ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

# Параметрическая генерация света в резонаторе: аналитическое приближение

О. К. Бахова[1,a], А. В. Белинский[2,b]

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,*
*[1] кафедра математического моделирования и информатики; [2] кафедра физики Земли.*
*Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
*E-mail: [a] bahova.100@mail.ru, [b] belinsky@inbox.ru*

Статья поступила 26.10.2015, подписана в печать 16.11.2015.

Предложено новое аналитическое приближенное решение задачи описания процесса нелинейной параметрической генерации света в резонаторах, значительно более точное, чем известные. Рассмотрены двух- и трехрезонаторные схемы генерации и выявлены критерии их адекватности. Правильность результатов подтверждена компьютерным моделированием.

*Ключевые слова*: лазерная физика, нелинейная оптика, параметрическая генерация света, оптический резонатор.

УДК: 535.015. PACS: 45.65.Yj.

## Введение

Начало «лазерной эры» в начале 60-х гг. прошлого века дало мощный импульс развитию нелинейной оптики, что в свою очередь привело к новым достижениям в лазерной физике. Были созданы эффективные генераторы оптических гармоник и параметрические генераторы света с возможностью плавного изменения генерируемой частоты излучения [1]. Параметрические источники излучения применяются, в частности, для приготовления неклассических состояний света, обладающих необычными свойствами: с их помощью генерируются коррелированные пары фотонов, используемые в экспериментах по изучению квантовой природы света, особенно ярко проявляющиеся в квантовых парадоксах Белла, Зенона, квантовой интерференции (см., например, [2]). Кроме того, параметрически генерируемым светом можно осуществлять идеально точную безэталонную калибровку фотодетекторов [3], проводить неразрушающие измерения интенсивности света [4, 5], передавать информацию, защищенную от несанкционированных утечек методами квантовой криптографии [6, 7]. Параметрически генерируемый свет за счет жесткой корреляции сигнальных и холостых фотонов является идеальным источником в сверхточных балансных оптических измерениях, поскольку уровень шума разностного фототока оказывается ниже дробового в диапазоне частот ниже обратного времени удержания фотона резонатором [8, 9]. Использование резонатора обусловлено тем, что эффективность параметрического преобразования накачки составляет $10^{-8}$–$10^{-7}$, т. е. лишь один из десяти миллионов или более фотонов накачки распадается на два: сигнальный и холостой. Увеличить полезную длину нелинейного взаимодействия позволяет резонатор: за счет многократного обхода прохождения через кристалл увеличивается длина нелинейного взаимодействия.

Точного аналитического решения задачи описания полей в резонаторе не существует в силу сложности исходной системы дифференциальных уравнений параметрического взаимодействия и учета граничных условий отражения на зеркалах. Простейшее приближение состоит в пренебрежении истощением накачки. Это так называемое приближение заданной накачки. Однако оно слишком грубое. Более точное решение было предложено в [10, с. 468, 469]. Там, где учтено истощение накачки, но не принято во внимание увеличение сигнала, что ведет к формальному нарушению закона сохранения энергии. Тем не менее, это приближение до сих пор широко используется в научных работах вплоть до последнего времени [11–15], поэтому в недавних работах [16, 17] была предпринята попытка разработки более точного аналитического решения. При этом предполагалось, что и амплитуда накачки, и амплитуда генерируемых пучков света изменяются линейно по длине нелинейного кристалла. Это позволило получить более точное решение и удалось избежать нарушения закона сохранения энергии. Кроме того, в [17] учтены потери и был выработан строгий критерий адекватности предложенных решений.

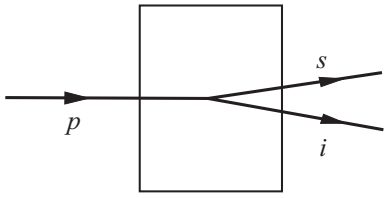


*Рис. 1.* Рождение фотонной пары в нелинейном кристалле

Дальнейшие исследования особенностей генерации света в резонаторе привели нас к выводу, что аналитическое решение можно получить и в результате более мягкого предположения о только лишь линейном изменении амплитуды накачки. Это предположение подтверждается нашими многочисленными численными экспериментами. Точность аналитического приближения при этом оказывается существенно выше. Эти результаты обсуждаются в настоящей работе.

## 1. Основные соотношения, описывающие параметрическое взаимодействие

Параметрическое взаимодействие света в нелинейном кристалле представляет собой процесс рождения фотонных пар в среде с квадратичной нелинейностью под действием фотонов накачки. В этом участвуют три волны: сигнальная ($s$), холостая ($i$) волны и волна накачки ($p$), частоты которых связаны соотношением: $\omega_p = \omega_s + \omega_i$.

Исходная система дифференциальных уравнений параметрического взаимодействия выглядит следующим образом [10, с. 468, 469]:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{u_s}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z} + \alpha_s\right) A_s = \beta_1 A_p A_i, \\ \left(\dfrac{1}{u_i}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z} + \alpha_i\right) A_i = \beta_2 A_p A_s, \\ \dfrac{\partial A_p}{\partial z} = -\beta_p A_s A_i, \end{cases} \tag{1}$$

где $A$ — комплексные амплитуды сигнальной ($s$), холостой ($i$) волн и волны накачки ($p$), $\alpha$ — коэффициенты потерь, $\beta$ — коэффициенты нелинейной связи, $u$ — групповые скорости, $z$ — продольная оптическая ось, вдоль которой распространяются пучки.

Третье уравнение системы (1) записано для монохроматической накачки и с учетом того, что истощение ее происходит в основном за счет нелинейного взаимодействия, а не диссипативных потерь.

В резонаторе эту систему дифференциальных уравнений надо решать с учетом отражения на зеркалах:

$$A(z{=}0; t) = rA(L; t{-}T), \tag{2}$$

где $L$ — полная длина обхода резонатора, $T$ — время полного обхода резонатора, $r$ — амплитудный коэффициент отражения выходного зеркала. Коэффициенты отражения остальных зеркал считаем равными единице.

Упростим исходную систему (1) следующим образом. Будем рассматривать стационарный случай установившегося режима коллинеарного взаимодействия всех трех плоских волн, распространяющихся вдоль оси $z$, а также учтем симметричность сигнальной и холостой волн при равенстве коэффициентов потерь $\alpha_s = \alpha_i$ и нелинейной связи $\beta_1 = \beta_2$. Тогда первые два уравнения системы (1) оказываются идентичными. Таким образом,

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dz} + \alpha A = \beta A_p A, \\ \dfrac{dA_p}{dz} = -2\beta A^2. \end{cases} \tag{3}$$

Запишем

$$\begin{cases} dA = (\beta A_p - \alpha) A\, dz, \\ dA_p = -2\beta A^2\, dz. \end{cases} \tag{4}$$

Поделим второе уравнение системы на первое и разделим переменные:

$$2\beta A\, dA = (\alpha - \beta A_p)\, dA_p. \tag{5}$$

В результате интегрирования (5) с учетом второго уравнения системы (3) получим

$$\frac{dA_p}{dz} = (\beta A_p - 2\alpha) A_p + C, \tag{6}$$

где постоянная $C = -2\beta A_0^2 - (\beta A_{p0} - 2\alpha) A_{p0}$, а индексами «0» обозначены начальные значения амплитуд при $z = 0$.

Вновь разделяя переменные в уравнении (6), имеем

$$\frac{dA_p}{(\beta A_p - 2\alpha) A_p + C} = dz. \tag{7}$$

Добавив в числителе под дифференциалом слагаемое $-\alpha$ и очевидным образом преобразовав знаменатель формулы (7), получим

$$\frac{d(\beta A_p - \alpha)}{(\beta A_p - \alpha)^2 - \alpha^2 + C\beta} = dz. \tag{8}$$

Проинтегрируем (8):

$$\frac{1}{2C_1} \ln \left| \frac{\beta A_p - \alpha - C_1}{\beta A_p - \alpha + C_1} \right| = z + C_2. \tag{9}$$

Здесь коэффициенты $C_1 = \sqrt{\alpha^2 - C\beta}$, $C_2 = \frac{1}{2C_1} \times \times \ln \left| \frac{\beta A_{p0} - \alpha - C_1}{\beta A_{p0} - \alpha + C_1} \right|$ и, как и раньше, $C = -2\beta A_0^2 - - (A_{p0}\beta - 2\alpha) A_{p0}$.

Из (9) несложно получить выражение для $A_p$

$$A_p(z) = C_1 \left( \frac{2}{1 + e^{2C_1(z + C_2)}} - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta}, \tag{10}$$

и в соответствии с результатом решения уравнения (5)

$$A(z) = \sqrt{2(A_{p0} - A_p(z)) \left( A_{p0} + A_p(z) - \frac{2\alpha}{\beta} \right) + A_0^2}. \tag{11}$$

Перед экспонентой в (10), строго говоря, надо писать $\pm$ из-за наличия модуля в (9), но решение со знаком «минус» для режимов генерации света в резонаторе не подходит.

Отметим, что аналогичное аналитическое решение было получено в [18], но без учета потерь $\alpha$.

Перейдем теперь к описанию параметрического взаимодействия в резонаторе.

## 2. Двухрезонаторная схема взаимодействия

Рассмотрим для начала случай двойного резонанса (рис. 2), когда резонируют только сигнальная

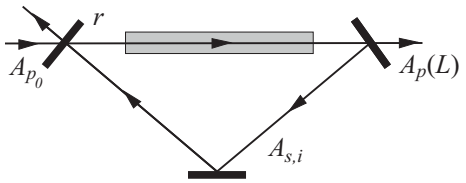


*Рис. 2.* Двухрезонаторная схема взаимодействия: накачка проходит через зеркала без отражения, в отличие от сигнальной и холостой волн

и холостая волны, а накачка беспрепятственно проходит через зеркала в отличие от сигнальной и холостой волн. При этом нужно учитывать граничные условия отражения на зеркалах: $A_0 = rA_L$. Эффектом запаздывания можно пренебречь, поскольку рассматривается стационарный случай идеально точного резонанса монохроматических волн в установившемся режиме. Все амплитуды $A$ при этом будут действительными.

Численный анализ системы (3) показал, что в реальных условиях параметрической генерации света накачка линейно убывает с ростом $z$ (см. рис. 4). Поэтому с учетом второго уравнения системы (3) можно принять

$$A_p(z = L) = A_p(L) = A_{p0} - 2\beta A_0^2 L. \qquad (12)$$

Из уравнения (11) с учетом (12) следует следующее соотношение:

$$\frac{A_0^2}{r^2} = 2(A_{p0} - A_p(L))\left(A_{p0} + A_p(L) - \frac{2\alpha}{\beta}\right) + A_0^2, \qquad (13)$$

где $A_p(L) = A_{p0} - 2\beta A_0^2 L$.

Подставим $A_p(L)$ в (13). Тогда

$$\frac{1 - r^2}{r^2 8\beta L} = A_{p0} - \beta A_0^2 L - \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (14)$$

Неотрицательное решение уравнения (14) имеет вид

$$A_0 = \sqrt{\frac{1}{r^2\beta L}\left(A_{p0} - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1 - r^2}{8r^2\beta L}\right)}. \qquad (15)$$

Поскольку в режиме генерации

$$A_{p0} - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1 - r^2}{8r^2\beta L} \geqslant 0, \qquad (16)$$

пороговое значение амплитуды накачки равно

$$A_{p0}^{\text{th}} = \frac{1}{\beta}\left(\alpha + \frac{1 - r^2}{8Lr^2}\right). \qquad (17)$$

В общем же случае произвольного $z$

$$A_p(z) = C_1\left(\frac{2}{1 + exp(2C_1(z + C_2))} - 1\right) + \frac{\alpha}{\beta}, \qquad (18)$$

где $C_1$ вычисляется так же, как после формулы (9), а $A_0$ подставляется из (15). В то же время $A(z)$ вычисляется по формуле (11) и в нее подставляется $A_0$ из (15) и $A_p(z)$ из (18).

Результат получается точнее по сравнению с известными [16, 17]. Как показал компьютерный эксперимент, данное приближение справедливо при превышении мощностью накачки ее пороговой мощности $P = \left(\frac{A_{p0}}{A_{p0}^{\text{th}}}\right)^2 \leqslant 10$. Ошибка при этом составляет менее 5% (рис. 3). В отличие от [16, 17], где использовалось приближение линейного изменения амплитуд всех взаимодействующих волн по $z$, наше допущение мягче и приводит к более точному результату. Примеры расчетов приведены на рис. 4, 5. Аналитические и численные кривые при этом почти совпадают. Для практической работы этот вариант малопригоден: ведь нет смысла «дожидаться» спада сигнала, как на рис. 4, но он приведен с целью демонстрации возможностей нашего метода, способного описать не только монотонное возрастание сигнала, но и его истощение.

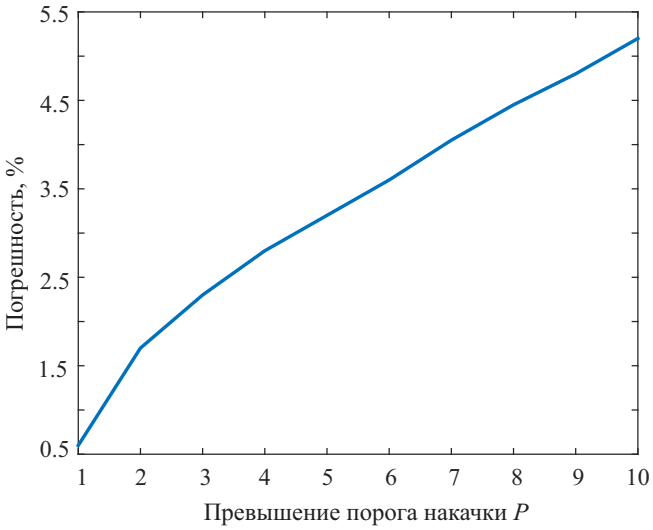


*Рис. 3.* Зависимость погрешности теоретического приближения от параметра $P = \left(A_{p0}/A_{p0}^{\text{th}}\right)^2$ для двухрезонаторного случая

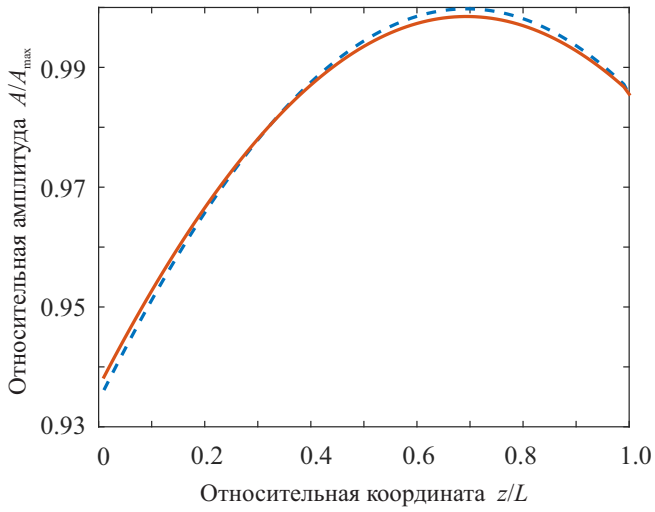


*Рис. 4.* График зависимости относительной амплитуды холостой и сигнальной волн $A/A_{\max}$ от относительной координаты $z/L$ в двухрезонаторной схеме взаимодействия при $\alpha L = 0.1$, $A_{p0}\beta L = 3.5$ и коэффициенте отражения $r = 0.95$. Сплошная линия — результат численного счета, пунктир — наше аналитическое приближение

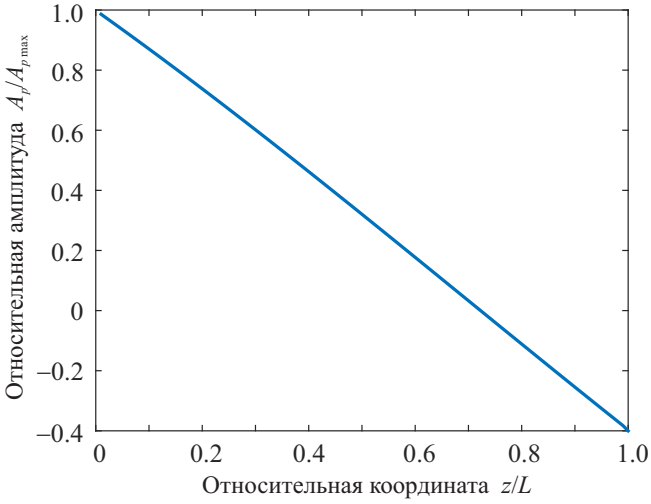


*Рис. 5.* График зависимости относительной амплитуды накачки $A_p/A_{p\,\max}$ от относительной координаты $z/L$ в двухрезонаторной схеме взаимодействия при тех же условиях, что и для рис. 4

## 3. Трехрезонаторная схема взаимодействия

В двухрезонаторном случае для накачки зеркала были прозрачны. В данном же случае все три волны $(s, i, p)$ полностью обходят резонатор, как, например, на рис. 6, и добавляется еще одно уравнение, описывающее краевые условия накачки:

$$A_p(0;t) = r_p A_p(L; t-T) + A_p^0, \tag{19}$$

где $A_p^0 = A_p^{\text{in}}\sqrt{1-r_p^2}$, а $A_p^{\text{in}}$ — амплитуда накачки, поступающей в резонатор извне. Запаздыванием, как и прежде, пренебрегаем.

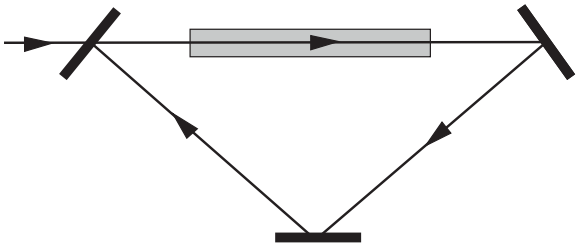

*Рис. 6.* Схема трехрезонаторного взаимодействия: все три волны отражаются от зеркал

Как показывают численные расчеты, в типичных условиях стационарной генерации амплитуда накачки также изменяется линейно по $z$. Эта линейная зависимость продемонстрирована на рис. 8.

С учетом граничных условий (2) и (19), а также первого уравнения системы (3) и уравнения (11) получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} rA(L) = A_0, \\ r_p A_p(L) = A_{p0} - A_p^0, \\ A_{p0} - 2\beta L A^2(L) = A_p(L), \\ A^2(L) = 2(A_{p0} - A_p(L))\left(A_p(L) + A_{p0} - \dfrac{2\alpha}{\beta}\right) + {A_0}^2. \end{cases} \tag{20}$$

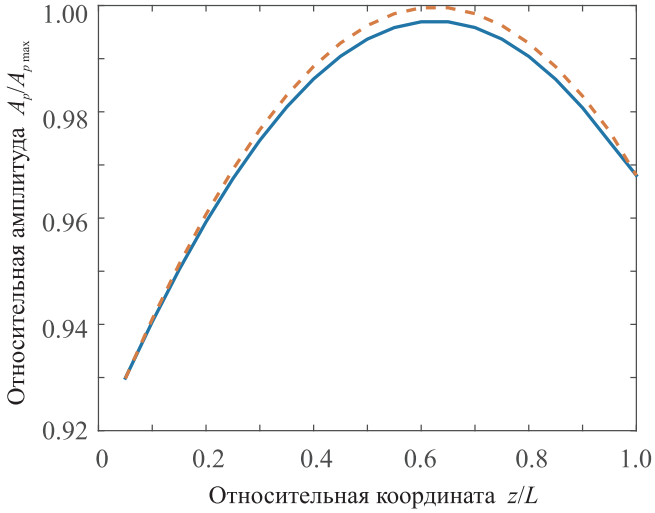


*Рис. 7.* График зависимости относительной амплитуды холостой и сигнальной волн $A/A_{\max}$ от относительной координаты $z/L$ в трехрезонаторной схеме взаимодействия при $\alpha L = 0.2$, $A_{p0}\beta L = 24$ и коэффициентах отражения $r = 0.95$ и $r_p = 0.95$. Сплошная линия — результат численного счета, пунктир — наше аналитическое приближение

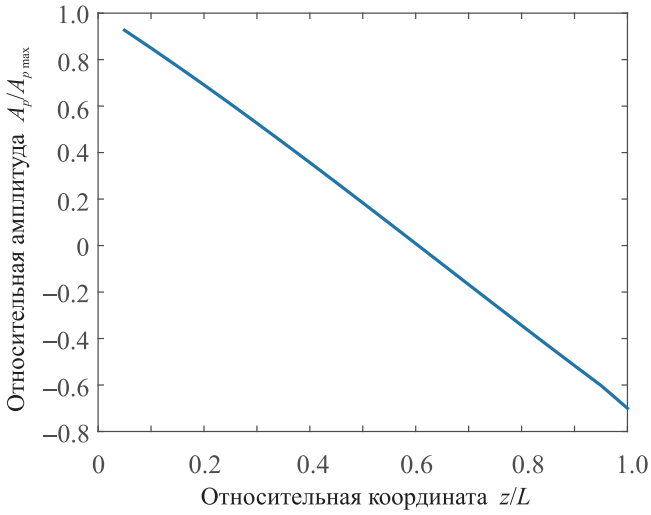


*Рис. 8.* График зависимости относительной амплитуды накачки $A_p/A_{p\,\max}$ от относительной координаты $z/L$ в трехрезонаторной схеме взаимодействия при тех же условиях, как на рис. 7

Подставим $A_p(L)$ из третьего уравнения системы (20) в четвертое:

$$A^2(L) = 8\beta L A^2(L)\left(A_{p0} - \beta L A^2(L) - \frac{\alpha}{\beta}\right) + {A_0}^2 \tag{21}$$

и с учетом первого уравнения той же системы получим

$$r^2 = 8\beta L r^2\left(A_{p0} - \beta L r^2 A_0^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + 1. \tag{22}$$

Выразим ${A_0}^2$ из (21) и снова с учетом первого уравнения системы (20) получим

$$A_0^2 = \frac{1}{\beta L r^2}\left(\frac{r^2-1}{8\beta L r^2} - \frac{\alpha}{\beta} + A_{p0}\right). \tag{23}$$

Здесь $A_{p0}$ можно найти из второго и третьего уравнений системы (20):

$$A_{p0}(1-r_p) = A_p^0 - 2\beta L r_p r^2 {A_0}^2. \qquad (24)$$

Из (23) и (24) получим выражение для $A_0$

$$A_0 = \sqrt{\frac{1}{\beta L r^2(1+r_p)}\left(A_p^0 - (1-r_p)\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{r^2-1}{8\beta L r^2}\right)\right)}. \qquad (25)$$

Согласно (24) и (25), получаем

$$A_{p0} = \frac{A_p^0\left(1 - \frac{2r_p}{1+r_p}\right) + \frac{2r_p(1-r_p)}{1+r_p}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{r^2-1}{8\beta L r^2}\right)}{1-r_p}. \qquad (26)$$

Теперь $A(z)$ и $A_p(z)$ можно вычислить по формулам (10) и (11).

Аналогично (17) пороговое значение амплитуды накачки равно

$$A_p^{0\,\mathrm{th}} = (1-r_p)\frac{1}{\beta}\left(\alpha + \frac{1-r^2}{8Lr^2}\right). \qquad (27)$$

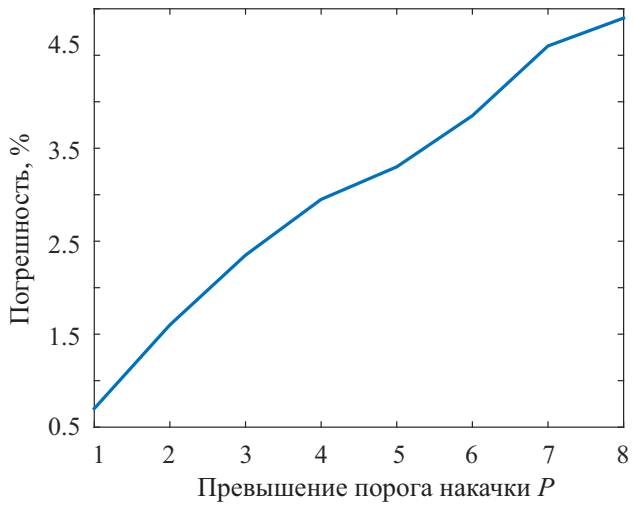


*Рис. 9.* Зависимость погрешности теоретического приближения от параметра $P = \left(A_p^0/A_p^{0\,\mathrm{th}}\right)^2$ для трехрезонаторного случая

Пример расчета приведен на рис. 7, 8. Приближение справедливо при превышении мощности накачки пороговой мощности $P = \left(\frac{A_{p0}}{A_{p0}^{\mathrm{th}}}\right)^2 \leqslant 8$. Ошибка при этом составляет менее 5% (рис. 9).

## Заключение

В статье рассмотрено аналитическое решение задачи параметрической генерации света в резонаторе, значительно превышающее по точности известные, вплоть до режима значительного истощения не только накачки, но и сигнала. Возможность такого приближения обусловлена результатами численных расчетов, из которых следовало, что даже при существенно нелинейном поведении сигнала по длине нелинейной среды накачка убывала линейно. Именно этим свойством мы воспользовались в нашем описании, положив накачку линейной по $z$. В результате даже при высоких значениях коэффициента нелинейного взаимодействия наше аналитическое решение оказалось полностью адекватным, что подтвердилось соответствующими компьютерными расчетами численного решения исходной системы уравнений без всяких упрощений.

Результаты этой работы докладывались на конференции [19] и на 9-м семинаре, посвященном памяти Д. Н. Клышко (Москва, МГУ, физический факультет, МЛЦ, 25–27 мая 2015 г.).

Альтернативный путь повышения точности описания полей предложен в работе [20], где предлагается и накачку, и генерируемые волны описывать в квадратичном или кубическом приближениях.

Авторы благодарны Е. Г. Акимовой, Д. А. Балакину, Н. А. Васильеву и А. В. Лысухиной за участие в исследованиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-07-00938А, 14-02-00458А).

## Список литературы

1. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* // ЖЭТФ. 1962. **43**, № 1. С. 351.
2. *Белинский А.В., Клышко Д.Н.* // УФН. 1993. **163**, № 8. С. 1. (*Belinskii A.V., Klyshko D.N.* // Phys. Usp. 1993. **36**, N 8. P. 653.)
3. *Клышко Д.Н., Пенин А.Н.* // УФН. 1987. **152**, № 4. С. 653.
4. *Yamamoto Y., Machida S., Imoto I.* et al. // J. Opt. Soc. Am. 1987. **B4**. С. 1645.
5. *Белинский А.В.* Квантовые измерения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
6. *Боумейстер Д., Экерт А., Цайлингер А.* Физика квантовой информации. М.: Постмаркет, 2002.
7. *Кулик С.П., Масленников Г.А., Морева Е.В.* // ЖЭТФ. 2006. **129**. С. 814.
8. *Ахманов С.А., Ахмедиев Н.Н., Белинский А.В.* и др. Новые физические принципы оптической обработки информации. М., 1990.
9. *Renaud S., Giacobino E.* // J. Phys. (Fr.). 1988. **49**, N 6. P. C2-477.
10. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., 1981.
11. *Lariontsev E.G., Zolotoverkh I.I.* // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2002. **4**. P. 15.
12. *Carrion L., Girardeau-Montaut J.-P.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2000. **17**, N 1. P. 78.
13. *Cerullo G., De Silvestri S.* // Rev. Sci. Instrum. 2003. **74**, N 1. P. 1.
14. *Prawiharjo J., Hung H.S.S., Hanns D.C., Shepherd D.P.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2007. **24**, N 4. P. 895.
15. *Armstrong D.J., Alford W.J., Raymond T.D., Smith A.V.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 1997. **14**, N 2. P. 460.
16. *Белинский А.В., Федотов В.Е.* // Мир измерений. 2014. **162**, № 8. С. 35.
17. *Белинский А.В., Тарасова Т.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2015. № 4. С. 47.
18. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика: Генераторы второй гармоники и параметрические генераторы света. М.: Радио и связь, 1982.
19. *Белинский А.В., Бахова О.К.* // Сб. материалов XIII Всероссийской научно-технической конференции «Состояние и проблемы измерений». МГТУ им. Н. Э. Баумана. 22–24 апреля 2015 г. С. 34.
20. *Saygin M.Yu., Chirkin A.S.* // Laser Physics. 2016. **26**, N 1. 015402.

**Parametric generation of light in a cavity: an analytical approximation**

**O. K. Bakhova**[1,a], **A. V. Belinsky**[2,b]

[1] *Department of Computer Modeling and Informatics.*
[2] *Department of Physics of the Earth.*
*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
*E-mail:* [a] *bahova.100@mail.ru,* [b] *belinsky@inbox.ru.*

A new analytical approximate solution is suggested for the problem of nonlinear parametric generation of light in a cavity. This solution is much more accurate than the known ones. Two- and three-cavity lasing schemes are considered and criteria for their adequacy are ascertained. The accuracy of the results is confirmed by computer simulation.

*Keywords*: laser physics, nonlinear optics, parametric generation of light, optical cavity.
PACS: 45.65.Yj.
*Received 26 October 2015.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2016. **71**, No. 1. Pp. 91–96.

**Сведения об авторах**

1. Бахова Ольга Константиновна — студентка; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: bahova.100@mail.ru.
2. Белинский Александр Витальевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, профессор; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: belinsky@inbox.ru.