

3. Результаты численного эксперимента

В заключение приведем результаты численного эксперимента, реализующего самосогласованную модель электронной компоненты.

Сначала представим на рис. 2 типичные зависимости ионных концентрации, плотности и магнитного поля от координаты z для стандартных значений параметров: $\tau_\perp = 5$ $\tau_\| = 5$, $q = 0.2$, $b_n = 0.1$.

Результатом решения задачи с представленным набором ионных характеристик будут профили магнитных полей, изображенных на рис. 3*а*. На рис. 3,*б* представлен результат решения данной задачи с измененным параметром $\tau_\perp = 3.3$. По полученным результатам видно, что на рис. 3,*б* вклад магнитного поля электронной компоненты в общее поле больше, чем на рис. 3,*а*. Таким образом, можно сделать вывод, что с уменьшением параметра $\tau_\perp$ электронное магнитное поле увеличивается.

При решении общей самосогласованной задачи для электронной и ионной компонент мы должны преодолеть значительные трудности, связанные с построением решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. Мы применяем итерационный метод решения, причем на каждой итерации используется или магнитное поле с предыдущей итерации для вычисления электронного тока или электрическое поле с предыдущей итерации для вычисления траектории ионов. При инициализации итерационного процесса мы применяем дополнительный итерационный процесс для включения действия электронной компоненты. Мы вводим в задачу дополнительный параметр C, который определяет коэффициент учета тока электронной компоненты. При $C = 0$ электронная компонента вообще не учитывается, а при $C = 1$ используется уравнение (7). Мы используем в качестве начальных данных итерационного процесса результаты модели Харриса, а затем, увеличивая C от 0 до 1, преобразовываем в самосогласованную модель с электронным током. На рис. 4 показана зависимость магнитного поля электронов от параметра C.

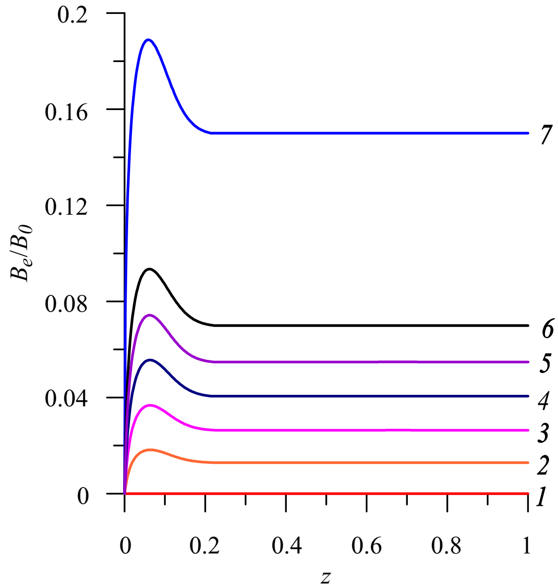

Рис. 4. Профили безразмерных магнитных полей электронной компоненты $B_e(z)$ в зависимости от параметра C: кривая *1* — $C = 0$, *2* — $C = 0.1$, *3* — $C = 0.2$, *4* — $C = 0.3$, *5* — $C = 0.4$, *6* — $C = 0.5$, *7* — $C = 1$; $\tau_\perp = 0.5$, $\tau_\| = 0.5$, $b_n = 0.1$

Заключение

В работе получено дифференциальное уравнение (7) для магнитного поля электроной компоненты ТТС, дающее самосогласованную модель электронной компоненты квазинейтральной плазмы. Выведено условие существования ТТС в рамках данной модели, выражающееся в виде оценки снизу на величину нормальной компоненты магнитного поля, которое необходимо учитывать при моделировании ТТС. Рассмотрена полуаналитическая модель, согласно которой концентрация и плотность ионного тока являются кусочно-константными функциями. Найдено решение уравнения (7) аналитическим и численным методами. С помощью компьютерного эксперимента реализована вышеописанная самосогласованная модель, и на рис. 3, 4 представлены вычислительные результаты. Таким образом, мы показали, что использование самосогласованной модели электронной компоненты квазинейтральной плазмы существенно позволяет ускорить сходимость итерационного процесса для решения нелинейной системы кинетических уравнений и уточнить область применимости модели электронной компоненты, основанной на понятии натяжения силовых линий.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-01-00200).

Список литературы

1. *Ness N.F.* // J.Geophys. Res. 1965. **70**. P. 2989.
2. *Artemyev A.V., Vasko I.Y., Kasahara S.* // Planetary and Space Science. 2014. **96**. P. 133.
3. *Vasko I.Y., Zelenyi L.M., Artemyev A.V.* // Planetary and Space Science. 2014. **96**. P. 81.
4. *Harris E.* // Nuovo Cimento. 1962. **23**. P. 115.
5. *Pritchett P. L., Coroniti F. V.* // J. Geophys. Res. 1995. **100**. P. 23551.
6. *Birn J., Hesse M., Schindler K.* // J. Geophys. Res. 1996. **101**. P. 12939.
7. *Yin L., Winske D.* // J. Geophys. Res. 2002. **107**. P.SMP 39-1.
8. *Zelenyi L.M., Malova H.V., Popov V.Yu.* et al. // Nonlinear Processes in Geophysics. 2004. **11**. P. 579.
9. *Морозов И.И.* Введение в плазмодинамику. М., 2006.
10. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М., 1989.
11. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М., 1978.
12. *Быков А.А., Свешников А.Г., Якунин С.А.* // Докл. АН СССР. 1988. **304**, № 6. С. 1333.
13. *Zelenyi L.M., Sitnov M.I., Malova H.V., Sharma A.S.* // Nonlinear Processes in Geophysics. 2000. **7**. P. 127.
14. *Хаксли Л., Кромптон Р.* Диффузия и дрейф электронов в газах. М., 1977.

A self-consistent model for the electronic component of a thin current sheet in the Earth's magnetosphere

A. A. Bykov[a], **K. E. Ermakova**

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *abkov@yandex.ru.*

A self-consistent model for the electronic component of a thin current sheet (TCS) of the Earth's magnetosphere based on the concept of the tension of lines of force is proposed and studied analytically and numerically. It has been shown that the model has a certain range of applicability, beyond which the results may be incorrect; within the range of correctness the model allows for a quite significant increase in the rate of convergence of the iterative algorithm for solving the total self-consistent model of the TCS, which also includes the Boltzmann equations for the ionic component.

Keywords: thin current sheet, tension of lines of force, self-consistent model, iterative process, large-particle method.
PACS: 94.30.ct, 02.60.Cb.
Received 30 October 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 1. Pp. 43–51.

Сведения об авторах

1. Быков Алексей Александрович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33; e-mail: abkov@yandex.ru.
2. Ермакова Кристина Евгениевна — студентка; e-mail: kristinaermakova19@rambler.ru.