

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

**Распространение электромагнитных волн
в средах со структурными дефектами**П. И. Пронин^a, Н. Э. Смирнов^b*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: ^a petr@phys.msu.ru, ^b smirnov@phys.msu.ru*

Статья поступила 11.12.2015, подписана в печать 19.01.2016.

Получены уравнения электромагнитного поля в твердом теле с дефектами и найдено волновое приближенное решение методом Дебая–Рытова.

Ключевые слова: твердое тело, дефекты, электродинамика, дислокации, электромагнитные волны, геометрическая оптика.

УДК: 537.877, 537.867, 537.9, 535.131. PACS: 61.72.–y, 61.72.Bb, 61.72.Lk, 41.20.–q, 42.15.–i, 78.90.+t.

Введение

Физические свойства твердых тел существенным образом зависят от наличия в них внутренних дефектов структуры. Основным видом таких дефектов являются дислокации. К описанию и изучению дислокаций существует два подхода: микроскопический и макроскопический. В зависимости от соотношения между характерной величиной рассматриваемого внутри твердого тела процесса (длиной звуковой или электромагнитной волны и др.) и размерами дислокаций необходимо выбрать тот или иной подход. Изучение влияния дислокаций на электродинамические свойства твердых тел с микроскопической (атомарной) точки зрения мы пока оставим в стороне и рассмотрим задачу в макроскопическом подходе, моделируя твердое тело как сплошную среду с заданными свойствами. Этот подход в последние годы привлекает большое внимание, и вопросам построения упругих моделей сред с дефектами посвящен ряд статей и монографий (см. [1, 2] и ссылки в ней). Макроскопический подход предполагает, что характерная длина волны физического процесса (длина электромагнитной или звуковой волны и т. п.) много больше параметров кристаллической решетки. Тогда влиянием взаимодействия распространяющихся волн с атомами в узлах кристаллической решетки можно пренебречь.

В рамках этого подхода идеальная сплошная среда (твердое тело без дефектов) может быть представлена с точки зрения симметричных свойств как евклидово многообразие E_3 , а ее движение — как отображение $\chi(\mathbf{r}, t): E_3 \rightarrow E_3$ [1, 3, 4]. Группой симметрий евклидова пространства является полупрямое произведение группы вращений $SO(3)$ на группу трансляций $T(3)$, ($SO(3) \triangleright T(3) = ISO(3) = P_6$).

Однако при появлении дефектов нарушается идеальность среды, а также свойство глобальной симметрии относительно $ISO(3)$ и возможность модели-

ровать среду как евклидово многообразие. Путь преодоления этой проблемы был указан в работах [3, 5] и заключался в рекомендации моделировать среду с дефектами пространством Римана–Картана с неевклидовой метрикой и несимметричным объектом связности.

Действительно, так как полупрямое произведение группы вращений $SO(3)$ на группу трансляций $T(3)$ гомеоморфно аффинной группе $GA(3)$, то геометрия пространства с аффинной связностью будет адекватно описывать свойства сплошной среды с линейными дефектами. Для пространств аффинной связности характерно независимое задание метрики $g_{\mu\nu}$ и связности $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, где греческие индексы принимают значения: 0, 1, 2, 3.

В физике сплошных сред геометрические идеи используются давно и плодотворно [6, 7]. Сравнительно недавно эти методы были подкреплены рядом идей, заимствованных из теории калибровочных полей [4, 8, 9], которые к тому же допускают вполне удовлетворительную микроскопическую интерпретацию [10]. В работе [4] удалось построить калибровочную теорию линейных дефектов в сплошной среде. В этой теории дефекты описывались с помощью калибровочных полей группы $ISO(3)$. Дислокациям тогда отвечает наличие ненулевых компонент в тензоре кручения $Q_{\mu\nu}^\alpha$ [4, 6, 10].

Исходя из вышеизложенных идей и постулатов, мы будем в качестве модели сплошной среды с дефектами рассматривать пространство Римана–Картана \mathcal{U}_4 с метрикой $g_{\mu\nu}$ и связностью $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

В геометрической модификации макроскопический подход к изучению физики сред с дефектами позволяет достаточно адекватно продемонстрировать влияние дислокаций на оптические и механические свойства кристаллов. При отсутствии дислокаций физические поля удовлетворяют уравнениям, записанным в пространстве Минковского \mathcal{M}_4 , а взаимо-

действие с дислокациями можно вводить универсальным способом, путем замены частных производных ∂_μ на ковариантные ∇_μ , в соответствии с принципом минимального взаимодействия [4].

В настоящей работе мы остановимся специально на вопросе прохождения электромагнитных волн через кристаллы с дефектами. Предположение о независимости метрики и кручения в рамках дифференциальной геометрии представляется естественным. С точки зрения описания твердого тела с дефектами это означает, что рассматриваются ситуации, в которых деформация среды не влияет на распределение дислокаций, и наоборот. Это случай малых деформаций или вообще их отсутствия. Причем внутренние напряжения, возникающие в кристаллах вследствие наличия дислокаций, моделируются как изменение геометрии континуума.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда можно пренебречь влиянием внешних напряжений на явления внутри твердого тела, т.е. метрика g_{ij} внутри твердого тела будет совпадать с метрикой евклидова пространства (латинские индексы принимают значения 1, 2, 3). Тогда метрика Минковского $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ будет метрикой как внешнего пространства, так и континуума, что отвечает случаю использования неточных форм для описания калибровочных полей дефектов [4], а связность задается лишь своими пространственными компонентами:

$$\Gamma_{jk}^i = Q_{jk}^i + Q_{jk}^i + Q_{kj}^i = \Gamma_{ijk}. \quad (1)$$

Также будем считать, что распределение дислокаций стационарно и, вследствие взаимодействия с электромагнитным полем, меняется пренебрежимо мало. Заметим также, что в предложенном описании взаимодействие микроструктуры среды с электромагнитным полем сказывается на нем лишь как эффективное изменение геометрии сплошной среды. Однако в процессе такого моделирования не следует забывать, что любую геометрическую величину необходимо связать с реальными, физически измеряемыми характеристиками среды, такими, например, как тензор плотности дислокаций и т.п.

С целью облегчить понимание описания процессов в средах с некоторым распределением дефектов путем исследования тех же процессов на неевклидовых многообразиях, мы в следующем разделе очень коротко напомним суть работ по геометрическому подходу к описанию сред с дефектами [3, 5, 11]. Во втором разделе получим уравнения электродинамики сплошной среды с дефектами. В третьем разделе методом Дебая–Рытова построено приближение геометрической оптики в среде с дислокациями и выведены уравнения для единичных векторов \mathbf{e} и \mathbf{h} , задающих направление векторов напряженности электрического и магнитного полей. В заключении коротко обсудим полученные результаты и перспективы данного подхода.

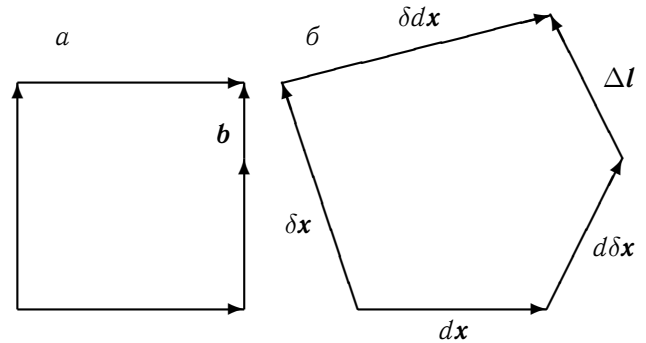
1. Связь тензора кручения с плотностью дислокаций в твердом теле

Обычно в реальном кристалле число линейных дефектов велико. Так, например, в [11] приводится типичное значение 10^8 см^{-2} для плотности дислокаций в кристалле. Причем при пластическом деформировании кристалла движутся одновременно только отдельные группы дислокаций, а остальные остаются закрепленными, и число закрепленных настолько велико, что это привело к описанию этих явлений как к теории дислокационного «леса» [12]. Поэтому с макроскопической точки зрения целесообразным является усредненное рассмотрение стационарных дислокаций в кристалле. В работах [5] был введен тензор $\hat{\rho}$ плотности дислокаций такой, что интеграл от него по поверхности S_L , опирающейся на некоторый контур L , равен суммарному вектору Бюргерса всех дислокационных линий, охватываемых этим контуром:

$$b^i = \int_{S_L} \rho^{ik}(x) dS_k, \quad (2)$$

где ρ^{ik} — тензор плотности дислокаций; b^i — проекция суммарного вектора Бюргерса; $dS_k = n_k dS$, где \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности.

Суммарный вектор Бюргерса компенсирует «разрыв» в структуре кристалла с дефектами при переходе к идеальной решетке. Схематически это показано на рисунке, а.



С другой стороны, из дифференциальной геометрии хорошо известно [13], что для аффинно-метрического многообразия с несимметричной связностью контур, построенный параллельным переносом векторов $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$ друг относительно друга, остается разомкнутым (в отличие от евклидова и риманова случая) на величину Δl_i (рисунок, б):

$$\Delta l_i = \int_{S_L} 2Q_{mn}^i dS^{mn}, \quad (3)$$

где $Q_{mn}^i = \frac{1}{2}(\Gamma_{mn}^i - \Gamma_{nm}^i)$ — тензор кручения, а dS^{mn} — антисимметричный тензор второго ранга, компоненты которого равны площади проекций параллелограмма, образованного векторами $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$, на координатные плоскости.

Установим связь между дифференциально-геометрической характеристикой многообразия, круче-

нием и материальной характеристикой среды — тензором плотности дислокаций. Для этого в (2) перейдем к интегрированию по $dS^{lk} = dx^k \delta x^l - dx^l \delta x^k$. Так как dS^{lk} — тензор, дуальный к вектору $d\mathbf{S}$, то

$$dS_j = (\varepsilon_{jkl} dS^{lk})/2,$$

где ε_{jkl} — полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты. Следовательно, получим

$$b^i = \int_{S_L} \rho^{ij} dS_j = \int_{S_L} \rho^{ij} ((\varepsilon_{jkl} dS^{kl})/2) = \int_{S_L} \tilde{Q}_{kl}^i dS^{kl},$$

где \tilde{Q}_{kl}^i — компоненты некоторого тензора третьего ранга антисимметричного по двум последним индексам. Выражение для вектора Бюргерса, согласующееся с [3, 5, 11], в рамках сделанных предположений имеет вид

$$b^i = \int_{S_L} Q_{kl}^i dS^{kl}, \quad (4)$$

где Q_{kl}^i — компоненты тензора кручения в данный момент времени. Следовательно, экспериментально определенному тензору $\hat{\rho}$ плотности дислокаций можно сопоставить тензор кручения \hat{Q} , равный

$$Q_{kl}^i = \kappa \varepsilon_{jkl} \rho^{ij}, \quad (5)$$

где κ — некоторая константа.

Поскольку рассматривается чисто дислокационное свободное состояние, метрика g_{ij} совпадает с евклидовой δ_{ij} , мы не будем различать верхние и нижние индексы. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

2. Электромагнитные поля в среде с линейными дефектами

В рамках геометрической трактовки сплошной среды с линейными дефектами уравнения для электромагнитного поля будут ковариантным обобщением уравнений Максвелла в пространстве \mathcal{U}_4 на случай несимметричной связности (1), выраженной через кручение [14, 15]. Считая, что распределение дислокаций стационарно и внешние напряжения отсутствуют, при отсутствии сторонних зарядов и токов, учитывая, что классические уравнения электромагнитного поля в среде связывают два типа физически различных величин — характеристики поля и характеристики вещества, — получим следующие уравнения для $F_{\mu\nu}$ и $G^{\mu\nu}$ [14]:

$$F_{[\mu\nu;\tau]} = 0, \quad (6)$$

$$G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (7)$$

Выражения для тензоров $F_{\mu\nu}$ и $G^{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{D} — индукция электрического поля, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{B} — индукция магнитного поля.

Подставляя в уравнения (6) и (7) выражения (8) и (9) для тензоров $F_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$ и выражение для связности (1) и учитывая соотношение между тензором кручения \hat{Q} и тензором плотности дислокаций $\hat{\rho}$ в среде (5), получим следующую систему векторных уравнений для электромагнитного поля в сплошной среде со стационарным распределением дислокаций:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \kappa ((\hat{\rho})_{ij} - (\hat{\rho}^\top)_{ij}) \varepsilon^{ikj} D_k, \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 2\kappa \hat{\rho}^\top \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \kappa ((\hat{\rho})_{ij} - (\hat{\rho}^\top)_{ij}) \varepsilon^{ikj} B_k, \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -2\kappa \hat{\rho}^\top \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $(\hat{\rho}^\top)_{ij} = (\hat{\rho})_{ji}$ — транспонированная матрица тензора плотности дислокаций. Здесь и в дальнейшем запись $\hat{\rho}^\top \mathbf{E}$ означает следующее: $(\hat{\rho}^\top \mathbf{E})_i = (\hat{\rho}^\top)_{ij} E_j$ и т. п.

3. Приближение геометрической оптики

Рытовым в работах [16, 17] был усовершенствован метод Дебая построения приближения геометрической оптики для векторных уравнений. Было показано, что исследование первого приближения непосредственно для уравнений Максвелла дает не только закон для изменения интенсивности электромагнитной волны, но и закон изменения поляризации излучения в сопутствующей системе координат. Причем эти соотношения были получены из условий существования решения для уравнений первого приближения.

Применим этот метод к полученной выше системе уравнений для электромагнитного поля в сплошной среде с линейными дефектами. Система уравнений для электромагнитных полей в сплошной среде со стационарным распределением дислокаций для случая симметричного тензора плотности дислокаций $\hat{\rho}$ ($\rho_{ij} = \rho_{ji}$) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \hat{C} \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \hat{C} \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (11)$$

где \hat{C} — тензор, совпадающий с $2\kappa \hat{\rho}$, т. е. $C_{ij} = 2\kappa \rho_{ij}$.

Будем искать решение в виде модулированной монохроматической волны, предполагая, что при

отсутствии дефектов среда является оптически однородной и изотропной с диэлектрической и магнитной проницаемостями равными единице, т. е. $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ при отсутствии дефектов. Для $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega t} \mathbf{H}(\mathbf{r})$ получим

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= ik\mathbf{E} - \widehat{C}\mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= ik\mathbf{H} - \widehat{C}\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$.

Представим $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(x, y, z) e^{-ik\Phi(x, y, z)}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B}(x, y, z) e^{-ik\Phi(x, y, z)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив (13) в (12) и домножив левые и правые части на $-\frac{1}{ik} \cdot e^{ik\Phi}$, получим:

$$\begin{aligned} [\nabla\Phi, \mathbf{B}] + \mathbf{E} &= -\frac{i}{k} \widehat{C}\mathbf{B} - \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{B}, \\ [\nabla\Phi, \mathbf{E}] - \mathbf{B} &= -\frac{i}{k} \widehat{C}\mathbf{E} - \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (14)$$

Разлагая \mathbf{E} и \mathbf{B} по степеням $\frac{i}{k}$ и подставив выражения $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{i}{k} \mathbf{E}_1 + \dots$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{i}{k} \mathbf{B}_1 + \dots$ в (14), будем иметь

$$\begin{aligned} [\nabla\Phi, \mathbf{B}_0] + \mathbf{E}_0 &= 0, \\ [\nabla\Phi, \mathbf{E}_0] - \mathbf{B}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} [\nabla\Phi, \mathbf{B}_1] + \mathbf{E}_1 &= -\widehat{C}\mathbf{B}_0 - \text{rot } \mathbf{B}_0, \\ [\nabla\Phi, \mathbf{E}_1] - \mathbf{B}_1 &= -\widehat{C}\mathbf{E}_0 - \text{rot } \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Однородная система уравнений (15) имеет решение, только если ее определитель Δ равен нулю, следовательно, $\Delta \equiv (\nabla\Phi)^2 - 1 = 0$. Откуда

$$(\nabla\Phi)^2 = 1. \quad (17)$$

Уравнение (17) — это уравнение эйконала, т. е. определяет кривую, по которой распространяется электромагнитная волна в сплошной среде со стационарным распределением дислокаций, описываемым симметричным тензором плотности дислокаций.

Кроме того, оказывается, что все миноры 5-го порядка также равны нулю, если $\Delta = 0$. Поэтому однородная система уравнений (15) имеет два линейно независимых решения. Введем обозначение $\mathbf{t} = \nabla\Phi$. Из (17) следует, что \mathbf{t} — единичный вектор, касательный к лучу, по которому распространяется электромагнитная волна. Общее решение (15) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \Phi_1 \mathbf{n} + \Phi_2 \boldsymbol{\beta}, \\ \mathbf{B}_0 &= -\Phi_2 \mathbf{n} + \Phi_1 \boldsymbol{\beta}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Phi_i = \Phi_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$, \mathbf{n} — вектор нормали к кривой, а $\boldsymbol{\beta}$ — вектор бинормали к кривой.

Вообще говоря, Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции координат. Для того, чтобы фиксировать Φ_1 и Φ_2 , воспользуемся условиями разрешимости системы уравнений (16).

Эти условия заключаются в ортогональности правых частей системы уравнений (16) к каждому из линейно независимых решений транспонированной

системы однородных уравнений. Но, как нетрудно видеть, матрица однородной системы уравнений (15) антисимметрична. Следовательно, уравнения транспонированной системы отличаются от уравнений (15) только общим знаком. Поэтому правые части системы уравнений (16) должны быть ортогональны каждому линейно независимому решению системы уравнений (15).

Запишем в общем виде эти условия:

$$\left((-\widehat{C}\mathbf{B}_0 - \text{rot } \mathbf{B}_0), \boldsymbol{\beta} \right) + \left((-\widehat{C}\mathbf{E}_0 - \text{rot } \mathbf{E}_0), \mathbf{n} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\left((-\widehat{C}\mathbf{E}_0 - \text{rot } \mathbf{E}_0), \boldsymbol{\beta} \right) - \left((-\widehat{C}\mathbf{B}_0 - \text{rot } \mathbf{B}_0), \mathbf{n} \right) = 0. \quad (20)$$

Учитывая, что $(\mathbf{n}, [\nabla, \boldsymbol{\beta}]) - (\boldsymbol{\beta}, [\nabla, \mathbf{n}]) = -\text{div } \mathbf{t}$, а $(\mathbf{n}, [\nabla\Phi_2, \boldsymbol{\beta}]) - (\boldsymbol{\beta}, [\nabla\Phi_2, \mathbf{n}]) = -2(\mathbf{t}, \nabla\Phi_2)$, получим из (19)

$$\begin{aligned} \Phi_1 \left\{ (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\beta}, \text{rot } \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{n}\widehat{C}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}\widehat{C}\boldsymbol{\beta} \right\} - \\ - \Phi_2 \text{div } \mathbf{t} - 2(\mathbf{t}, \nabla\Phi_2) + \Phi_2 \left(\mathbf{n}\widehat{C}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}\widehat{C}\mathbf{n} \right) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Второе соотношение (20) дает

$$\begin{aligned} \Phi_2 \left\{ (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\beta}, \text{rot } \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{n}\widehat{C}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}\widehat{C}\boldsymbol{\beta} \right\} - \\ - \Phi_1 \text{div } \mathbf{t} - 2(\mathbf{t}, \nabla\Phi_1) + \Phi_1 \left(\mathbf{n}\widehat{C}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}\widehat{C}\mathbf{n} \right) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Из симметричности \widehat{C} следует, что

$$\mathbf{n}\widehat{C}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}\widehat{C}\mathbf{n} = 2\kappa(\beta_i \rho_{ij} n_j - n_j \rho_{ji} \beta_i) = 2\kappa \beta_i n_j (\rho_{ij} - \rho_{ji}) = 0. \quad (23)$$

Тогда, домножив (21) на Φ_2 , а (22) на Φ_1 и вычитая из второго равенства первое, с учетом (23) легко видеть

$$(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \text{div } \mathbf{t} + (\mathbf{t}, \nabla(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)) = \nabla((\Phi_1^2 + \Phi_2^2)\mathbf{t}) = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) — это не что иное, как закон изменения интенсивности электромагнитной волны при ее распространении в сплошной среде (так как $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0) + (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0) = 2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \sim \mathcal{W}$ — плотность энергии электромагнитного поля, а векторное произведение $[\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0] = (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)\mathbf{t}$, следовательно, вектор Пойнтинга-Умова равен $\mathbf{S} = [\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0] = (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)\mathbf{t}$, откуда $\nabla((\Phi_1^2 + \Phi_2^2)\mathbf{t}) = \text{div } \mathbf{S}$, следовательно, $\text{div } \mathbf{S} = 0$).

Далее, умножая (21) на Φ_1 , а (22) на Φ_2 и складывая, получим

$$\begin{aligned} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \left\{ (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\beta}, \text{rot } \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{n}\widehat{C}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}\widehat{C}\boldsymbol{\beta} \right\} + \\ + 2\Phi_2(\mathbf{t}, \nabla\Phi_1) - 2\Phi_1(\mathbf{t}, \nabla\Phi_2) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Введем угол $\varphi = \text{arctg}(\Phi_2/\Phi_1)$ между вектором напряженности электрического поля \mathbf{E}_0 и вектором главной нормали \mathbf{n} к лучу (угол «поляризации»), тогда

$$\frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\beta}, \text{rot } \boldsymbol{\beta}) \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{n}\widehat{C}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}\widehat{C}\boldsymbol{\beta} \right\} + (\mathbf{t}, \nabla)\varphi.$$

Из приближения 0-го порядка следует, что $(\mathbf{t}, \nabla) \equiv \frac{d}{ds}$, где s — длина дуги, и

$$\frac{1}{2} \{(\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\beta}, \text{rot } \boldsymbol{\beta})\} = \frac{1}{T}, \quad (26)$$

в силу того что $(\mathbf{t}, \text{rot } \mathbf{t}) = 0$, T — радиус кручения кривой.

Таким образом, условия ортогональности примут вид

$$\text{div} ((\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \mathbf{t}) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T} + \kappa(n_i \rho_{ij} n_j + \beta_i \rho_{ij} \beta_j). \quad (28)$$

Изменение вектора $\mathbf{e} = \mathbf{n} \cos \varphi + \boldsymbol{\beta} \sin \varphi$, задающего направление вектора напряженности электрического поля, и вектора $\mathbf{h} = \boldsymbol{\beta} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi$, задающего направление вектора напряженности магнитного поля при перемещении вдоль эйконала, легко вычислить, используя формулы Френе для подвижного репера. Тогда

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = -\left(\frac{\cos \varphi}{R}\right) \mathbf{t} + \kappa(n_i \rho_{ij} n_j + \beta_i \rho_{ij} \beta_j) \mathbf{h}, \quad (29)$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{ds} = \left(\frac{\sin \varphi}{R}\right) \mathbf{t} - \kappa(n_i \rho_{ij} n_j + \beta_i \rho_{ij} \beta_j) \mathbf{e}, \quad (30)$$

где R — радиус кривизны кривой.

Из полученных выражений для $\frac{d\mathbf{e}}{ds}$ и $\frac{d\mathbf{h}}{ds}$ можно заметить, что они содержат два принципиально различных слагаемых. Второе слагаемое не равно нулю даже в том случае, когда свет распространяется по прямой, т.е. $\frac{1}{R} = 0$ и $\frac{1}{T} = 0$, а первый отличен от нуля, только если $\frac{1}{T} \neq 0$, следовательно, существенно зависит от параметров эйконала, по которому распространяется электромагнитная волна в сплошной среде с линейными дефектами. Вторые слагаемые в (28)–(30) описывают влияние дефектов на распространение электромагнитной волны в твердом теле.

Отметим важный частный случай, который может оказаться полезным при обсуждении возможных физических эффектов распространения электромагнитных волн в средах с дефектами, а именно случай $\rho_{ij} = \rho(x, y, z) \delta_{ij}$, что соответствует однородному распределению винтовых дислокаций в кристаллах.

Тогда уравнения (28)–(30) примут вид

$$\frac{d\mathbf{h}}{ds} = \kappa \rho \mathbf{e}, \quad (31)$$

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = -\kappa \rho \mathbf{h}, \quad (32)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \kappa \rho(s). \quad (33)$$

Откуда легко видеть, что уравнения для векторов \mathbf{e} и \mathbf{h} могут быть приведены к виду осциляторного уравнения с частотой $\omega = \kappa \rho$ для постоянного ρ .

Заключение

В настоящей работе мы использовали метод геометрического описания твердых тел с дефектами

для исследования процесса распространения электромагнитных волн в кристаллах. Сформулированная выше система уравнений (10) электромагнитного поля в сплошной среде со стационарным распределением дислокаций адекватно описывает электромагнитные свойства твердого тела с линейными дефектами.

Методом Дебая–Рытова получено приближение геометрической оптики непосредственно из векторных уравнений для электромагнитного поля в сплошной среде со стационарным распределением дислокаций, описываемым симметричным тензором плотности дислокаций. В нулевом приближении найдено уравнение эйконала для такой сплошной среды. В первом приближении получен закон изменения интенсивности электромагнитной волны и закон изменения ее поляризации в сопутствующей системе координат.

Ранее геометрический подход в физике сплошных сред был использован только для исследования задач теории упругости и приводил к удовлетворительному соответствию с опытными данными [18]. Следует отметить, что в последнее время накоплен достаточный экспериментальный материал о влиянии дефектов кристаллической структуры на электромагнитные явления [19–21]. Рассмотренный нами подход к исследованию волновых процессов в сплошных средах с дефектами представляется нам перспективным, и мы планируем вернуться к его обсуждению в следующих публикациях.

Авторы выражают свою благодарность сотрудникам кафедры теоретической физики за многочисленные дискуссии и участникам семинара кафедры молекулярных процессов и экстремальных состояний вещества физического факультета МГУ за обсуждение затронутых здесь вопросов.

Список литературы

1. Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах. М., 1985.
2. Kupferman R., Moshe M., Solomon J.P. // Arch. Ration. Mech. Anal. 2015. **216**, N 3. P. 1009.
3. Kröner E. Continuum Theory of Defects. Series of Lectures held at the Summer School on the Physics of Defects. Les Houches, 1980.
4. Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М., 1987.
5. RAAG Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by Means of Geometry. V. 1–4 / Ed. K. Kondo. Tokyo, 1955; 1958; 1962; 1968.
6. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., 1963.
7. Viswanathan K., Chandrasekar S. // J. Appl. Phys. 2014. **116**. P. 245103.
8. Kröner E. Gauge Field Theories of Defects in Solids. Stuttgart, 1982.
9. Hehl F., Lazar M. // Foundations of Physics. 2010. **40**, N 9. P. 1298.

10. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск, 1985.
11. Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К. и др. Введение в микромеханику. М., 1987.
12. Судзуки Т., Есинага Х. Динамика дислокаций и пластичность. М., 1989.
13. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. М., 1965.
14. Коноплева Н.П., Попов В.Н. // Калибровочные поля. М., 2000.
15. Nehl F., Heyde V.D., Kerlic G.D., Nester J.M. // Rev. Mod. Phys. 1976. **44**. P. 393.
16. Рытов С.М. // Доклады АН СССР. 1938. **18**, № 4. С. 263.
17. Рытов С.М. // Труды ФИАН СССР. 1940. **2**, № 1. С. 41.
18. Aono Y., Kuramoto E. // Rep. Inst. Appl. Mechanics, Kyushu Univ. 1981. **29**, N 92. P. 127.
19. Тяпунина Н.А., Белозерова Э.П. // Успехи физ. наук. 1988. **156**, № 4. С. 683.
20. Paufler P., Löschke K. // Phil. Mag. A. 1983. **47**, N 1. P. 79.
21. Berezin M., Kazmenetskii E.O., Shavit R. // J. of Optics. 2012. **14**, N 12. P. 125602.

Electromagnetic wave propagation in a medium with defects

P. I. Pronin^a, N. Ed. Smirnov^b

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^apetr@phys.msu.ru, ^bsmirnov@phys.msu.ru.

The equations of the electromagnetic field in a solid with defects were obtained and an approximate wave solution was found by the Debye–Rytov method.

Keywords: condensed matter, crystal defects, electrodynamics, dislocations, electromagnetic wave, geometrical optics.

PACS: 61.72.–y, 61.72.Bb, 61.72.Lk, 41.20.–q, 42.15.–i, 78.90.+t.

Received 11 December 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 2. Pp. 155–160.

Сведения об авторах

1. Пронин Петр Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: petr@phys.msu.ru.
2. Смирнов Николай Эдуардович — науч. сотрудник; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: smirnov@phys.msu.ru.