Поляризация вакуума в модели дираковских фермионов с аномальным магнитным моментом, взаимодействующих с фоновым аксиально-векторным конденсатом и магнитным полем

А. Ф. Бубнов[a], Н. В. Губина, В. Ч. Жуковский[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] bfandrey@mail.ru, [b] zhukovsk@phys.msu.ru

Статья поступила 04.11.2015, подписана в печать 28.12.2015.

Рассматривается поляризация вакууума в модели, учитывающей аномальный магнитный момент (АММ) дираковских фермионов в однородном магнитном поле при наличии дополнительного аксиально-векторного взаимодействия. Вычисляются квадратичные поправки по величине АММ и аксиально-векторного взаимодействия к эффективному лагранжиану модели в различных конфигурациях заданных параметров модели.

Ключевые слова: электрон в магнитном поле, нарушение лоренц-инвариантности, аномальный магнитный момент, эффективный лагранжиан.

УДК: 539.12.01. PACS: 11.30.Cp, 12.60.Cn, 11.10.Ef, 13.40.Em.

Введение

Как известно, из уравнения Дирака следует, что частица, описываемая этим уравнением, должна обладать собственным моментом, т. е. спином, и связанным с ним кинематическим магнитным моментом, равным по абсолютной величине магнетону Бора $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$. Однако в рамках квантовой электродинамики (КЭД) уже в низшем порядке по постоянной тонкой структуры $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ возникает аномальный, швингеровский [1] вклад в дираковский магнитный момент:

$$\mu_{Sch} = \mu_0 (1 + \frac{\alpha}{2\pi}).$$

Аномальный момент $\mu = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \mu_0$ называют вакуумным магнитным моментом электрона. При этом величина вакуумного магнитного момента, рассчитанная с учетом радиационных поправок, как показано в работе [2], зависит от энергии электрона и напряженности внешнего магнитного поля, однако в области низких энергий и напряженности полей магнитный момент является практически постоянной величиной.

Учет взаимодействия АММ с внешним полем может быть описан феноменологически добавлением в уравнение Дирака слагаемого Паули–Швингера [3] (см. также [4]):

$$\frac{\mu}{2} \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta},$$

где $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu \right)$, $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$.

Кроме АММ, при описании движения фермиона в магнитном поле может быть учтен еще один дополнительный параметр, характеризующий нарушение лоренц-инвариантности в системе. В стандартной модели нет механизма, допускающего нарушение лоренц- и CPT-симметрий. Однако упомянутые нарушения могут присутствовать в более фундаментальных теориях, связанных с высшими размерностями. Так, например, подобные слагаемые могут возникать в теории гравитации и космологии [5, 6], где нарушение симметрий связывается с появлением анизотропии пространства, вызванной наличием некоторого векторного поля, имеющего ненулевое вакуумное среднее, или, как это следует из работы [7], в теории струн, где предполагается, что наш мир расположен на бране, существующей во вселенной более высокого числа измерений. Результирующая теория может быть эффективно описана в рамках расширенной Стандартной модели (SME) [8, 9].

В настоящей работе с учетом дополнительного фонового аксиально-векторного взаимодействия фермионов, которое производится путем введения в уравнение Дирака дополнительного CPT-нечетного слагаемого[1] вида $\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu b_\mu \psi$ (где b^μ — постоянный аксиальный четырехвектор) (см., например, [10–12]), а также с включением паули-швингеровского члена в лагранжиан, вычислен эффективный лагранжиан модели в однопетлевом приближении. Взаимодействие фермионов с внешним магнитным полем с учетом CPT-нечетного слагаемого подобного вида производилось ранее [13]. Современные экспериментальные оценки на величину компонент вектора b^μ для электрон-позитронной пары см., например, в работе [14]:

$$|b_0| \lesssim 10^{-14}\ \text{ГэВ}, \quad |\boldsymbol{b}| \lesssim 10^{-31}\ \text{ГэВ}. \qquad (1)$$

Заметим, что проблема описания динамики фермионов, обладающих аномальным моментом, в последние годы привлекала значительное внимание

[1] Подобное слагаемое не влияет на калибровочную инвариантность действия, но меняет дисперсионные соотношения для дираковских спиноров.

(см., например, [15–19]). При этом фоновое взаимодействие, имеющее вид слагаемого Паули–Швингера, может возникать также в рамках SME-теории, а также при обсуждении нарушающих четность взаимодействий космических полей с атомами, молекулами и ядрами[1] [16]. Заметим также, что члены взаимодействия с аксиально-векторным конденсатом обсуждались в связи с возможными проявлениями индуцируемого фермионами поля кручения [20].

1. Постановка задачи

Рассмотрим фермион (электрон) в постоянном однородном магнитном поле при наличии в лагранжиане модели дополнительного фонового аксиально-векторного взаимодействия вида $\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu b_\mu\psi$ с постоянным параметром b^μ.

В работе остановимся на двух вариантах: четырехвектор b^μ имеет вид $(b^0,\mathbf{0})$ и $(0,\boldsymbol{b})$ (отличны от нуля только временная и пространственная компоненты соответственно). В последнем случае мы будем считать, что трехмерный вектор $\boldsymbol{b}$ ориентирован вдоль (или против) направления вектора напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$. В первом случае мы учтем также конденсат в виде АММ фермиона (который может возникать при рассмотрении космических полей, нарушающих четность взаимодействий [16])

$$\mu \simeq \kappa\mu_0, \tag{2}$$

где κ — величина аномального момента, которую, так же, как и величину конденсата в виде четырехвектора b^μ, мы будем считать заданными постоянными модели (в случае вакуумного магнитного момента электрона $\kappa = \frac{\alpha}{2\pi}$).

Действие дираковского фермиона (отрицательно заряженного электрона), взаимодействующего с указанными выше конденсатами, имеет следующий вид:

$$S = \int d^4x\left(\mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^{\mathrm{LB}} + \mathcal{L}^{\mathrm{VMM}}\right), \tag{3}$$

где $\mathcal{L}^0$ — стандартный дираковский лагранжиан

$$\mathcal{L}^0 = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi; \tag{4}$$

$\mathcal{L}^{\mathrm{LB}}$ — часть, отвечающая взаимодействию с аксиально-векторным фоном, нарушающим лоренц-инвариантность теории, а также, как нетрудно убедиться, CPT-четность:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{LB}} = -\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu b_\mu\psi; \tag{5}$$

$\mathcal{L}^{\mathrm{VMM}}$ — часть, феноменологически описывающая взаимодействие АММ дираковской частицы с электромагнитным полем [3]:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{VMM}} = \overline{\psi}\left(\frac{\mu}{2}\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\psi. \tag{6}$$

Будем считать, что в нашей модели внешнее постоянное однородное магнитное поле с напряженностью $\boldsymbol{H}$ ориентировано по оси z: $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{e}_z$, $H>0$, а электрическое поле отсутствует. Действию (3) соответствует модифицированное уравнение Дирака для поля ψ

$$\left(i\gamma^\alpha D_\alpha - m + \frac{\mu}{2}\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \gamma^5\gamma^\alpha b_\alpha\right)\psi = 0. \tag{7}$$

Поляризационный оператор (соотвествующий «поперечной» поляризации частицы) задается выражением

$$\widehat{\Pi} = \left(m\boldsymbol{\Sigma} + i\gamma^0\gamma^5[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{P}]\right)_3, \tag{8}$$
$$\Sigma_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk}, \quad \boldsymbol{P} = \{P_1, P_2, p\}.$$

Рассмотрим возможные частные случаи (всюду ниже: $n = 0,1,2,\ldots$ — главное квантовое число Ландау, $\zeta = \pm 1$ — проекция спина фермиона на направление магнитного поля, $\epsilon = \pm 1$ — знак энергии).

1. АММ $\mu = 0$, аксиальный конденсат[2] $b_0 = b \neq 0$, $\boldsymbol{b} = 0$ [13, 21–23, 25]:

$$E^2 = m^2 + \left(\mathrm{sgn}(p)\sqrt{p^2 + 2eHn} + \zeta b\right)^2.$$

2. АММ $\mu = 0$, аксиальный конденсат $b_0 = 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$, $\boldsymbol{b} = (0,0,b)$, $p \equiv p_z$ [13, 26]:

$$E^2 = 2eHn + \left(\sqrt{m^2 + p^2} + \zeta b\right)^2.$$

3. АММ $\mu \neq 0$, аксиальный конденсат $b_0 = 0$, $\boldsymbol{b} = 0$ [13, 26, 27]:

$$E^2 = p^2 + \left(\sqrt{2eHn + m^2} + \zeta\mu H\right)^2.$$

4. АММ $\mu \neq 0$, аксиальный конденсат $b_0 \neq 0$, $\boldsymbol{b} = 0$ [13]:

$$E^2 = m^2 + p^2 + 2eHn + (\mu H)^2 + b^2 \pm$$
$$\pm 2\sqrt{[m(\mu H) + bp]^2 + 2eHn\left[(\mu H)^2 + b^2\right]}. \tag{9}$$

2. Эффективный лагранжиан

Эффективный лагранжиан можно вычислить на основе метода собственного времени (пятого параметра) [28]

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{eH}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\sum_{n,\zeta,\epsilon}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-sE^2}, \tag{10}$$

где Λ — параметр обрезания. Суммирование по квантовым числам проведем с помощью формулы

$$\sum_{n,\zeta,\epsilon}\mathrm{e}^{-2s(eH)n} = 2\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2s(eH)n}\right] = 2\,\mathrm{cth}(eHs). \tag{11}$$

---

[1] Необходимо отметить также, что в рамках SME рассматривалось влияние CPT-нечетного взаимодействия на дипольный момент связанных электронов, приводящее к возникновению анапольного момента атомных орбиталей и специфической асимметрии углового распределения излучения водородоподобного атома [19].

[2] В работах [21, 25] для описания спектра кварка в случае асимметрии по числу левых и правых кварков в силу аксиальной аномалии вместо b_0 применялся киральный химический потенциал μ_5.

Здесь первое слагаемое отвечает квантовым числам, соответствующим основному (невырожденному) состоянию $n=0$, $\zeta=+1$ (для $e>0$) и $n=0$, $\zeta=-1$ (для $e<0$).

Случай 1 ($\mu=0$, $b_0=b\neq 0$). Ограничимся приближением малых b. Заметим, что член линейный по b будет отсутствовать в силу нечетности выражения по ζ при $n\neq 0$, а при $n=0$ в силу нечетности по переменной интегрирования p, входящей в этом случае в выражение для энергии в комбинации $(p+\zeta b)^2$ (при фиксированном ζ). Тогда с точностью до b^2 запишем $\Delta\mathcal{L}^b$ в виде $\Delta\mathcal{L}^b=\Delta\mathcal{L}^b_{21}+\Delta\mathcal{L}^b_{22}$, где

$$\Delta\mathcal{L}^b_{21}=\frac{eH}{4\sqrt{\pi}\,(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\times \sum_{n,\zeta,\epsilon}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-s(m^2+p^2+2eHn)}(-sb^2)= -2b^2\frac{eH}{4(2\pi)^2}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\,\mathrm{cth}(eHs)\,\mathrm{e}^{-sm^2}, \quad (12)$$

а вклад $\Delta\mathcal{L}^b_{22}$ разложения экспоненты:

$$\Delta\mathcal{L}^b_{22}=\frac{eH}{4\sqrt{\pi}\,(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\times \sum_{n,\zeta,\epsilon}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-s(m^2+p^2+2eHn)}\,2s^2b^2(p^2+2eHn). \quad (13)$$

Пользуясь тем, что

$$\mathrm{e}^{-s(p^2+2eHn)}(p^2+2eHn)=-\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{e}^{-s(p^2+2eHn)}, \quad (14)$$

и учитывая (11), получим

$$\Delta\mathcal{L}^b_{22}=b^2\frac{eH}{(2\pi)^2}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}ds\,\mathrm{e}^{-sm^2}\left[\frac{1}{2s}\,\mathrm{cth}(eHs)+\frac{eH}{\mathrm{sh}^2\,eHs}\right]. \quad (15)$$

Итак, $\Delta\mathcal{L}^b$ примет вид:

$$\Delta\mathcal{L}^b=\Delta\mathcal{L}^b_{21}+\Delta\mathcal{L}^b_{22}=\frac{(eH)^2b^2}{(2\pi)^2}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}ds\frac{\mathrm{e}^{-sm^2}}{\mathrm{sh}^2\,eHs}. \quad (16)$$

Интегрируя по частям с учетом регуляризации и проведя вычитание, выделим в (16) конечный вклад:

$$\Delta\mathcal{L}^b=\frac{b^2}{4\pi^2}\left[-m^2eH\int\limits_0^{\infty}ds\,\mathrm{e}^{-sm^2}\left(\mathrm{cth}(eHs)-\frac{1}{eHs}\right)+\Lambda^2-m^2\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right]. \quad (17)$$

Здесь слагаемые, содержащие Λ, не зависят от магнитного поля и поглощаются перенормировкой коэффициента перед b^2, так что

$$\Delta\mathcal{L}^b=-b^2\frac{(eH)m^2}{4\pi^2}\int\limits_0^{\infty}ds\,\mathrm{e}^{-sm^2}\left(\mathrm{cth}(eHs)-\frac{1}{eHs}\right). \quad (18)$$

Предельный случай. В слабом поле $eH\ll m^2$ с учетом разложения

$$\mathrm{cth}\,x\approx\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)$$

после интегрирования по частям получаем

$$\Delta\mathcal{L}=\frac{1}{12\pi^2}b^2(eH)^2\int\limits_0^{\infty}dx\,\mathrm{e}^{-x}\,\frac{x}{m^2}=\frac{b^2(eH)^2}{12\pi^2m^2}. \quad (19)$$

В сильном поле $eH\gg m^2$, переходя к переменной интегрирования $x=sm^2$ и приближенно интегрируя в случае $B=eH/m^2\gg 1$

$$\int\limits_0^{\infty}dx\,\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{cth}\,Bx-\frac{1}{Bx}\right)\approx 1,$$

находим

$$\Delta\mathcal{L}\approx\frac{b^2eH}{4\pi^2}. \quad (20)$$

Более точная аппроксимация получается с использованием представления результата через пси-функцию Эйлера [23].

Случай 2 ($\mu=0$, $b_0=0$, $\boldsymbol{b}=(0,0,b)$, $b\neq 0$). Ограничимся приближением малых b с точностью до b^2 (линейный член отсутствует в силу нечетности выражения по ζ). Тогда $\Delta\mathcal{L}^b$ можно представить как сумму двух слагаемых: $\Delta\mathcal{L}^b=\Delta\mathcal{L}^b_{21}+\Delta\mathcal{L}^b_{22}$, где $\Delta\mathcal{L}^b_{21}$ имеет вид, идентичный (12) из случая 1.

Для второго слагаемого запишем:

$$\Delta\mathcal{L}^b_{22}=\frac{eH}{4\sqrt{\pi}\,(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\times \sum_{n,\zeta,\epsilon}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-s(m^2+p^2+2eHn)}\,2s^2b^2(p^2+m^2).$$

Используя (14) и результат (11), выполним интегрирование по импульсу и суммирование по квантовым числам, в результате чего получим выражение

$$\Delta\mathcal{L}^b_{22}=\frac{b^2}{(2\pi)^2}\Lambda^2+\frac{(eH)b^2}{(2\pi)^2}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}ds\,\mathrm{e}^{-sm^2}\,\mathrm{cth}\,eHs- -\frac{(eH)^2b^2}{(2\pi)^2}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}ds\,\mathrm{e}^{-sm^2}\frac{1}{\mathrm{sh}^2\,eHs}.$$

Первое слагаемое не зависит от поля H и уходит в перенормировку, второе слагаемое в $\Delta\mathcal{L}^b_{22}$ при суммировании $\Delta\mathcal{L}^b=\Delta\mathcal{L}^b_{21}+\Delta\mathcal{L}^b_{22}$ взаимно уничтожается с $\Delta\mathcal{L}^b_{21}$.

Окончательно, после интегрирования по частям, регуляризации и переномировки имеем

$$\Delta\mathcal{L}^b = b^2\frac{(eH)m^2}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty ds\,\mathrm{e}^{-sm^2}\left(\mathrm{cth}(eHs) - \frac{1}{eHs}\right), \tag{21}$$

т. е. результат, отличающийся только знаком от случая 1.

Объединим полученные результаты, для чего введем вектор

$$\beta^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}b_\nu F_{\alpha\beta},$$

где в нашем случае отличны от нуля компоненты

$$\beta^0 = \varepsilon^{0312}b_3F_{12} = b_3H \qquad (\mu = 0),$$
$$\beta^3 = \varepsilon^{3012}b_0F_{12} = -b_0H \quad (\mu = 3),$$

так что квадрат вектора равен

$$(\beta)^2 = (\beta^0)^2 - (\beta^3)^2 = (\boldsymbol{bH})^2 - (b_0H)^2.$$

Запишем в инвариантном виде выражение для общего случая:

$$\Delta\mathcal{L}^b = -b^2\frac{(eH)m^2}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty ds\,\mathrm{e}^{-sm^2}\left(\mathrm{cth}(eHs) - \frac{1}{eHs}\right), \tag{22}$$

где $b = (b_0, 0, 0, b_3)$.

Случай 3 ($\mu \neq 0$, $b = 0$). Считая μH малым, ограничимся разложением до $(\mu H)^2$ в (10) для $\Delta\mathcal{L}$. Линейный вклад для $n \neq 0$ выпадает в силу нечетности по $\zeta = \pm 1$ выражения $\Delta\mathcal{L}$. Тогда как для основного состояния ($n = 0$) он отличен от нуля, ввиду того что знак $\zeta = +1$ или $\zeta = -1$ остается фиксированным независимо от знака энергии $\epsilon = +1$, $\epsilon = -1$.

Рассмотрим сначала слагаемые пропорциональные $(\mu H)^2$, где $\Delta\mathcal{L}$ представим как $\Delta\mathcal{L}^{\mu H} = \Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{21} + \Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{22}$. Для $\Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{21}$ находим выражение

$$\Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{21} = \frac{eH}{4\sqrt{\pi}\,(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\,\times$$
$$\times\sum_{n,\zeta,\epsilon}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-s(m^2+p^2+2eHn)}\left(-s(\mu H)^2\right) =$$
$$= -2(\mu H)^2\frac{eH}{4(2\pi)^2}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\,\mathrm{cth}(eHs)\,\mathrm{e}^{-sm^2}, \tag{23}$$

которое выглядит аналогично $\Delta\mathcal{L}^b_{21}$ из случаев 1 и 2. Перейдем к $\Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{22}$:

$$\Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{22} = \frac{eH}{4\sqrt{\pi}\,(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\,\times$$
$$\times\sum_{n,\zeta,\epsilon}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-s(m^2+p^2+2eHn)}\,2s^2(\mu H)^2(m^2+2eHn). \tag{24}$$

Используя соотношение (14) и формулу (11), интегрирование в (24) можно выполнить полностью:

$$\Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{22} = \frac{(\mu H)^2\Lambda^2}{(2\pi)^2}.$$

После проведения регуляризации вычитанием итоговое суммарное выражение может быть приведено к виду (см. также [24]):

$$\Delta\mathcal{L}^{\mu H} = \Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{21} + \Delta\mathcal{L}^{\mu H}_{22} =$$
$$= -\frac{(\mu H)^2 eH}{2(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty ds\frac{\mathrm{e}^{-sm^2}}{s}\left(\mathrm{cth}(eHs) - \frac{1}{eHs}\right) +$$
$$+ \frac{(\mu H)^2}{2(2\pi)^2}\left(\Lambda^2 + m^2\log\frac{\Lambda^2}{m^2}\right). \tag{25}$$

Первое слагаемое сходится, а последнее рассмотрим вместе с вкладом линейного члена:

$$\Delta\mathcal{L}^{\mu H}_1 = \frac{eH(\mu H)m}{(2\pi)^2}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\,\mathrm{e}^{-sm^2} = \frac{eH(\mu H)m}{(2\pi)^2}\log\frac{\Lambda^2}{m^2}. \tag{26}$$

Можно записать

$$\frac{m^2(\mu H)^2}{2(2\pi)^2}\log\frac{\Lambda^2}{m^2} = \left(\frac{\kappa}{4(2\pi)}\right)^2(eH)^2\log\frac{\Lambda^2}{m^2},$$
$$\frac{\Lambda^2(\mu H)^2}{2(2\pi)^2} = \left(\frac{\kappa}{4(2\pi)}\right)^2(eH)^2\Lambda^2/m^2.$$

В то же время

$$\frac{eH(\mu H)m}{(2\pi)^2}\log\frac{\Lambda^2}{m^2} = \frac{\kappa}{4(2\pi)^2}2(eH)^2\log\frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

Таким образом, имеющиеся расходимости в эффективном лагранжиане $\Delta\mathcal{L}^{\mu H}$ могут быть устранены за счет перенормировки коэффициента в выражении для АММ.

Случай 4 ($\mu \neq 0$, $b_0 = b \neq 0$). Для рассмотрения общего случая и учета обоих дополнительных параметров удобно, следуя работе [13], ввести угол смешивания Θ:

$$\Theta = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{\mu H},$$

так что

$$\mu H = \widetilde{\mu}H\cos\Theta, \quad b = \widetilde{\mu}H\sin\Theta, \quad \widetilde{\mu}H = \sqrt{(\mu H)^2 + b^2},$$

где $\widetilde{\mu}$ — эффективный АММ.

Переход между «старыми» параметрами m, p и «новыми» $\widetilde{m}$, $\widetilde{p}$ осуществляется посредством следующих преобразований:

$$\begin{pmatrix}\widetilde{m}\\ \widetilde{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\Theta & \sin\Theta\\ -\sin\Theta & \cos\Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ p\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}m\\ p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\Theta & -\sin\Theta\\ \sin\Theta & \cos\Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{m}\\ \widetilde{p}\end{pmatrix},$$

для которых справедливо соотношение $\widetilde{m}^2 + \widetilde{p}^2 = m^2 + p^2$.

В новых переменных спектр (9) запишется в виде

$$E^2 = \left(\sqrt{\widetilde{m}^2 + 2eHn} + \widetilde{\mu}H\zeta\right)^2 + \widetilde{p}^2.$$

Учитывая наличие аномалии основного состояния, рассмотрим отдельно случаи $n \neq 0$ и $n = 0$, а $\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}^{n\neq 0} + \Delta\mathcal{L}^{n=0}$.

Пусть $n \neq 0$. В разложении эффективного лагранжиана до второго порядка по малому параметру $\widetilde{\mu}$ включительно выражение, линейное по $\widetilde{\mu}$, обращается в нуль ввиду нечетности по ζ, а слагаемые, пропорциональные $\widetilde{\mu}^2$, можно представить как

$$\Delta\mathcal{L}_2^{n\neq 0} = (\widetilde{\mu}H)^2 \frac{(eH)^2}{(2\pi)^2} \int\limits_{1/\Lambda^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-m^2 s} \frac{ds}{\mathrm{sh}^2(eHs)} -$$
$$- \frac{1}{2}(\widetilde{\mu}H)^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} \cos^2\Theta \int\limits_{1/\Lambda^2}^{+\infty} \frac{ds}{s} \mathrm{e}^{-m^2 s} \mathrm{cth}(eHs) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\widetilde{\mu}H)^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} \cos^2\Theta \int\limits_{1/\Lambda^2}^{+\infty} \frac{ds}{s} \mathrm{e}^{-m^2 s} +$$
$$+ (\widetilde{\mu}H)^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} m^2 \cos^2\Theta \int\limits_{1/\Lambda^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-m^2 s}\, ds\, \mathrm{cth}(eHs) -$$
$$- (\widetilde{\mu}H)^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} m^2 \cos^2\Theta \int\limits_{1/\Lambda^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-m^2 s}\, ds. \quad (27)$$

Пусть теперь $n = 0$. Спектр основного состояния, переписанный в эффективных переменных:

$$E^2 = \left(-\widetilde{m} + \widetilde{\mu}H\right)^2 + \widetilde{p}^2. \quad (28)$$

После разложения экспоненты в (10) по малому параметру $\widetilde{\mu}H$ и вычисления интеграла по импульсу квадратичный и линейный по $\widetilde{\mu}H$ вклады в эффективный лагранжиан могут быть записаны как

$$\Delta\mathcal{L}_2^{n=0} = -\frac{1}{2}(\widetilde{\mu}H)^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} \cos^2\Theta \int\limits_{1/\Lambda^2}^{+\infty} \frac{ds}{s} \mathrm{e}^{-m^2 s} +$$
$$+ (\widetilde{\mu}H)^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} m^2 \cos^2\Theta \int\limits_{1/\Lambda^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-m^2 s}\, ds, \quad (29)$$

$$\Delta\mathcal{L}_1^{\widetilde{\mu}H} = \frac{(eH)(\widetilde{\mu}H)m}{(2\pi)^2} \cos\Theta \int\limits_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \mathrm{e}^{-sm^2}. \quad (30)$$

После суммирования слагаемых разложения $\Delta\mathcal{L}$ итоговое перенормированное выражение, задающее квадратичный по эффективному АММ $\widetilde{\mu}H$ и параметру, нарушающему лоренц-инвариантность b, вклад в эффективный лагранжиан, имеет вид

$$\Delta\mathcal{L} = -(\widetilde{\mu}H)^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{+\infty} ds\, \mathrm{e}^{-m^2 s} \times$$
$$\times \left(m^2 \sin^2\Theta + \frac{1}{2s}\cos^2\Theta\right)\left(\mathrm{cth}(eHs) - \frac{1}{eHs}\right), \quad (31)$$

где процедура перенормировки проведена аналогично случаю 3.

Заметим, что итоговое выражение корректно переходит в частные случаи ($\mu \neq 0$ и $b = 0$ или $b_0 \neq 0$ и $\mu = 0$):

$\Theta = 0$ реализует вариант $b = 0$, тогда $\widetilde{\mu}H = \mu H$ и в этом случае

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}^{\mu H} =$$
$$= -\frac{1}{2}(\mu H)^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \mathrm{e}^{-m^2 s} \left(\mathrm{cth}(eHs) - \frac{1}{eHs}\right). \quad (32)$$

$\Theta = \pi/2$ реализует вариант $\mu = 0$, тогда $\widetilde{\mu}H = b_0$ и в этом случае

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}^b =$$
$$= -b^2 \frac{eH}{(2\pi)^2} m^2 \int\limits_0^{+\infty} ds\, \mathrm{e}^{-m^2 s} \left(\mathrm{cth}(eHs) - \frac{1}{eHs}\right). \quad (33)$$

Заключение

В работе получен однопетлевой вклад в эффективное действие в магнитном поле в квадратичном порядке отдельно по параметру b^μ расширенной Стандартной модели, который согласуется с работами [22, 23] и отдельно в квадратичном порядке по величине АММ электрона μ. На основе разработанной авторами техники вычислен вклад в эффективное действие в общем случае (одновременно $\mu \neq 0$ и $b \neq 0$): учтено как взаимодействия АММ с внешним магнитным полем, так и взаимодействие фермионов с фоновым полем b^μ в квадратичном приближении, во всех порядках по полю H. Полученное выражение в предельных случаях согласуется с частными случаями, рассмотренными в работах [22, 23].

Список литературы

1. *Schwinger J.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1954. **40**. P. 132.
2. *Ternov I.M., Bagrov V.R., Dorofeyev O.F.* et al. // J. Phys. A: Math. Gen. 1978. **11**. P. 739.
3. *Pauli W.* // Rev. Mod. Phys. 1941. **13**. P. 203.
4. *Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М., 1989.
5. *Ahmadi F., Jalalzadeh S., Sepangi H.R.* // Class. Quantum Grav. 2006. **23**. P. 4069.
6. *Bertolami O., Carvalho C.* // Phys. Rev. D. 2006. **74**. P. 084020.
7. *Kostelecky V.A., Samuel S.* // Phys. Rev. D. 1989. **39**. P. 683.
8. *Colladay D., Kostelecky V.A.* // Phys. Rev. D. 1998. **58**. P. 116002.
9. *Jackiw R., Kostelecky V.A.* // Phys. Rev. Lett. 1999. **82**. P. 3572.
10. *Zhukovsky V.Ch., Lobanov A.E., Murchikova E.M.* // Phys. Rev. D. 2006. **73**. P. 065016.

11. *Лобанов А.Е., Мурчикова Е.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 11. (*Lobanov A.E., Murchikova E.M.* // Moscow University Phys. Bull. 2008. **63**, N 2. P. 91.)
12. *Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Razumovsky A.S.* // Phys. Rev. D. 2004. **70**. P. 025003.
13. *Frolov I.E., Zhukovsky V.Ch.* // J. Phys. A. 2007. **40**. P. 10625.
14. *Roberts M., Stadnik Y.V.* // Phys. Rev. D. 2014. **90**. P. 096005.
15. *Bezerra de Mello E.R.* // JHEP. 2004. **0406**. P. 016.
16. *Roberts B.M., Stadnik Y.V., Dzuba V.A.* et al. // arXiv: 1409.2564v2.
17. *Кадышевский В.Г., Родионов В.Н.* // ТМФ. 2003. **136**, № 3. С. 517. (*Kadyshevsky V.G., Rodionov V.N.* // Theor. and Math. Phys. 2003. **136**, N 3. P. 1346.)
18. *Gitman D.M., Saa A.V.* // Class. Quant. Grav. 1993. **10**. P. 1447.
19. *Kharlanov O.G., Zhukovsky V.Ch.* // J. Math. Phys. 2007. **48.9**. P. 092302.
20. *Shapiro I.L.* // Phys. Rept. 2002. **357**. P. 113.
21. *Frolov I.E., Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G.* // Phys. Rev. D. 2010. **82**. P. 076002.
22. *Sitenko Y.A., Rulik K.Y.* // Eur. Phys. J. 2003. **C28**. P. 405.
23. *Бубнов А.Ф., Жуковский В.Ч.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 2. С. 37. (*Bubnov A.F., Zhukovsky V.Ch.* // Moscow University Phys. Bull. 2010. **65**, N 2. P. 105.)
24. *O'Connell R.F.* // Phys. Rev. A. 1968. **176**, N 5. P. 1433.
25. *Fukushima K., Kharzeev D.E., Warringa H.J.* // Phys. Rev. D. 2008. **78**. P. 074033.
26. *Тернов И.М., Багров В.Г., Жуковский В.Ч.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1966. № 1. С. 30.
27. *Родионов В.Н.* // ЖЭТФ. 2004. **125**. № 3. С. 453. (*Rodionov V.N.* // J. of Exp. and Theor. Phys. 2004. **98**. P. 395.)
28. *Фок В.А.* // Sow. Phys. 1937. **12**. P. 404.

Vacuum polarization in the model of Dirac fermions with an anomalous magnetic moment that interact with a background axial-vector condensate and magnetic field

A. F. Bubnov[a], **N. V. Gubina, V. Ch. Zhukovsky**[b]

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *bfandrey@mail.ru,* [b] *zhukovsk@phys.msu.ru.*

Vacuum polarization is considered in a model that takes the anomalous magnetic moment (AMM) of Dirac fermions in a uniform magnetic field in the presence of an additional axial-vector interaction into account. Corrections to the effective Lagrangian of the model that are quadratic with respect to the AMM and axial-vector interaction in different configurations of the given model parameters are calculated.

Keywords: electron in a magnetic field, Lorentz invariance violation, anomalous magnetic moment, effective Lagrangian.
PACS: 11.30.Cp, 12.60.Cn, 11.10.Ef, 13.40.Em.
Received 4 November 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 2. Pp. 168–173.

Сведения об авторах

1. Бубнов Андрей Францевич — аспирант; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: bfandrey@mail.ru.
2. Губина Надежда Валерьевна — ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: gubina_nadya@mail.ru.
3. Жуковский Владимир Чеславович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.