

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Операторное решение дифференциальных уравнений с производными нецелого порядка, уравнений Блэка–Шоулза и теплопроводности

К. В. Жуковский

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru*

Статья поступила 02.01.2016, подписана в печать 10.02.2016.

Представлены операторные решения дифференциальных уравнений в обычных производных нецелого порядка и уравнений типа Блэка–Шоулза и теплопроводности Фурье. Для их решения применяются обратные дифференциальные операторы, интегральные преобразования и обобщенные формы полиномов Эрмита и Лагерра с несколькими переменными и индексами. Приведены примеры решения обыкновенных дифференциальных уравнений и расширенных форм уравнений в частных производных типа Фурье, Шрёдингера, Блэка–Шоулза и др. с помощью операторного метода. Рассмотрены уравнения, содержащие производную Лагерра. Продемонстрировано применение операторной техники для решения ряда физических задач, связанных с движением зарядов в рамках квантовой механики и с распространением тепла.

Ключевые слова: обратный оператор, уравнение Шрёдингера, уравнение Блэка–Шоулза, теплопроводность, полиномы Лагерра и Эрмита.

УДК: 530.1, 53.01, 51-72, 51-73. PACS: 02.30-f; 41.85.Ja, 03.65.Db, 05.60.Cd.

Введение

Исследование и решение дифференциальных уравнений (ДУ) само по себе представляет важную математическую задачу, так как они описывают широкий спектр физических процессов. Применение компьютерных методов сильно упростило получение решений ДУ, а стремительное развитие вычислительной техники и программ аналитических вычислений в последние годы сделало эту задачу во многом автоматизированной. Однако для глубокого понимания происходящих физических явлений и соответствующего их объяснения машинных методов часто оказывается недостаточно; необходимо получить и исследовать аналитические решения. Конечно, это не исключает применение компьютеров как непосредственно для этой цели, так и для последующего численного и графического описания поведения системы. Примеры таких исследований охватывают очень широкий спектр задач: это и явления нелинейной электродинамики [1], двойного лучепреломления в сверхсильных магнитных полях пульсаров [2], особенности движения магнитных частиц и зарядов, спектров и динамики атомов в сильных магнитных и электромагнитных полях [3–7], перенос тепла в сверхтонких пленках, наносистемах и других объектах, не подчиняющийся закону Фурье [8–13]. Недавние исследования ондуляторного излучения с применением обобщенных форм специальных функций типа Бесселя и Эйри [14–20] позволили аналитически описать влияние непериодических компонент магнитного поля, характеристик ондуляторов и пучков электронов на свойства

ондуляторного излучения. При этом примерялись разложения в ряды по ортогональным полиномам Эрмита и Лагерра [21] и их расширенные формы со многими индексами и переменными [22, 23], которые ранее использовались при решении целого ряда других физических проблем (см., например, [24, 25]). Интегральные соотношения для тензорных полиномов исследовались в [26]. В контексте операторного подхода удобно использовать операторные соотношения для определения полиномов [21, 27]. Широкое применение в математическом описании различных физических явлений находит операторная экспонента [28, 29]; ее применение в сочетании с обратными дифференциальными операторами и обратными функциями позволяет получить решения для широкого класса линейных дифференциальных уравнений [30–34]. Другие авторы использовали разложение в ряды для решения различных дифференциально-алгебраических уравнений [35, 36]. Частично аналитический подход к решению дифференциально-алгебраических уравнений применялся также в [37] для описания динамики вязкого несжимаемого потока. Для решения уравнения Фоккера–Планка [38] были применены интегральные преобразования, и результаты представлены в виде сходящихся рядов. Приближенные решения некоторых нелинейных запаздывающих ДУ были получены в [39] применительно к биологическим моделям. Все эти недавние исследования лишней раз показывают, что получение аналитических решений в случаях, когда это возможно, предпочтительно численному счету не только потому, что позволяет их глубоко исследовать и понять их смысл, но и по причине

значительно меньшей рутинной вычислительной работы и часто меньших затрат времени. В настоящей работе развита автором операторная техника решения дифференциальных уравнений применяется к обычным дифференциальным уравнениям нецелого порядка и к обобщениям уравнений Блэка–Шоулза и теплопроводности Фурье.

1. Операторное решение обыкновенных дифференциальных уравнений нецелого порядка

Решения неоднородных дифференциальных уравнений обычно строятся с помощью функции Грина [40]. Альтернативная этому возможность представляется с помощью оператора обратной производной на примере ДУ нецелого порядка, которые широко исследуются в последнее время (см., например, [41–44]):

$$(\beta^2 - (D + \alpha)^2)^\nu F(x) = f(x), \quad D + \alpha \equiv \tilde{D}, \quad (1)$$

где $D = d_x$, ν — произвольный действительный и не обязательно целый параметр, α и β — константы. Используя обратные дифференциальные операторы [30, 31, 33], частный интеграл уравнения (1) с начальным условием $f(x) = x^k$ можно представить в следующем виде:

$$F(x) = (\beta^2 - (D_x + \alpha)^2)^{-\nu} x^k = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-t(\beta^2 - \alpha^2)} t^{\nu-1} H_k(x + 2\alpha t, t) dt, \quad (2)$$

где $H_n(x, y) = (-i)^n y^{n/2} H_n\left(\frac{ix}{2\sqrt{y}}\right)$ — полиномы Эрмита, $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция. Решение уравнения (1) с функцией $f(x) = x^k$ может быть также записано в виде [33]

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \int_0^\infty t^{2(\nu-1)} \exp(-(\beta t)^2) \times \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\left(\frac{\eta-x}{2\tau}\right)^2 + \alpha(\eta-x)\right) f(\eta) d\eta d\tau. \quad (3)$$

Отметим, что в формуле (3) можно развязать между собой два интеграла с помощью полиномов Эрмита двух переменных при условии сходимости интегралов по η :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \tau^{2(\nu-1)} \exp(-\beta^2 \tau^2) \times H_n\left(\alpha, -\frac{1}{4\tau^2}\right) d\tau \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^\infty (\eta-x)^n f(\eta) d\eta. \quad (4)$$

Таким образом, решение уравнения (1) представимо в виде ряда от свертки $\phi(x) = \Phi(x) * f(\eta)$

с ядром $\Phi(x) = x^n$ и с весом, заданным полиномами Эрмита:

$$F(x) = \sum_{n=0}^\infty \phi(x) C(\nu, \alpha, \beta),$$

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^\infty \Phi(x-\eta) f(\eta) d\eta \equiv \Phi(x) * f(\eta),$$

$$\Phi(x-\eta) = (\eta-x)^n, \quad \Phi(x) = (-x)^n, \quad (5)$$

$$C(\nu, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \int_0^\infty \tau^{2(\nu-1)} \exp(-\beta^2 \tau^2) \times \frac{1}{n!} H_n\left(\alpha, -\frac{1}{4\tau^2}\right) d\tau.$$

Более того, из свертки, полученной выше с учетом производящей функции $e^{xt+yt^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} H_n(x, y)$ и (3), заключаем, что решение уравнения (1) дается интегралом с весом от следующей свертки с ядром распределения вероятности типа Гаусса $\Omega(x, \tau)$:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \int_0^\infty \tau^{2(\nu-1)} e^{-\beta^2 \tau^2} \bar{\omega}(x, \tau) d\tau,$$

$$\bar{\omega}(x, \tau) = \int_{-\infty}^\infty \Omega(x-\eta, \tau) f(\eta) d\eta \equiv \Omega(x, \tau) * f(\eta), \quad (6)$$

$$\Omega(x-\eta, \tau) = \exp\left(\alpha(\eta-x) - \frac{(\eta-x)^2}{4\tau^2}\right),$$

$$\Omega(x, \tau) = \exp\left(-\alpha x - \left(\frac{x}{2\tau}\right)^2\right).$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \tau^{2(\nu-1)} e^{-(\beta\tau)^2 - (x-\eta)^2/(4\tau^2)} d\tau = \left(\frac{|x-\nu|}{2\beta}\right)^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(\beta|x-\eta|),$$

где $K_n(x)$ — функция Макдональда, получаем решение

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{|x-\nu|}{2\beta}\right)^{\nu-1/2} \times K_{\nu-1/2}(\beta|x-\eta|) e^{-\alpha(x-\eta)} f(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Таким образом, мы получили решение дифференциального уравнения нецелого порядка (1) операторным методом в виде свертки

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^\infty \chi(x-\eta) f(\eta) d\eta,$$

$$\chi(x-\eta) = \left(\frac{|x-\nu|}{2\beta}\right)^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(\beta|x-\eta|) e^{-\alpha(x-\eta)} \quad (8)$$

с ядром χ ; его можно записать в сокращенном виде

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \chi * f, \tag{9}$$

$$\chi = \left(\frac{|x|}{2\beta}\right)^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(\beta|x|)e^{-\alpha x}.$$

Операторные решения дифференциальных уравнений нецелого порядка с производной Лагерра были получены ранее в [33]. Некоторые примеры задач типа диффузии, теплопроводности, их обобщений, а также интегро-дифференциальных уравнений рассматривались в [30–31].

2. Операторное решение уравнений типа Блэка–Шоулза

Прежде всего, для уравнения $\psi(D_x + \alpha)F(x, t) = f(x, t)$ с начальным условием $F(x, 0) = f(x)$ можно записать $e^{\alpha x}F(x, t) = \psi^{-1}(D_x)e^{\alpha x}f(x, t)$, и при $f(x, t) = \partial_t F(x, t)$ получаем $\psi(D_x)G(x, t) = \partial_t G(x, t)$, где $G(x, t) = e^{\alpha x}F(x, t)$ с начальным условием $g(x) = G(x, 0) = e^{\alpha x}f(x, 0) = e^{\alpha x}f(x)$. Тогда достаточно решить уравнение с $\psi(D_x)$ на $G(x, t)$ с начальным условием $g(x) = e^{\alpha x}f(x)$, чтобы получить искомое решение для $F(x, t)$ с начальным условием $f(x)$.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение типа Блэка–Шоулза, встречающееся в той или иной форме в финансовых моделях:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = \left[x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2\alpha x^2 + \lambda x) \frac{\partial}{\partial x} + ((\alpha x)^2 - \mu) \right] F(x, t),$$

$$f(x) = F(x, 0), \tag{10}$$

где α, ρ, λ и μ — постоянные коэффициенты, $f(x) = F(x, 0)$ — начальное условие. Посредством замены $\partial_x \rightarrow \partial_x + \alpha$ уравнение (10) элементарно преобразуется к виду

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t) + \lambda x \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) - \mu G(x, t),$$

$$g(x) = G(x, 0), \tag{11}$$

и, следовательно, решение уравнения (10) можно записать через решение уравнения (11) для $G(x, t)$: $F(x, t) = e^{-\alpha x}G(x, t)$ с начальным условием $g(x) = G(x, 0) = e^{\alpha x}F(x, 0)$. Решение уравнения (11) легко находится операторным методом [31]:

$$G(x, t) = \frac{\exp(-\rho \varepsilon t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\sigma^2 + \sigma \gamma \frac{\lambda}{2\rho} \right] \times$$

$$\times g(x \exp(\sigma \gamma)) d\sigma, \tag{12}$$

где $\gamma = \gamma(t) = 2\sqrt{\rho t}$, $\varepsilon = \mu + (\lambda/2)^2$. Выберем начальное условие для уравнения типа Блэка–Шоулза (10), например, в виде $f(x) = e^{-\alpha x}x^n$, что соответствует $g(x) = x^n$; тогда из (12) имеем $G(x, t) = x^n \exp\{\rho t(n^2 + \lambda n - \mu)\}$ [31] и искомое решение уравнения (10) принимает следующий вид:

$$F(x, t) = e^{-\alpha x} x^n \exp\{\rho t(n^2 + \lambda n - \mu)\}. \tag{13}$$

Рассмотрим другое обобщение дифференциального уравнения типа Блэка–Шоулза, включающее производную Лагерра ${}_L D_x = \partial_x x \partial_x$,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} A(x, t) = (\partial_x x \partial_x)^2 A(x, t) + \lambda (\partial_x x \partial_x) A(x, t) - \mu A(x, t), \quad g(x) = A(x, 0), \tag{14}$$

где ρ, λ и μ — постоянные коэффициенты и $g(x) = A(x, t=0)$ — начальное условие. Уравнение (14) объединяет в одно уравнение и обобщает уравнения диффузии и теплопроводности Лагерра, рассмотренные ранее в [23] и [31]. Для его решения выделим полный квадрат оператора производной Лагерра ${}_L D_x = \partial_x x \partial_x$ в (14), тогда решение представимо в виде экспоненты: $A(x, t) = \exp\{\rho t (({}_L D_x + \lambda/2)^2 - \varepsilon)\} g(x)$, где $\varepsilon = \mu + (\lambda/2)^2$. Применяя операторное соотношение [45]

$$\exp(\widehat{p}^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2 + 2\xi \widehat{p}) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2 - 2\xi \widehat{p}) d\xi \tag{15}$$

к $\exp(\alpha {}_L D_x)$, получаем искомое решение для $A(x, t)$ в виде следующего интеграла:

$$A(x, t) = \frac{\exp(-\varepsilon \alpha^2 t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\sigma^2 - \sigma \alpha \lambda - 2\sigma \alpha {}_L D_x] \times$$

$$\times g(x) d\sigma, \tag{16}$$

где $\alpha = \alpha(t) = \sqrt{\rho t}$. Для функции начального условия $g(x) = (-x)^n/n!$ воспользуемся операторным определением полиномов Лагерра $L_n(x, y) = e^{-y {}_L D_x} (-x)^n/n!$, чтобы получить решение уравнения (14) с начальным условием $g(x) = (-x)^n/n!$ в следующем виде:

$$A(x, t) = \frac{\exp(-\alpha^2 \mu t)}{\sqrt{\pi}} n! \sum_{r=0}^n \frac{(-x)^r (2\alpha)^{n-r}}{(n-r)!(r!)^2} I, \tag{17}$$

где

$$I = \alpha \lambda \frac{e^{i(n-r)\pi} - 1}{2} \Gamma\left(1 + \frac{n-r}{2}\right) \times$$

$$\times {}_1F_1\left(\frac{1-(n-r)}{2}, \frac{3}{2}, -\left(\frac{\alpha \lambda}{2}\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{e^{i(n-r)\pi} + 1}{2} \Gamma\left(\frac{1+n-r}{2}\right) \times$$

$$\times {}_1F_1\left(-\frac{n-r}{2}, \frac{1}{2}, -\left(\frac{\alpha \lambda}{2}\right)^2\right), \tag{18}$$

где ${}_1F_1$ — гипергеометрическая функция. Если в качестве начального условия выбрать полином по x , то соответствующее решение представимо в виде ряда от (17). Если функцию начального условия можно разложить в ряд по полиномам Лагерра $g(x) = \sum_n a_n L_n(x)$, то с учетом

$e^{\alpha L} L_n(x, y) = L_n(x, y - \alpha)$ решение представимо в виде следующего ряда:

$$A(x, t) = \frac{\exp(-\varepsilon\alpha^2/4)}{\sqrt{\pi}} \sum_n a_n \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2 - \sigma\alpha\lambda) L_n(x, 2\sigma\alpha + 1) d\sigma. \quad (19)$$

В общем случае для получения решения $A(x, t)$ обратимся к оператору обратной производной $D_x^{-1} f(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$ и с учетом ${}_L D_x = \partial/\partial D_x^{-1}$ и $[{}_L D_x, D_x^{-1}] = -1$ имеем

$$A(x, t) = \frac{\exp(-\varepsilon\alpha^2)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2 - \sigma\alpha\lambda) \times \exp\left(-2\sigma\alpha \frac{\partial}{\partial D_x^{-1}}\right) \varphi(D_x^{-1}) \{\mathbf{1}\} d\sigma, \quad (20)$$

где $\varphi(D_x^{-1}) \{\mathbf{1}\} = g(x)$, а функция φ задана интегралом $\varphi(x) = \int_0^{\infty} \exp(-\kappa) g(x\kappa) d\kappa$ при условии, что он сходится. Заметим, что $\exp(-t {}_L D_x) g(x)$ есть решение уравнения диффузии с производной Лагерра [31] $\partial_t f(x, t) = -{}_L D_x f(x, t)$ и с начальным условием $f(x, 0) = g(x)$, так что результат действия экспоненциального оператора в (20) приводит к решению $f(x, t) = \exp(-t \partial/\partial D_x^{-1}) g(x) = \varphi(D_x^{-1} - t) \{\mathbf{1}\}$. Тогда искомое решение уравнения в производных четвертой степени (14) запишется следующим образом:

$$A(x, t) = \frac{\exp(-\varepsilon\alpha^2)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2 - \sigma\alpha\lambda) g(x, t) d\sigma, \quad (21)$$

где

$$g(x, t) = \varphi(D_x^{-1} - 2\sigma\alpha) \{\mathbf{1}\} = \exp\left(-2\sigma\alpha \frac{\partial}{\partial D_x^{-1}}\right) \varphi(D_x^{-1}) \{\mathbf{1}\}. \quad (22)$$

Рассмотрим пример начального условия в виде $g(x) = W_0(-x^2, 2)$, где функция $W_n(x, m) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!(mr+n)!}$, $m \in N$, $n \in N_0$, является частным случаем функции Бесселя–Райта [46]. Соответствующей функцией φ при этом оказывается $\varphi(x) = e^{-x^2}$, и, применяя операторное соотношение (15), получим в соответствии с (22) [31]

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2 + 4i\sigma\alpha\xi) C_0(2i\xi x) d\xi, \quad (23)$$

где $C_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r!(r+n)!}$, $n \in N_0$, — функция Бесселя–Трикоми [47], связанная с функцией Бесселя–Райта $C_n(x) = W_n(-x, 1)$ и с обычными широко известными цилиндрическими функциями Бесселя $C_n(x) = x^{-n/2} J_n(2\sqrt{x})$. Таким образом, решение (14) с начальным условием $g(x) = W_0(-x^2, 2)$ определяется формулами (21), (23).

3. Операторное решение уравнений типа Шрёдингера и теплопроводности Фурье

Уравнение Шрёдингера для заряда в электростатическом поле

$$i \partial_t \Psi(x, \tau) = -\partial_x^2 \Psi(x, \tau) + b x \Psi(x, \tau) \quad (24)$$

было решено операторным методом в [30]. В случае прохождения под потенциальным барьером динамика частицы описывается обобщенным уравнением теплопроводности

$$\partial_t F(x, t) = \alpha \partial_x^2 F(x, t) + \beta x F(x, t) \quad (25)$$

с начальным условием $F(x, 0) = f(x)$ и представляет, по сути, переход к мнимому времени в уравнении Шрёдингера. Детали этого формализма и соответствующего ему евклидова подхода в квантовой механике приведены, например, в [48]. Это важно также при исследовании вакуумных эффектов квантовой хромодинамики и описывает туннелирование частицы в области, где ее энергия ниже, чем потенциальная энергия барьера. С точки зрения распространения тепла линейное слагаемое в (25) не имеет решающего значения и описывает излучение в окружающую среду с небольшой разницей температур. Линейную зависимость от координаты можно интерпретировать как модель излучения в атмосферу через теплоизолирующую прокладку с линейно меняющейся по координате толщиной. Эволюция пакетов Гаусса и Эйри, подчиняющихся уравнениям (25) и (24), была подробно изучена в работах [32] и [30]. Решения сводятся к действию оператора эволюции на функцию начального условия $F(x, 0) = f(x)$ и представляются в виде последовательного преобразования функции начального условия операторами трансляции $\hat{\Theta}$ и теплопроводности \hat{S} [46, 33]:

$$\hat{\Theta} f(x) = \exp(\eta(\partial_x + \alpha)) f(x) = \exp(\eta\alpha) f(x + \eta), \quad (26)$$

$$\hat{S} = \exp(t \partial_x^2). \quad (27)$$

Действие последнего представимо с помощью преобразования Гаусса–Вейерштрасса:

$$\hat{S} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right\} f(\xi) d\xi. \quad (28)$$

Отметим в этой связи, что для $f(x) = \exp(-x^2)$ получаем

$$\hat{S} \exp(-x^2) \equiv \exp(t \partial_x^2) \exp(-x^2) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right), \quad (29)$$

а для δ -функции Дирака имеем

$$\hat{S} \delta(x) \equiv \exp(t \partial_x^2) \delta(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \quad (30)$$

Решение уравнения (25) таково:

$$F(x, t) = e^{\Phi(x, t, \alpha, \beta)} \hat{\Theta} \hat{S} f(x) = e^{\Phi(x, t, \alpha, \beta)} f(x + \alpha\beta t^2, t), \quad (31)$$

$$f(x + \alpha\beta t^2, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\alpha\beta t^2-\xi)^2/(4t\alpha)} f(\xi) d\xi,$$

где $\Phi(x, t; \alpha, \beta) = \frac{1}{3}\alpha\beta^2 t^3 + \beta t x$, $\widehat{\Theta} = e^{\alpha\beta t^2 \partial_x}$, $\widehat{S} = e^{\alpha t \partial_x^2}$. Выберем для уравнения (25) начальное условие $f(x) = x^k e^{\delta x}$. При $\delta < 0$ оно описывает импульс со степенным ростом и экспоненциальным убыванием. С другой стороны, если начальная функция представляет некую аппроксимацию экспериментальных данных, то ее часто представляют в виде полинома, а дополнительная экспонента дает возможности более точной аппроксимации. Легко показать, что $\exp(y\partial_x^2)x^k e^{\alpha x} = e^{(\alpha x + \alpha^2 y)} H_k(x + 2\alpha y, y)$, где $H_n(x, y) = (-i)^n y^{n/2} H_n\left(\frac{ix}{2\sqrt{y}}\right)$ — полиномы Эрмита, и с учетом сдвига (26) получаем

$$F(x, t) = e^{\Phi + \Delta_1} H_k(x + (\alpha\delta^2/\beta)(2t\beta/\delta + t^2(\beta/\delta)^2), \alpha t), \quad (32)$$

где $\Delta_1 = \delta(x + \delta\alpha t + \alpha\beta t^2)$. Для $\delta = 0$, т.е. для $f(x) = x^n$, имеем соответственно

$$F(x, t) = e^{\Phi} H_n(x + \alpha\beta t^2, \alpha t). \quad (33)$$

Очевидно, что если $f(x) = \sum_n c_n x^n$, то $F(x, t) = e^{\Phi} \sum_n c_n H_n(x + \alpha\beta t^2, \alpha t)$. На больших временах $t \gg \delta/\beta$ имеем $\Delta_1 \ll \Phi$ и, если на таких больших временах выполнено также условие $x \ll \delta^2\alpha/\beta$, то зависимость от времени в основном содержится в полиномах Эрмита $H_k(2\delta\alpha t + \alpha\beta t^2, \alpha t)$, а зависимость от координаты дается множителем $\exp(\beta t x)$. Полагая в контексте теплопроводности $\beta = 0$, имеем $F(x, t)|_{\text{long times}} \cong H_k(2t\alpha\delta, \alpha t) \exp\{\delta^2\alpha t\}$. Для малых времен $t \ll \delta/\beta$ имеем $\Phi + \Delta_1 \cong x\delta + \alpha\delta^2 t$, а полиномы Эрмита зависят от координат и времени: $H_k(x, \alpha t)$. Таким образом, $F(x, t)|_{t \ll \delta/\beta} = e^{x\delta + \alpha\delta^2 t} H_k(x, \alpha t)$ и при $t \ll 1/\alpha\delta^2$ получаем $F(x, t)|_{\text{short times}} \cong e^{x\delta} (1 + t\alpha\delta^2) H_k(x, \alpha t)$. На бесконечно малом промежутке времени $\alpha t \rightarrow 0$ имеем $H_k(x, 0) = x^k$, что полностью согласуется с начальным условием $f(x) = x^k e^{\delta x}$.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\partial_t F(x, t) = \partial_x^2 F(x, t) + 2\delta\partial_x F(x, t) + \beta x F(x, t) + \gamma F(x, t), \quad F(x, 0) = f(x), \quad (34)$$

которое можно считать обобщением уравнения (25), где произведена замена $\partial_x \rightarrow \partial_x + \delta$, и без ущерба общности считаем $\alpha = 1$. Выделив квадрат оператора $\partial_x + \delta$ и следуя общей логике решения таких уравнений (см. начало главы), напишем решение уравнения (34) в виде функции

$$F(x, t) = \exp(t(\gamma - \delta^2) - \delta x) G(x, t), \quad (35)$$

где функция $G(x, t)$ удовлетворяет уравнению (25) на G с начальным условием $G(x, 0) = g(x) = \exp(\delta x) f(x)$. Выберем начальное условие для (34), например, в виде $f(x) = x^k$. Тогда $g(x) = x^k e^{\delta x}$ и решением уравнения $\partial_t G = (\partial_x^2 + \beta x)G$ является (32) с заменой $F \rightarrow G$. Окончательно имеем искомое

решение уравнения (34), записанное через полиномы Эрмита в следующем виде:

$$F(x, t) = e^{\Phi + \Delta_2} H_k(x + 2t\delta + t^2\beta, t), \quad (36)$$

где $\Delta_2 = t\gamma + t^2\delta\beta$ и постоянные слагаемые описывают в случае переноса тепла излучение в атмосферу. Обобщением рассмотренных выше уравнений типа Шрёдингера в мнимом времени или типа теплопроводности, объединяющим в себе уравнения диффузии и теплопроводности с производной Лагерра, является уравнение типа Блэка–Шоулза с производной Лагерра, которое уже было рассмотрено нами выше.

Следующее уравнение типа теплопроводности с линейными слагаемыми

$$\begin{aligned} \partial_t F(x, y, t) &= \\ &= \{(\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x\partial_y + \gamma\partial_x^2) + bx + cy\} F(x, y, t), \\ &\quad \min(\alpha, \beta, \gamma) > 0, \end{aligned} \quad (37)$$

и с начальным условием $F(x, y, 0) = f(x, y)$ может также рассматриваться как обобщение на двумерное координатное пространство квантово-механической задачи о заряженной частице в электрическом поле под потенциальным барьером. Она решается с помощью формулы Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа (Baker–Campbell–Hausdorff)

$$\exp(\widehat{A} + \widehat{B}) = \exp(-[\widehat{A}, \widehat{B}]/2) \exp(\widehat{A}) \exp(\widehat{B}).$$

Применив последнее к операторам

$$\widehat{A} = \exp(\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x\partial_y + \gamma\partial_x^2) \quad \text{и} \quad \widehat{B} = bx + cy,$$

выделенным в уравнении (37), и используя тождества $e^{\beta\partial_x\partial_y} e^{bx+cy} = e^{\beta b\partial_y + \beta c\partial_x} e^{bx+cy} e^{\beta\partial_x\partial_y}$, $e^{\alpha\partial_x^2} e^{\beta x} = e^{\beta^2\alpha} e^{\beta x} e^{2\beta\alpha\partial_x} e^{\alpha\partial_x^2}$, $e^{\gamma\partial_x} e^{\alpha x} = e^{\alpha x + \alpha\gamma} e^{\gamma\partial_x}$, после преобразований операторов в экспоненте получаем следующее двумерное обобщение решения (31):

$$F(x, y, t) = e^{\Psi} \widehat{\Theta}_x \widehat{\Theta}_y \widehat{E} f(x, y), \quad (38)$$

где $\Psi = (\alpha b^2 + \gamma c^2 + \beta bc) t^3/3 + t(bx + cy)$ — фаза, $\widehat{\Theta}_x = e^{t^2(\alpha b + \beta c/2)\partial_x}$ и $\widehat{\Theta}_y = e^{t^2(\gamma c + \beta b/2)\partial_y}$ — операторы диффузии по двум координатам,

$$\widehat{E} = \exp[t(\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x\partial_y + \gamma\partial_y^2)] \quad (39)$$

— оператор теплопроводности в двумерном случае. Эти операторы последовательно преобразуют функцию начального условия $f(x, y)$ точно так же, как и в одномерном случае $F(x, t) \propto \widehat{\Theta}\widehat{S}f(x)$. Результат действия оператора теплопроводности \widehat{E} на начальное условие есть $\widehat{E}f(x, y) = f(x, y, t)$, а операторы диффузии $\widehat{\Theta}_x \widehat{\Theta}_y$ сдвигают аргумент функции f :

$$\widehat{\Theta}_x \widehat{\Theta}_y f(x, y, t) = f(x + t^2(\alpha b + \beta c/2), y + t^2(\gamma c + \beta b/2), t).$$

Таким образом, аналогично одномерному случаю получаем решение двумерного уравнения типа теплопроводности с линейным членом в виде

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= e^{\Phi} \widehat{\Theta}_x \widehat{\Theta}_y \widehat{E} f(x, y) \propto \\ &\propto f(x + t^2(\alpha b + \beta c/2), y + t^2(\gamma c + \beta b/2), t). \end{aligned} \quad (40)$$

Интегральное представление для оператора \hat{E} было получено в [34] и представляет собой двукратный интеграл типа Гаусса, который мы не приводим здесь ввиду его громоздкости. Легко показать, что в случае $\beta = 0$ в уравнении (37) роль оператора теплопроводности \hat{E} будет выполнять произведение операторов теплопроводности (27) $\hat{S}_x \hat{S}_y$ по каждой из координат, и решение будет иметь следующий вид:

$$F(x, y, t) = e^\Psi \hat{\Theta}_x \hat{\Theta}_y \hat{S}_x \hat{S}_y f(x, y) \propto f(x+t^2\alpha b, y+t^2\gamma c, t). \quad (41)$$

4. Распространение δ -импульса в рамках теплопроводности Фурье

В контексте экспериментального исследования теплопроводности реальных объектов важно изучить распространение δ -образного начального импульса, который моделирует установившуюся практику экспериментальных измерений теплопроводности веществ при помощи сверхкороткого точечного импульса тепла от лазера [49]. Эта техника на современном ее этапе позволяет проводить точные эксперименты и чувствительные измерения теплопроводности. Проведем математическое моделирование распространения точечного мгновенного импульса тепла и рассмотрим начальную функцию $f(x) = \delta(x)$. Действие оператора \hat{S} на δ -функцию выполнено в (30). Оператор $\hat{\Theta}_x$ дает дополнительный пространственный сдвиг при $\beta \neq 0$. В результате получаем следующее решение уравнения теплопроводности Фурье (41) с начальной функцией $f(x) = \delta(x)$, моделирующей лазерный импульс:

$$F(x, t)|_{f=\delta(x,y)} = \frac{e^\Phi e^{-(x+abt^2)^2/(4t\alpha)}}{2\sqrt{\pi t\alpha}}, \quad (42)$$

где Φ была определена выше. Полученное решение (42) имеет затухающую амплитуду на малых временах t и демонстрирует расплывание начальной функции, очевидное, например, из рис. 1 для $t \in [10^{-4}, 10^{-2}]$. На больших временах $t > 1$ происходит экспоненциальный рост решения за счет $\beta \neq 0$ и $\Phi \neq 0$, что показано на рис. 2 для $t \in [0.01, 2]$. Рисунки предполагают $\alpha = -\beta = 1$.

Из рис. 2 очевидна релаксация импульса при $t \in [0.15, 1.5]$; едва заметная при этом асимметрия решения из-за линейного координатного члена $\beta \neq 0$ приводит со временем к неограниченному росту решения.

Решение (42) можно легко обобщить на двух- и трехмерный случаи; соответствующие формулы не приводятся для краткости. Отметим, что операторное определение (39) позволяет непосредственно вычислить результат, например, для степенной функции начального условия $f(x, y) = x^m y^n$. В соответствии с операторным определением полиномов Эрмита двух переменных с двумя индексами $H_{m,n}(x, t\alpha, y, t\gamma|\beta)$ [27, 31, 34] имеем

$$\hat{E} \{x^m y^n\} = H_{m,n}(x, t\alpha, y, t\gamma|t\beta), \quad (43)$$

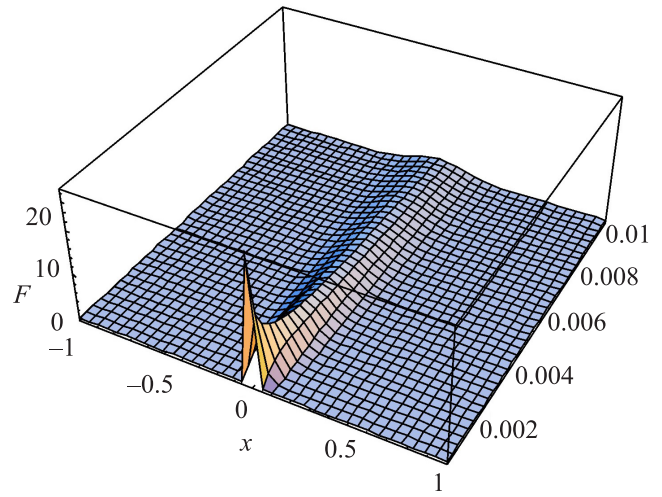


Рис. 1. Эволюция начальной функции $\delta(x)$ в уравнении теплопроводности Фурье, $t \in [10^{-4}, 10^{-2}]$

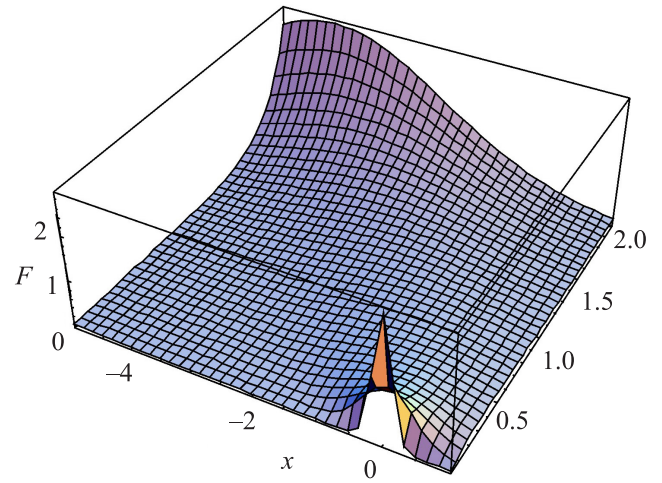


Рис. 2. Эволюция начальной функции $\delta(x)$ в уравнении теплопроводности Фурье, $t \in [0.01, 2]$

где $H_{m,n}(x, t\alpha, y, t\gamma|\beta)$ — полиномы Эрмита с производящей функцией

$$\sum_{m,n} \frac{u^m v^n}{m!n!} H_{m,n}(x, \alpha, y, \gamma|\beta) = \exp(xu + \alpha u^2 + yv + \gamma v^2 + \beta uv) \quad (44)$$

и со следующим представлением в виде сумм [27], которые связывают их с полиномами Эрмита двух переменных $H_m(x, y)$:

$$H_{m,n}(x, \alpha; y, \gamma|\beta) = m!n! \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{\beta^s}{s!(m-s)!(n-s)!} H_{m-s}(x, \alpha) H_{n-s}(y, \gamma). \quad (45)$$

Под действием операторов $\hat{\Theta}_x \hat{\Theta}_y$ на $H_{m,n}(x, t\alpha, y, t\gamma|\beta)$ получаем следующее решение двумерного уравнения теплопроводности (37) с начальным условием $f(x, y) = x^m y^n$:

$$F(x, t)|_{f=x^m y^n} = e^\Psi H_{m,n}(x + t^2(\alpha b + \beta c/2), t\alpha; y + t^2(\gamma c + \beta b/2), t\gamma|t\beta). \quad (46)$$

Очевидно, что решение (46) двумерного уравнения теплопроводности (37) является непосредственным обобщением решения (33) для одномерного аналога (25) уравнения (37). Дальнейшее обобщение на трехмерный случай проводится аналогично.

Уравнение теплопроводности Фурье, несмотря на его широкую применимость, не описывает переноса тепла при сверхнизких температурах, а в системах с пониженной размерностью и в материалах с существенной внутренней неоднородностью даже в стандартных условиях. Исследование процессов переноса тепла в таких случаях нетривиально и требует специального рассмотрения. Мы обратимся к этому в последующих публикациях. Развита выше операторная техника применима к решению и других дифференциальных уравнений, описывающих широкий спектр различных физических процессов. Они будут рассмотрены в других работах.

Выводы

С помощью операторного метода получены решения для различных классов дифференциальных уравнений. При этом использовались обратные дифференциальные операторы и экспоненциальные операторы, широко применялись операторные тождества и интегральные преобразования. В частности, получено операторное решение обычного дифференциального уравнения с производной действительного нецелого порядка в виде свертки, включающей функцию Макдональда (Бесселя второго рода от мнимого аргумента). Получено операторное решение расширенного уравнения типа Блэка–Шоулза с дополнительными слагаемыми. Решено уравнение типа Блэка–Шоулза с производной Лагерра, т. е. уравнение с производными четвертого порядка по координате. Построено решение уравнения Шрёдингера для заряда в электрическом поле при прохождении под двумерным потенциальным барьером. Построено решение расширенного уравнения теплопроводности Фурье в двумерном случае и продемонстрировано распространение δ -образного импульса, моделирующего устоявшуюся технику экспериментального измерения теплопроводности с помощью сверхкороткого начального лазерного импульса. При получении решений нами использовались обобщенные формы полиномов Лагерра и Эрмита, что позволило написать решения в виде разложения в ряды по полиномам указанных выше типов. Использование при этом операторных определений и представлений позволило легко применить их для решения математических задач и проблем, возникающих при моделировании физических процессов распространения тепла и заряженных частиц в рамках классической и квантовой механики.

Итак, мы показали, что инвертирование дифференциальных операторов и применение обратной производной открывает путь к непосредственному получению аналитических решений и позволяет про-

двинуться в решении сложных математических проблем и связанных с ними физических процессов. Проведенное исследование показало, что операторный подход в сочетании с интегральными преобразованиями, использованием расширенных форм ортогональных полиномов и специальных функций и операторных соотношений представляет собой мощный инструмент исследования широкого спектра физических проблем.

Список литературы

1. Денисов В.И., Соколов В.А. // ЖЭТФ. 2011. **140**, № 6. С. 1064. (*Denisov V.I., Sokolov V.A. // J. Exp. Theor. Phys. 2011. 113, N 6. P. 926.*)
2. Denisov V.I., Sokolov V.A., Vasiliev M.I. // Phys. Rev. D. 2014. **90**, N 2. 023011.
3. Денисов В.И., Козарь А.В., Шарихин В.Ф. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 3. С. 8. (*Denisov V.I., Kozar' A.V., Sharikhin V.F. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2010. 65, N 3. P. 164.*)
4. Владимиров Ю.В., Задков В.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 6. С. 63. (*Vladimirova Yu.V., Zadkov V.N. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2010. 65, N 6. P. 493.*)
5. Borisov A.V., Zhukovskii K.V. // Physics of Atomic Nuclei. 1995. **58**. P. 1218.
6. Bulin A.-L., Vasil'ev A., Belsky A. et al. // Nanoscale. 2015. **7**, N 13. P. 5744.
7. Pastukhov V.M., Vladimirova Yu.V., Zadkov V.N. // Phys. Rev. A. 2014. **90**, N 6. 063831.
8. Spassky D., Omelkov S., Magi H. et al. // Opt. Materials. 2014. **36**. P. 1660.
9. Lebon G., Machrafi H., Gremela Ch.M., Dubois Ch. // Proc. R. Soc. A. 2011. **467**. P. 3241.
10. Zhukovsky K.V. // Int. J. Heat Mass Transfer. 2016. **98**, P. 523.
11. Zhukovsky K.V. // Int. J. Heat Mass Transfer. 2016. **96**. P. 132.
12. Baringhaus J., Ruan M., Edler F. // Nature. 2014. **506**. P. 349.
13. Gang Chen // Phys. Rev. Lett. 2001. **86**, N 11. P. 2297.
14. Dattoli G., Mikhailin V., Ottaviani P.-L., Zhukovsky K. // J. Appl. Phys. 2006. **100**. 084507.
15. Dattoli G., Mikhailin V.V., Zhukovsky K.V. // J. Appl. Phys. 2008. **104**. P. 124507.
16. Дамтоли Д., Михайлин В.В., Жуковский К.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 5. С. 33. (*Dattoli G., Mikhailin V.V., Zhukovsky K.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2009. 64, N 5. P. 507.*)
17. Zhukovsky K.V. // Opt. Comm. 2015. **353**. P. 35.
18. Zhukovsky K.V. // J. Electromagn. Wave. 2014. **28**, N 15. P. 1869.
19. Zhukovsky K.V. // J. Electromagnet. Wave. 2015. **29**, N 1. P. 132.
20. Zhukovsky K.V. // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B. 2016. **369**. P. 9.
21. Appèl A., Kampé de Fériet J. Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques; Polynômes d'Hermite. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
22. Dattoli G. // J. Comput. Appl. Math. 2000. **118**, N 1–2, P. 111.
23. Dattoli G., Srivastava H.M., Zhukovsky K. // J. Comput. Appl. Math. 2005. **182**, N 1. P. 165.

24. Haimo D.T., Markett C. // J. Math. Anal. Appl. 1992. **168**, N 1. P. 89.
25. Haimo D.T., Markett C. // J. Math. Anal. Appl. 1992. **168**, N 2. P. 289.
26. Вишневцева П.А., Денисов В.И., Денисова И.П. // Теор. мат. физ. 2011. **166**, № 2. С. 216. (Vshiotseva P.A., Denisov V.I., Denisova I.P. // Theor. Math. Phys. 2011. **166**, N 2. P. 186.)
27. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Higher Transcendental Functions. Vol. II. N. Y.; Toronto; London, 1953.
28. Dattoli G., Zhukovsky K. // Eur. Phys. J. C. 2007. **50**. P. 817.
29. Dattoli G., Zhukovsky K.V. // Eur. Phys. J. C. 2008. **55**, N 4 P. 547.
30. Zhukovsky K. // Scientific World J. 2014. **2014**. 454865.
31. Dattoli G., Srivastava H. M., Zhukovsky K.V. // Appl. Math. Comput. 2007. **184**. P. 979.
32. Zhukovsky K.V., Dattoli G. // Appl. Math. Comput. 2011. **217**. P. 7966.
33. Жуковский К. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2015. № 2. P. 19. (Zhukovsky K.V. // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2015. **70**, N 2. P. 93.)
34. Dattoli G., Srivastava H. M., Zhukovsky K.V. // Integral Transform. Spec. Funct. 2006. **17**, N 1. P. 31.
35. Zhukovsky K.V. // Springer Plus. 2016. **5**. 119.
36. Benhammouda B., Vazquez-Leal H. // Springer Plus. 2014. **3**. 137.
37. Soltanian F., Dehghan M., Karbassi S.M. // Int. J. Num. Methods Heat Fluid Flow. 2013. **23**, N 5. P. 818.
38. Hesam S., Nazemi A.R., Haghbin A. // Scientia Iranica. 2012. **19**, N 4. P. 1140.
39. Caruntu B., Bota C. // Scientific World J. 2014. **2014**. 631416.
40. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.
41. Chen H., Wang H. // J Comput. Appl. Math., 2016. **296**. P. 480.
42. Li X.Y., Wu B.Y. // Appl. Math. Lett., 2016. **53**. P. 92.
43. Oeser M., Freitag S. // Int. J. Pavement Engineering. 2016. **17**, N 2. P. 87.
44. Tarasov V.E. // J. Math. Phys., 2014. **55**, N 8. Art. N 1.4892155.
45. Wolf K.B. Integral Transforms in Science and Engineering. N. Y., 1979.
46. Srivastava H.M., Manocha H.L. A Treatise on Generating Functions. N. Y.; Chichester; Brisbane; Toronto, 1984.
47. Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge; L.; N. Y., 1944.
48. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. М., 1986.
49. Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P., Abbott G.L. // J. Appl. Phys. 1961. **32**, N 9. P. 1679.

The operational solution of fractional-order differential equations, as well as Black–Scholes and heat-conduction equations

K. V. Zhukovsky

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.

Operational solutions to fractional-order ordinary differential equations and to partial differential equations of the Black–Scholes and of Fourier heat conduction type are presented. Inverse differential operators, integral transforms, and generalized forms of Hermite and Laguerre polynomials with several variables and indices are used for their solution. Examples of the solution of ordinary differential equations and extended forms of the Fourier, Schrödinger, Black–Scholes, etc. type partial differential equations using the operational method are given. Equations that contain the Laguerre derivative are considered. The application of the operational method for the solution of a number of physical problems connected with charge dynamics in the framework of quantum mechanics and heat propagation is demonstrated.

Keywords: inverse operator, Schrödinger equation, Black–Scholes equation, heat conduction, Laguerre and Hermite polynomials.

PACS: 02.30–f; 41.85.Ja, 03.65.Db, 05.60.Cd.

Received 2 January 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 3. Pp. 237–244.

Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович – доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник;
тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.