

Об одном способе построения траектории беспилотного летательного аппарата в городе

О. О. Царева^{1,a}, В. Ю. Попов^{1,3}, Д. Н. Сузанский²

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

²АО Концерн «Вега». Россия, 121170, Москва, Кутузовский пр-т, д. 34.

³Финансовый университет при Правительстве РФ. Россия, 125993, Москва, Ленинградский пр-т, д. 49.

E-mail: ^aolga8.92@mail.ru

Статья поступила 09.11.2015, подписана в печать 05.01.2016.

Предложен метод синтеза опорной траектории беспилотного летательного аппарата, огибающего препятствия городской застройки в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Для решения этой задачи впервые построено конформное отображение семейства прямоугольников, аппроксимирующих препятствия на цифровой карте рельефа местности.

Ключевые слова: опорная траектория, маловысотный полет, комплексный потенциал течения, отображение Кристоффеля–Шварца.

УДК: 532.5.031. PACS: 47.15.km.

Введение

Применение парка беспилотных летательных аппаратов (БЛА) за последние десятилетия свидетельствует об устойчивой тенденции расширения перечня решаемых ими задач в интересах различных министерств и ведомств. Прежде всего к ним относятся задачи оперативного и круглосуточного обзора земной поверхности, в том числе автомобильных и железных дорог, аэропортов и морских портов, трубопроводов различного назначения и т. д. Беспилотные летательные аппараты привлекаются для инспекции высокорисковых технологических объектов, в т.ч. в условиях чрезвычайных ситуаций, техногенных и природных катастроф (пожары, наводнения, радиационные и химические загрязнения, утечки нефти и газа, повреждения линий электропередач и т.п.). При этом стоит отметить, что решение указанных задач предполагает применение БЛА в режиме осуществления маловысотного полета (МВП) [1].

Для обеспечения реализации МВП над пересеченной местностью в пилотируемых летательных аппаратах (ЛА) используется специальный дорогостоящий радиолокационный комплекс, позволяющий формировать профильный полет ЛА, при котором траектория его полета повторяет профиль рельефа местности. Очевидно, что применение аналогичного комплекса в составе бортового оборудования БЛА представляется нецелесообразным по критерию «стоимость–эффективность». Кроме этого при решении некоторых специальных задач использование активного радиолокатора не рекомендуется, так как это может служить сильным демаскирующим фактором.

В рассмотренной ситуации одним из способов решения задачи обеспечения маловысотного полета беспилотным летательным аппаратом является фор-

мирование опорной траектории маловысотного полета БЛА на основе использования цифровой карты рельефа местности (ЦКРМ). Сформированная траектория должна быть гладкой функцией и иметь минимальные затраты времени при ее реализации [2].

При наличии в памяти бортового компьютера ЦКРМ, а также аппаратуры спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС/GPS, которая позволяет с определенной точностью определять текущее местоположение и компоненты скорости БЛА, формирование опорной траектории может быть выполнено «вручную» оператором с нанесением контрольных точек [3] или широким спектром математических подходов на основе теории оптимального управления с использованием градиентных, переборных методов, генетических алгоритмов и других методов теории дифференциальных игр [4–9], а также исходя из положений теории гидродинамики [10–15].

Перспективной является задача формирования опорной траектории облета БЛА совокупности препятствий. По этой причине в настоящей работе рассмотрен способ построения опорной траектории с применением комплексного потенциала бесциркуляционного обтекания цилиндра произвольного сечения, полученного на основе метода конформных отображений потенциальных потоков идеальной несжимаемой жидкости [16–19], а суммарный комплексный потенциал обтекания нескольких цилиндров как суперпозиция гармонических течений.

Формирование опорной траектории БЛА в режиме МВП с использованием ЦКРМ осуществляется в 3 этапа:

- горизонтальное/вертикальное сечение рельефа местности;
- аппроксимация замкнутых кривых в полученном сечении;
- вывод системы дифференциальных уравнений

(ДУ), фазовый портрет которых дает возможность строить множество желаемых траекторий.

Указанный алгоритм описан в работе [13], где препятствия в горизонтальной плоскости аппроксимировались эллипсами.

1. Общая постановка задачи

Построение опорной траектории движения ЛА является задачей интегрирования системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x(x, y), \\ \dot{y} = v_y(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Начальные условия для (1) определяют искомую траекторию. Правые части системы ДУ предлагается находить с использованием комплексного потенциала обтекания цилиндра, полученного на основе метода конформных отображений.

Комплексный потенциал течения $W(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$ есть аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Производная

$$\frac{dW}{dz} = \bar{v} = v_x - iv_y$$

представляет собой сопряженное значение комплексной скорости $v = v_x + iv_y$.

Построение плоского векторного поля скоростей v может быть сведено к нахождению аналитической функции $W(z)$.

В результате система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{Re} \left(\frac{dW}{dz} \right), \\ \dot{y} = -\operatorname{Im} \left(\frac{dW}{dz} \right). \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим способ определения комплексного потенциала течения в задаче о потенциальном обтекании бесконечного цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости (x, y) . Пусть область G плоскости z представляет собой внешность контура L . Задача обтекания контура L является граничной задачей определения гармонического векторного поля v с заданной циркуляцией Γ и скоростью в бесконечно удаленной точке V_∞ :

$$\operatorname{rot} v = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (3)$$

$$v_n|_L = 0, \quad (4)$$

$$v|_\infty = V_\infty, \quad (5)$$

$$\Gamma = \int_L v_\tau ds,$$

где $v_n = (v, n)$ — нормальная компонента скорости, а $v_\tau = (v, \tau)$ — касательная.

Если область D комплексной плоскости ζ является внешностью круга $|\zeta| > R$, то комплексный потенциал циркуляционного обтекания вычисляется как

$$W(\zeta) = \bar{V}_\infty \zeta + V_\infty \frac{R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta,$$

где V_∞ — скорость потока в бесконечно удаленной точке, \bar{V}_∞ — комплексно-сопряженная скорость.

С помощью конформного отображения плоская задача обтекания цилиндра произвольного сечения может быть сведена к задаче обтекания круглого цилиндра [16, с. 266].

При существовании преобразования $\zeta = f(z)$, отображающего внешность произвольного контура на внешность круга $|\zeta| > 1$ так, что $f(\infty) = \infty$, $f'_z(\infty) > 0$, где функция $f(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке полюс 1-го порядка, выражение для комплексного потенциала обтекания контура в плоскости физических переменных z имеет вид

$$W(z) = \frac{1}{f'_z(\infty)} \left(\bar{V}_\infty f(z) + V_\infty \frac{1}{f(z)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln f(z). \quad (6)$$

Векторное поле v , комплексный потенциал которого есть сумма парциальных потенциалов обтекания нескольких произвольных контуров, также удовлетворяет уравнениям (3), (4) и (5):

1. Из аналитичности комплексного потенциала простого потока следует аналитичность суммы таких комплексных потенциалов. А векторное поле v , выраженное через комплексный потенциал сложного потока, удовлетворяет уравнению Лапласа (3).

2. Запишем условие (4) обтекания контура L через функцию тока Ψ :

$$\begin{aligned} v_n|_L &= [v_x \cos(\widehat{n, x}) + v_y \cos(\widehat{n, y})]_L = \\ &= \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dl} \right]_L = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial l} \right]_L = 0, \end{aligned}$$

т.е. $\Psi|_L = \text{const}$ — контур L должен быть одной из линий тока.

Функция (6), как композиция двух функций, последовательно отображает внешность произвольного контура L на внешность единичного круга, а внешность круга на внешность отрезка вещественной оси. Этот отрезок не возмущает потока, направленного вдоль вещественной оси.

Выполняя ту же последовательность преобразований для нескольких произвольных контуров, каждый из которых отобразится в отрезок вещественной оси, получим совокупность отрезков, не возмущающих поступательный поток. Таким образом, условие (4) выполнено.

3. Выделение поступательного потока с комплексным потенциалом $\bar{V}_\infty z$ из суперпозиции простых потоков обеспечивает выполнение условия (5) на бесконечности.

2. Облет прямоугольников

Для формирования опорной траектории маловысотного полета БЛА с облетом городской застройки в горизонтальной и вертикальной плоскостях препятствия в полученных сечениях аппроксимируются прямоугольниками, а задача обтекания прямоугольного цилиндра сводится к нахождению функции Кристоффеля–Шварца, реализующей конформ-

ное отображение внешности круга на внутренность четырехугольника.

Сформулируем теорему Кристоффеля–Шварца [17]. Если функция $w = f(z)$ реализует конформное отображение верхней полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ на внутренность конечного n -угольника с углами $\pi\alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) при вершинах, причем известны точки вещественной оси a_k ($-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$), соответствующие вершинам этого n -угольника, то $f(z)$ представляется интегралом

$$f(z) = C \int_{a_1}^z \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + C_1,$$

где C и C_1 — некоторые комплексные константы.

Как известно [18, с. 170], функцией, осуществляющей конформное отображение полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ на четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ плоскости w , прообразы вершин которого — точки $a_1 = -\frac{c}{k}$, $a_2 = -c$, $a_3 = c$, $a_4 = \frac{c}{k}$ переходят в точки $A_1 = -\frac{l}{2} + ih$, $A_2 = -\frac{l}{2}$, $A_3 = \frac{l}{2}$, $A_4 = \frac{l}{2} + ih$ соответственно, является (неполный) эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода

$$\begin{aligned} w &= C' \int_0^z \left(\zeta' + \frac{c}{k}\right)^{-1/2} (\zeta' + c)^{-1/2} \times \\ &\quad \times (\zeta' - c)^{-1/2} \left(\zeta' - \frac{c}{k}\right)^{-1/2} d\zeta' + C_1 = \\ &= C \int_0^{z/c} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + C_1 = CF\left(\frac{z}{c}, k\right) + C_1, \end{aligned} \tag{7}$$

где c — константа, параметр k (модуль эллиптической функции) — положительное число, не больше единицы.

Если верхний предел эллиптического интеграла 1-го рода равен $\pm \frac{1}{k}$, то

$$F\left(\pm \frac{1}{k}, k\right) = \pm K(k) + iK(k'),$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$, а $K(k)$ — полный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода.

И с учетом соответствия точек

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= CK + C_1, \\ -\frac{l}{2} &= -CK + C_1, \\ \frac{l}{2} + ih &= CF\left(\frac{1}{k}, k\right) = CK + CiK', \\ -\frac{l}{2} + ih &= CF\left(-\frac{1}{k}, k\right) = CiK' - CK, \end{aligned}$$

из первой пары равенств найдутся константы $C_1 = 0$ и $C = \frac{l}{2K}$, из второй — трансцендентное уравнение

$$\frac{K(k')}{K(k)} = \frac{2h}{l},$$

которое точно решается лишь в частном случае квадрата $k = 3 - 2\sqrt{2}$. В общем случае модуль эллиптических функций Якоби $|k| < 1$ можно вычислить с помощью тета-функций [20, с. 58]:

$$k^2 = \frac{\theta_2^4(0, q)}{\theta_3^4(0, q)} = 1 - \frac{\theta_4^4(0, q)}{\theta_3^4(0, q)} = 1 - \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}}, \tag{8}$$

где параметр тета-функции $q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right)$.

Эта сложная формула затрудняет использование модуля эллиптических функций для параметризации прямоугольника.

Если в интеграле (7) выполнить дробно-линейную замену переменной

$$z = -i \frac{i-t}{i+t},$$

то точки вещественной оси a_k отобразятся в точки единичной окружности

$$b_k = i \frac{i+a_k}{i-a_k},$$

т.е. координаты $-\infty, -1, 0, 1, \infty$ вещественной оси $\text{Im } z = 0$ соответствуют точкам A, B, C, D, E на круге $|t| = 1$, схематически изображенном на рис. 1.

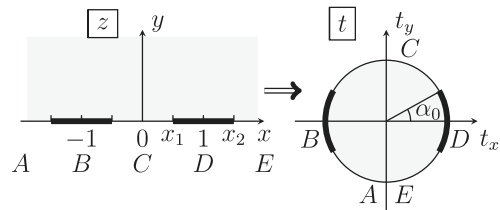


Рис. 1. Схема конформного отображения полуплоскости на круг

Точки x_1 и x_2 на полуплоскости связаны с углом α_0 на круге соотношениями

$$x_1 = \frac{\cos \alpha_0}{1 + \sin \alpha_0}, \quad x_2 = \frac{\cos \alpha_0}{1 - \sin \alpha_0}.$$

Поскольку $x_1 = c$, $x_2 = \frac{c}{k}$, модуль эллиптической функции

$$k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1 - \sin \alpha_0}{1 + \sin \alpha_0}.$$

В случае квадрата $k = 3 - 2\sqrt{2}$, откуда $\sin \alpha_0 = \frac{1-k}{1+k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$.

Функция, отображающая внешность единичного круга на внутренность квадрата, представляется в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{1/t} (\tau - e^{i\pi/4})^{-1/2} (\tau - e^{-i\pi/4})^{-1/2} (\tau - e^{i3\pi/4})^{-1/2} \times \\ &\quad \times (\tau - e^{-i3\pi/4})^{-1/2} d\tau = \int_0^{1/t} \frac{1}{\sqrt{1+\tau^4}} d\tau, \end{aligned} \tag{9}$$

где инверсия (или преобразование симметрии) относительно единичной окружности $\frac{1}{t}$ выступает в качестве верхнего предела интегрирования.

Параметризация полученного квадрата будет выполнена из геометрических соображений. Пусть длина l , высота h , смещение центра z_0 и угол поворота ϕ прямоугольника — варьируемые параметры.

Для изменения отношения сторон прямоугольника осуществляются повороты обеих диагоналей на угол α :

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \frac{h}{\sqrt{(h-l)^2 + h^2}}, & \text{если } h \geq l; \\ -\arccos \frac{l}{\sqrt{(l-h)^2 + l^2}}, & \text{если } h < l. \end{cases} \quad (10)$$

Коэффициент $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + h^2}$ реализует растяжение прямоугольника в μ раз.

Выражение (9) с учетом проведенной параметризации может принять вид функции, реализующей конформное отображение внешности единичного круга на внутренность прямоугольника:

$$f(z) = \int_0^{1/z} \frac{d\xi}{\sqrt{[1 - i(e^{i\alpha}\xi)^2][1 + i(e^{-i\alpha}\xi)^2]}}. \quad (11)$$

Будем считать, что БЛА в процессе выполнения полетного задания осуществляет равномерное и прямолинейное движение в горизонтальной плоскости со скоростью V_∞ и курсом ψ , начальная точка траектории задана координатами (x_0, y_0) . Вариант взаимного расположения БЛА и препятствия, аппроксимированного прямоугольником, иллюстрирует рис. 2.

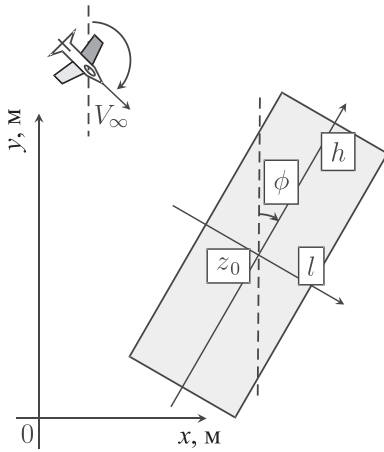


Рис. 2. Схема взаимного расположения БЛА и препятствия, аппроксимированного прямоугольником

Подставив искомое преобразование $f(z)$ в формулу (6), найдем комплексный потенциал бесциркуляционного обтекания прямоугольного цилиндра:

$$W(z) = \bar{V}_\infty \cdot \kappa \cdot f\left(\kappa \frac{z - z_0}{\mu}\right) + \frac{V_\infty}{\kappa \cdot f\left(\kappa \frac{z - z_0}{\mu}\right)}, \quad (12)$$

где $V_\infty = e^{i\psi}$ — скорость движения БЛА с заданным курсом ψ , $\kappa = e^{i\phi}$ — комплексное число, аргумент которого ϕ есть угол поворота прямоугольника.

Найденное выражение комплексного потенциала (12) подставляется в систему ДУ (2) с начальными условиями, определяющими искомую траекторию.

Комплексный потенциал обтекания N прямоугольных цилиндров примет вид

$$W(z) = \bar{V}_\infty z + \bar{V}_\infty \cdot \hat{\mu} \sum_{j=1}^N \left[\kappa_j \cdot f\left(\kappa_j \frac{z - z_{0j}}{\mu_j}\right) - \frac{z}{\mu_j} \right] + V_\infty \cdot \hat{\mu} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\kappa_j \cdot f\left(\kappa_j \frac{z - z_{0j}}{\mu_j}\right)},$$

где j — номер прямоугольника, $\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_j$ — среднее арифметическое.

На рис. 3 и 4 приведены линии тока, представляющие изолинии (линии уровня) функции тока $\Psi(z) = \text{Im } W(z)$ при обтекании пяти прямоугольников, и три траектории облета в горизонтальной

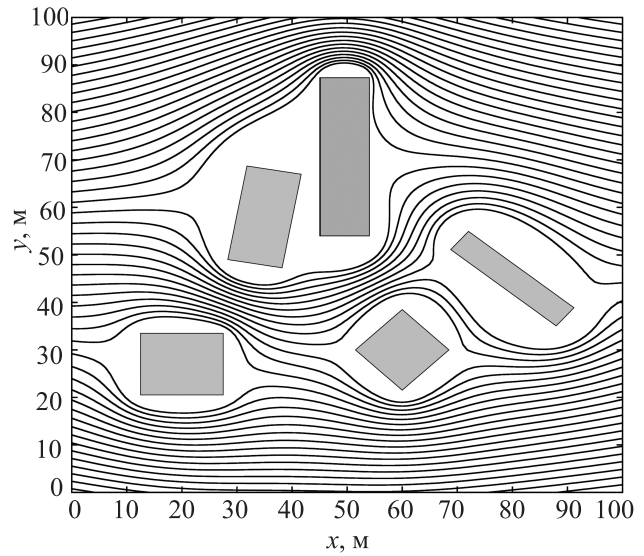


Рис. 3. Линии равного уровня функции тока $\Psi(z) = \text{Im } W(z)$ комплексного потенциала обтекания пяти прямоугольных цилиндров

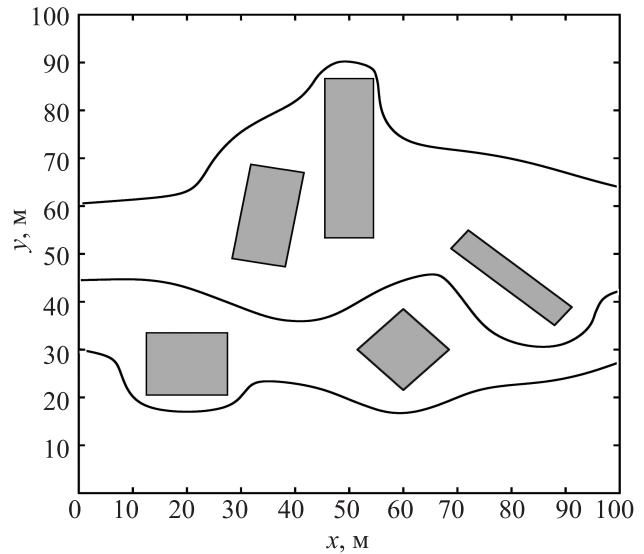


Рис. 4. Траектории облета прямоугольных препятствий в горизонтальной плоскости

плоскости как результат решений СДУ (2) с начальными условиями $x_{1,2,3}(0) = 0$, $y_{1,2,3}(0) = 30; 45; 60$ и курсом $\psi_{1,2,3} = \frac{\pi}{2}$.

Задача облета препятствий в вертикальной плоскости может быть решена с помощью метода зеркальных изображений, суть которого состоит в том, что исходная проблема отыскания поля заданных прямоугольных цилиндров в присутствии граничной поверхности сводится к расчету поля тех же и некоторых добавочных цилиндров-изображений, расположенных с другой стороны плоскости на том же расстоянии.

Комплексный потенциал обтекания N прямоугольных цилиндров, лежащих на поверхности $\text{Im } z = 0$, будет иметь вид

$$W(z) = \bar{V}_\infty z + \bar{V}_\infty \frac{\hat{\mu}}{2} \sum_{j=1}^N \left[f\left(\frac{z - z_{0j}}{\mu_j}\right) + f\left(\frac{z - \bar{z}_{0j}}{\mu_j}\right) - 2\frac{z}{\mu_j} \right] + V_\infty \frac{\hat{\mu}}{2} \sum_{j=1}^N \left[f\left(\frac{z - z_{0j}}{\mu_j}\right)^{-1} + f\left(\frac{z - \bar{z}_{0j}}{\mu_j}\right)^{-1} \right] + \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \frac{\hat{\mu}}{2} \left[\ln f\left(\frac{z - z_{0j}}{\mu_j}\right) - \ln f\left(\frac{z - \bar{z}_{0j}}{\mu_j}\right) \right],$$

где Γ_j — циркуляция по j -му прямоугольному цилиндру и, согласно свойству аддитивности, циркуляция вдоль поверхности $\text{Im } z = 0$ равна нулю. Циркуляция Γ_j задается исходя из предположения о том, что большие препятствия порождают большую циркуляцию, и ее введение позволяет опорной траектории обогнуть это препятствие, а не проходить сквозь него.

На рис. 5 проиллюстрирована сеть линий тока при обтекании четырех прямоугольников на поверхности и их отображения. Траектория облета

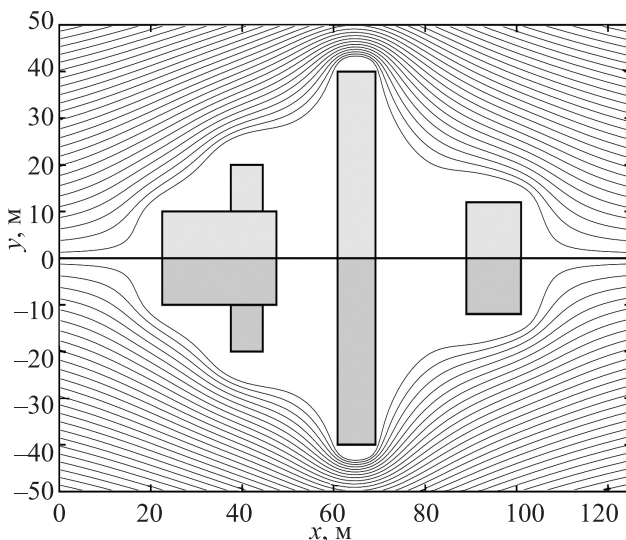


Рис. 5. Изолинии функции тока $\Psi(z) = \text{Im } W(z)$ комплексного потенциала обтекания четырех прямоугольных цилиндров, лежащих на поверхности

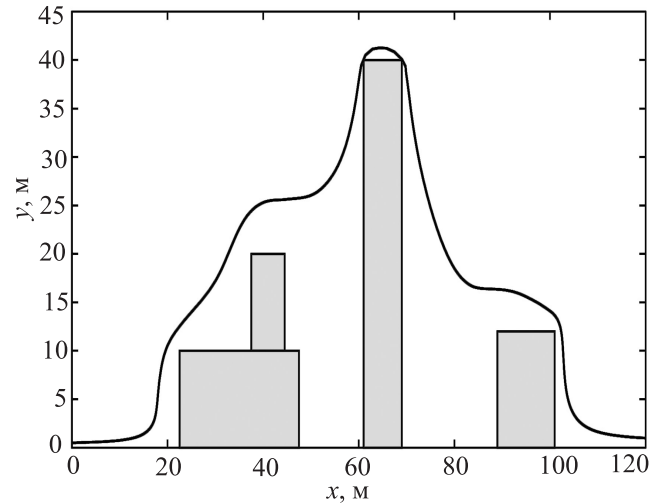


Рис. 6. Опорная траектория облета препятствий прямоугольной формы в вертикальной плоскости

в вертикальной плоскости с начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.5$ и углом тангажа $\psi = 0$ показана на рис. 6.

Заключение

В настоящей работе предложен простой и эффективный способ формирования опорной траектории летательного аппарата в режиме обогнания препятствий городской застройки в горизонтальной и вертикальной плоскостях. В качестве опорных траекторий используется сеть линий тока идеальной жидкости при обтекании прямоугольных препятствий, описываемых методом конформных отображений.

Применение такого способа построения опорных траекторий позволит управлять БЛА в режиме реального времени и оперативно реагировать на различные изменения окружающей обстановки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-08-00210-а).

Список литературы

1. Красильщиков М.Н., Себряков Г.Г. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов. М., 2009.
2. Велищанский М.А. // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 12.
3. Меркулов В.И., Канащенков А.И., Чернов В.С. и др. // Авиационные системы радиуправления. Т. 3. М., 2004.
4. Никифорова Л.Н., Яковлев К.С. // ИИиПР. 2009. № 3.
5. Брюсов С.В. // Авиакосмическое приборостроение. 2006. № 2.
6. Максимов Н.А., Федоров А.М. // ГИАБ. № 8. 2012.
7. Chao Z., Zhou S., Ming L., Zhang W. // Math. Prob. in Engineering. 2012. **2012**. P. 15.
8. Karimi J., Pourtakdoust S.H. // Aerosp. Sci. and Technol. 2013. **26**, N 1. P. 60.

9. *Deng Q., Yu J., Wang N.* // Chin. J. of Aeronautics. 2013. **26**, N 5. P. 1238.
10. *Wang H., Lyu W., Yao P.* et al. // Chin. J. of Aeronautics. 2015. **28**, N 1. P. 229.
11. *Daily R., Bevely D.M.* // American Control Conference. 2008. P. 4609.
12. *Кирсанов А.П., Сузанский Д.Н.* // Радиотехника. 2013. № 1. С. 73.
13. *Сузанский Д.Н., Попов В.Ю.* // Тр. XV Междунар. конференции. Самар. науч. центр РАН. 2013. С. 543.
14. *Иванова О.А., Попов В.Ю., Сузанский Д.В., Царева О.О.* // Тр. XV Междунар. конференции. Самар. науч. центр РАН. 2015. С. 604.
15. *Сузанский Д.Н., Попов В.Ю., Иванова О.А.* // Информ.-измерит. и упр. сист. 2014. Т. 3. № 12. С. 26.
16. *Иванов В.И., Попов В.Ю.* Конформные отображения и их приложения. М., 2002.
17. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М., 1963.
18. *Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев, 1970.
19. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1987.
20. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., 1967.

A method for constructing the trajectory for an unmanned aerial vehicle in a city

O. O. Tsareva^{1,a}, V. Yu. Popov^{1,3}, D. N. Suzansky²

¹*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

²*SC Corporation «Vega», Moscow 121170, Russia.*

³*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow 125993, Russia.*
E-mail: ^a*olga8.92@mail.ru.*

A synthesis method for the reference trajectory of an unmanned aerial vehicle that flies around obstacles of urban buildings in the horizontal and vertical planes is proposed. To solve this problem, for the first time a conformal mapping is constructed for a collection of rectangles that approximate the obstacles on the digital map of a terrain.

Keywords: reference trajectory, low-altitude flight, complex potential flow, Schwarz–Christoffel mapping.
PACS: 47.15.km.

Received 9 November 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 2. Pp. 161–167.

Сведения об авторах

1. Царева Ольга Олеговна — студентка; e-mail: olga8.92@mail.ru.
2. Попов Виктор Юрьевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: masterlu@mail.ru.
3. Сузанский Дмитрий Николаевич — доктор техн. наук, доцент, доцент; e-mail: suzansky@mail.ru.