

Фазовые структуры в нелинейном кольцевом резонаторе

В. Ю. Иванов, И. Б. Иванова (Полякова)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: vi.ivanov@physics.msu.ru

Статья поступила 17.10.2015, подписана в печать 26.02.2016.

Рассмотрены процессы формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении световой волны в пассивном нелинейном кольцевом резонаторе. Проведены аналитические и численные расчеты. При использовании методов численного моделирования показана возможность формирования фазовых структур типа ролла и гексагона, являющихся результатом соревновательной динамики нелинейных мод в резонаторе, а также более сложных фазовых структур, формирующихся в результате кооперативной динамики нелинейных мод.

Ключевые слова: нелинейный кольцевой резонатор, пространственная мода, фазовая структура, ролл, гексагон.

УДК: 535.015. PACS: 42.60.Da.

Введение

Периодические или почти периодические структуры возникают в природе повсеместно. Изучение таких процессов проводится в настоящее время весьма интенсивно в различных областях физики. Цель исследований — обеспечить средства понимания и объяснения возникновения таких периодических структур.

В настоящей работе рассматриваются процессы формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении когерентного светового пучка в нелинейной оптической системе с пространственно распределенной обратной связью — нелинейном кольцевом резонаторе. Процессы, происходящие в поперечном сечении световой волны при распространении в нелинейной среде, — предмет исследования одного из направлений нелинейной оптики, так называемой поперечной нелинейной оптики [1]. Настоящий бум исследований на эту тему пришелся на конец XX века. Одновременный учет дифракции и нелинейности приводит к возникновению огромного многообразия пространственных структур в поперечном сечении когерентной световой волны в оптических системах с обратной связью [2, 3]. Нелинейная волновая динамика пространственно распределенных оптических систем представлена различными явлениями: пространственная бистабильность и мультистабильность, формирование регулярных пространственных дифракционных структур, образование оптических вихрей, солитонов, диссипативных структур и т. д. [4–6]. Одной из таких систем, представляющих интерес для исследователей, является кольцевой резонатор, содержащий слой нелинейной среды с кубической нелинейностью [7].

В настоящее время большинство работ, связанных с исследованиями кольцевых резонаторов, направлено на их практическое использование, например, в нелинейных метаматериалах (SRR, split ring resonator) [8, 9] или в оптических вычисле-

ниях [10]. Большое количество исследовательских работ направлено на создание новых наноструктур (nonlinear microring resonators) [11, 12] или нелинейных сенсоров [13] на базе кольцевых резонаторов. Есть работы, касающиеся хаотических режимов, возникающих в кольцевых резонаторах [14], а также режимов, связанных с внешним гармоническим воздействием [15].

Мы рассмотрели пространственные эффекты в однонаправленном кольцевом резонаторе, используя собственную модель эволюции внутрирезонаторного поля, учитывающую дифракцию при свободном распространении поля в резонаторе. Настоящая работа является продолжением наших исследований, связанных с возникновением пространственных структур в кольцевых резонаторах [16, 17].

Предложенная теоретическая модель основана на изучении двух связанных друг с другом уравнений: уравнения, описывающего временную динамику фазовой модуляции световой волны в нелинейной среде, и уравнения, описывающего временную динамику комплексной амплитуды светового поля внутри резонатора с учетом дифракции [17]. Для проверки теоретической модели выполнено численное моделирование исследуемой системы. Обнаружено формирование так называемых «собственных» пространственных структур резонатора — ролла, гексагона, ромба, додекагона, а также более сложных фазовых структур, образующихся в результате кооперативной динамики нелинейных пространственных мод.

Математическая модель

Оптическая схема исследуемой системы показана на рис. 1. Резонатор состоит из четырех плоских зеркал. На вход резонатора поступает плоская когерентная световая волна. Жидкокристаллический фазовый модулятор (liquid crystal light valve — LCLV) используется в качестве тонкого слоя нелинейной среды керровского типа толщиной l .

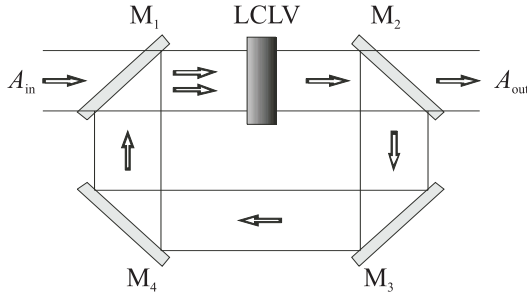


Рис. 1. Схема пассивного нелинейного кольцевого резонатора: M_1 – M_4 — зеркала, LCLV — нелинейная среда, A_{in} и A_{out} — комплексные амплитуды входного и выходного полей соответственно. Зеркала M_3 и M_4 обладают 100%-м отражением, а зеркала M_1 и M_2 имеют коэффициент отражения R по интенсивности

Предложенная математическая модель учитывает локальные поперечные взаимодействия световой волны с нелинейной средой, вызванные как диффузией частиц нелинейной среды, так и дифракцией световой волны при распространении в резонаторе. Именно благодаря одновременному действию этих двух физических процессов в системе возникают пространственно-временные фазовые структуры.

Динамика нелинейной фазовой модуляции $u(\mathbf{r}, t)$, которая характеризует набег фазы световой волны в нелинейной среде, описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных, которое предполагает, что поляризованность среды подчиняется релаксационному уравнению дебаевского типа, учитывающему конечность времени релаксации нелинейности и наличие в среде поперечных взаимодействий диффузионного характера [16]:

$$\tau_0 \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + u(\mathbf{r}, t) = D \nabla_{\perp}^2 u(\mathbf{r}, t) + K |A(\mathbf{r}, z=0, t)|^2. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор в поперечном сечении светового поля; z — продольная координата; t — время; τ_0 — характерное время релаксации нелинейности; ∇_{\perp}^2 — поперечный лапласиан, описывающий диффузионный процесс в нелинейной среде; D — нормированный коэффициент диффузии; K — коэффициент нелинейности среды, $|A(\mathbf{r}, z=0, t)|^2$ — интенсивность светового поля, попадающего в нелинейную среду; $A(\mathbf{r}, z, t)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда светового поля внутри резонатора.

Комплексная амплитуда внутрирезонаторного поля перед слоем нелинейной среды $A(\mathbf{r}, z=0, t)$ складывается из двух частей: комплексной амплитуды входного поля после прохождения зеркала M_1 и комплексной амплитуды поля после распространения в резонаторе.

Динамика комплексной амплитуды поля $A(\mathbf{r}, z, t)$ непосредственно перед слоем нелинейной среды описывается следующим образом:

$$A(\mathbf{r}, z=0, t+t_r) = \sqrt{1-R} A_{in}(\mathbf{r}) +$$

$$+ R e^{i\phi_0} \exp(iL \nabla_{\perp}^2) \{A(\mathbf{r}, z=0, t) \exp[iu(\mathbf{r}, t)]\}. \quad (2)$$

Здесь R — коэффициент отражения зеркал по интенсивности; t_r — время распространения поля в резонаторе; $A_{in}(\mathbf{r})$ — комплексная амплитуда входной световой волны; ϕ_0 — постоянный фазовый сдвиг световой волны в резонаторе (сумма пространственно-однородного фазового набег световой волны в нелинейной среде, который определяется невозмущенным значением показателя преломления среды, и постоянного набег фазы после распространения поля в резонаторе); L — длина резонатора, нормированная на дифракционную длину, которая определяется диаметром апертуры резонатора или входного пучка. В предлагаемой модели дифракционные эффекты в первую очередь зависят от пространственного масштаба фазовых неоднородностей в нелинейной среде, поэтому дифракцией поля на апертуре можно пренебречь (приближение широкой апертуры).

Процесс дифракционного распространения поля в резонаторе представлен в уравнении (2) оператором распространения $\exp(iL \nabla_{\perp}^2)$ и описывается обычным уравнением дифракции в приближении квазиоптики с граничным условием, которое определяется полем непосредственно после слоя нелинейной среды:

$$-2ik_0 \frac{\partial A(\mathbf{r}, z, t)}{\partial z} = \nabla_{\perp}^2 A(\mathbf{r}, z, t), \quad (3)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Сделаем несколько упрощающих модель предположений. Во-первых, если толщина слоя нелинейной среды много меньше длины резонатора, т. е. $l \ll L$, то можно пренебречь поглощением света в нелинейной среде. Это значит, что нелинейная среда оказывает влияние только на фазу распространяющейся световой волны. Во-вторых, можно считать, что время распространения световой волны в резонаторе много меньше, чем время релаксации нелинейности, т. е. $t_r = L/c \ll \tau_0$. Это значит, что анализируется случай «медленной» нелинейности без учета эффектов, связанных с временным запаздыванием поля в резонаторе.

Уравнение (2) в этом случае является упрощенным вариантом известного уравнения Икеды [18], записанного при отсутствии запаздывания в контуре обратной связи и с учетом поперечных эффектов, вызванных дифракцией.

Линейный анализ устойчивости

Система уравнений (1)–(3) имеет пространственно-однородное стационарное решение. Обозначим u_s и A_s стационарные значения фазы $u(\mathbf{r}, t)$ и амплитуды $A(\mathbf{r}, z, t)$ поля в нелинейной среде соответственно. Стационарное решение u_s удовлетворяет следующему уравнению:

$$u_s = \frac{(1-R)KI_0}{1+R^2-2R \cos(u_s + \phi_0)}. \quad (4)$$

Здесь $u_s = K|A_s|^2$, $I_0 = |A_{in}|^2$ — интенсивность входного поля. Уравнение (4) устанавливает соотношение между интенсивностью входного поля и пространственно-однородным значением фазы выходного поля. Для удобства введем новый параметр $k \equiv KI_0$, который в дальнейшем будем называть коэффициентом нелинейности. Таким образом, коэффициент нелинейности будет включать в себя интенсивность входной световой волны.

В зависимости от значения коэффициента нелинейности k существует несколько различных стационарных значений пространственно-однородной фазы u_s выходного поля. Конкретное значение фазы u_s зависит от начальных условий при заданном значении k . Это хорошо известное явление пространственной мультистабильности плоской волны в пассивном нелинейном кольцевом резонаторе [19]. Увеличение интенсивности входного поля приводит к появлению новых значений u_s .

Ответ на вопрос об устойчивости пространственно-однородного стационарного решения можно получить с помощью линейного анализа устойчивости. Предположим, что малые пространственные возмущения фазы $\delta u(\mathbf{r}, t)$ и амплитуды $\delta A(\mathbf{r}, t)$ добавляются к пространственно-однородным стационарным решениям u_s и A_s , и линеаризуем исходную нелинейную систему уравнений по отношению к этим возмущениям. Поскольку в модели рассматривается линейно поляризованная волна, представим возмущение в специальном виде, соответствующем пространственно-модулированной волне:

$$\begin{aligned} \delta u(\mathbf{r}, t) &= \delta u_0 \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}) e^{\chi t}, \\ \delta A(\mathbf{r}, t) &= \delta A_0 \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}) e^{\chi t}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ — волновой вектор в поперечном сечении светового пучка, χ — характерная скорость нарастания амплитуды флуктуаций (инкремент возбуждения). Представление флуктуаций в виде (5) дает возможность явно учесть влияние поперечного лапласиана в уравнении (2) на возмущения и получить характеристическое уравнение для определения зон неустойчивости, в которых возможно формирование стационарных пространственных структур. Неустойчивость поперечной структуры светового поля, которая возникает из пространственно-однородного состояния и характеризуется поперечным волновым вектором $\mathbf{k}_\perp \neq 0$, обычно называют «модуляционной неустойчивостью», так как в этом случае возмущение представляет собой пространственно-модулированную структуру с длиной волны $2\pi/k_\perp$. Неустойчивость, приводящая к формированию стационарных пространственных структур, называется неустойчивостью Тьюринга.

Основной механизм, который приводит к формированию фазовых стационарных пространственных структур, состоит в следующем. Рост входной интенсивности $|A_{in}|^2$ приводит к увеличению стационарной пространственно-однородной фазы u_s . В какой-то момент времени она достигает минимума

зоны неустойчивости. Соответствующее этому минимуму значение критического поперечного волнового вектора \mathbf{k}_\perp определяет длину волны модуляции, а соответствующее критическое значение фазы u_s — порог возбуждения для данного вектора. На плоскости поперечных волновых векторов (k_x, k_y) такая ситуация соответствует возникновению круга критических векторов (мод), имеющих одинаковую длину $|\mathbf{k}_\perp|$ и различные направления в пространстве, для которых выполнено условие возбуждения. Именно набор пространственных векторов из критического круга соответствует той пространственной структуре, которая формируется в резонаторе вблизи порога возбуждения. При этом происходит подавление других пространственных мод и в системе формируется стационарная пространственная структура. Такой вид нелинейной динамики мод носит название WTA-динамики (winner takes all) и является примером динамики соревновательного типа. Это означает, что увеличение амплитуды какой-либо моды влечет за собой уменьшение амплитуды другой моды (происходит конкуренция мод). «Победителем» может стать только та мода, которая имеет некие преимущества перед остальными. Здесь существуют два фактора. Во-первых, это начальное условие — мода, которая имела наибольшую начальную амплитуду, имеет больше шансов «победить». Во-вторых, преимущество имеет наиболее нестабильная мода, т.е. мода с наименьшим порогом возбуждения. Результатом WTA-динамики является формирование «собственной» фазовой структуры резонатора в виде ролла или гексагона.

При дальнейшем росте входной интенсивности возникают другие круги критических волновых векторов. В этом случае появляется взаимодействие между пространственными модами, принадлежащими к разным областям неустойчивости, что соответствует другому виду нелинейной динамики мод, а именно — кооперативной динамике. В этом случае наблюдается взаимодействие «мод-победителей» из разных областей неустойчивости. Вообще говоря, такое разделение на этапы взаимодействия довольно условно. Несомненно, что кооперативная динамика мод появляется уже и на первых этапах взаимодействия. Наличие как кооперативной, так и соревновательной динамики обеспечивает огромное разнообразие пространственных фазовых структур в пассивном нелинейном кольцевом резонаторе. Их исследование было проведено численными методами. Далее приводятся результаты численного моделирования исследуемой системы.

Численное моделирование

Для моделирования временной динамики нелинейной фазовой модуляции $u(\mathbf{r}, t)$ в соответствии с уравнением (1) использовался так называемый метод ADI (alternating direction implicit). Для моделирования временной динамики комплексной ампли-

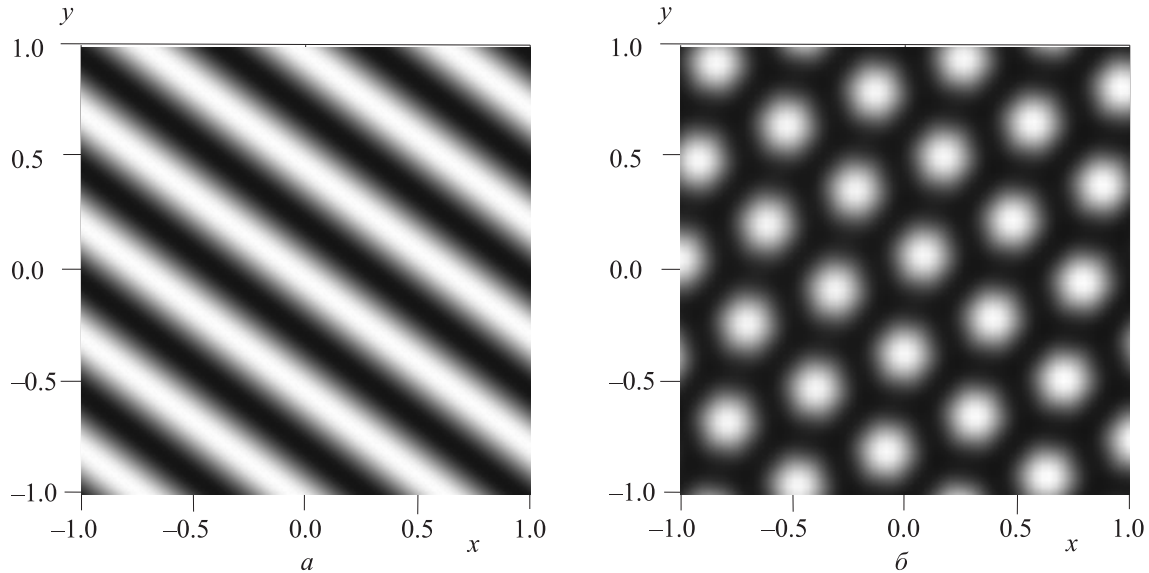


Рис. 2. Собственные пространственные структуры резонатора. Распределения интенсивности в поперечном сечении световой волны в резонаторе, нормированные на значение в максимумах

туды внутрирезонаторного поля $A(\mathbf{r}, z, t)$ в соответствии с уравнением (2) использовалась итерационная схема Икеды. Эти алгоритмы были дополнены дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) для решения уравнения (3), описывающего дифракционное распространение поля в резонаторе. Чтобы вычислить начальную фазовую модуляцию поля $u(\mathbf{r}, t=0) = u_0(\mathbf{r})$, применялся псевдослучайный генератор чисел, который давал δ -коррелированный белый шум малой амплитуды с нулевым средним значением. Управляющими параметрами служили: коэффициент нелинейности k , коэффициент отражения зеркал R и постоянный фазовый сдвиг световой волны в резонаторе ϕ_0 .

В рассматриваемой оптической схеме за счет керровской нелинейности происходит визуализация фазы световой волны, т. е. распределение интенсивности в поперечном сечении повторяет распределение фазы. На приводимых ниже рисунках изображены нормированные на максимальное значение распределения интенсивности в поперечном сечении световой волны в резонаторе (интенсивность на рисунках меняется от 0 до 1). Светлые места соответствуют максимумам интенсивности, темные — минимумам. Координаты (x, y) в поперечном сечении пучка нормированы на радиус апертуры резонатора, поэтому размер показанной на рисунках прямоугольной области поперечного сечения соответствует диаметру апертуры резонатора. Центр каждого рисунка совпадает с центром светового пучка. Заметим, что приводимые рисунки носят качественный характер и отражают вид пространственных структур, формирующихся в поперечном сечении световой волны в нелинейном кольцевом резонаторе при различных режимах работы.

Исходя из теории сложная фазовая структура, формирующаяся в поперечном сечении внутрирезонаторного светового поля в области неустойчивости,

есть результат взаимодействия «собственных» пространственных структур, соответствующих наборам критических поперечных волновых векторов (мод резонатора). Вблизи порога возбуждения в резонаторе формируются «собственные» пространственные структуры ролл и гексагон, которые обусловлены взаимодействием мод из одной и той же области возбуждения (рис. 2).

При увеличении интенсивности входного поля характер взаимодействия усложняется. Было обнаружено, что существенное влияние на процесс формирования структуры оказывает средняя фаза световой волны. По мере роста амплитуды «собственной» структуры эта фаза возрастает, что эквивалентно возрастанию входной интенсивности, и как следствие система удаляется от порога возбуждения. Если условия возбуждения оказываются выполненными для мод из двух соседних областей неустойчивости, то в резонаторе наблюдается формирование более сложных пространственных структур, таких как ромб, «интерлейс» или додекагон (рис. 3).

Однако на этом богатство динамики исследуемой системы не заканчивается. Во взаимодействие могут оказаться втянутыми третья, четвертая и т. д. области неустойчивости, что приводит к формированию сложных поперечных пространственных структур, которые были названы flower-like-структурами (структурами, похожими на цветы) (рис. 4).

Были получены структуры, формирующиеся в результате взаимодействия мод из первой, второй и третьей областей неустойчивости (рис. 4, а), а также мод из первой, третьей, четвертой и пятой областей (рис. 4, б). Основным условием возбуждения таких структур является соотношение между величинами и направлениями критических волновых векторов, соответствующих разным областям неустойчивости, вида $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_j$ (i, j — номера зон неустойчивости). Например, для случая, изображенного

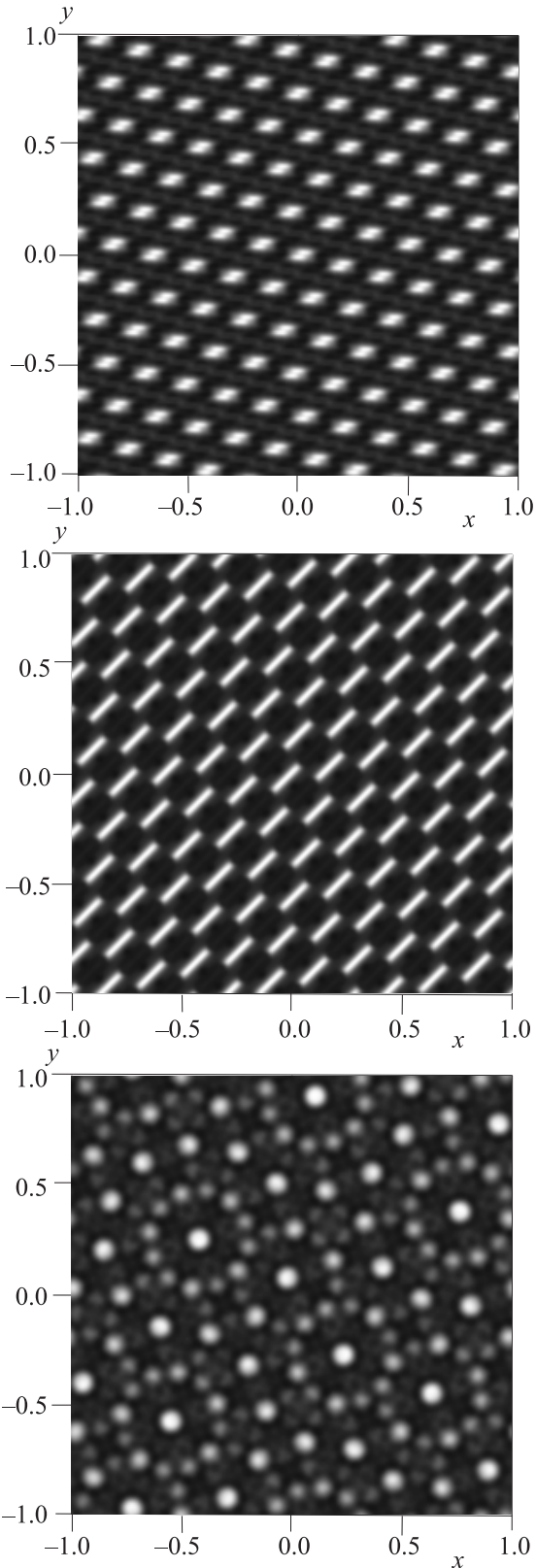


Рис. 3. Более сложные пространственные структуры, наблюдавшиеся в резонаторе. Распределения интенсивности в поперечном сечении световой волны в резонаторе, нормированные на значение в максимумах

на рис. 4, *а*, выполняется соотношение $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$, а для случая, изображенного на рис. 4, *б*, — два соотношения: $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4$ и $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_5$ (нет резонансного соотношения для вектора \mathbf{k}_2).

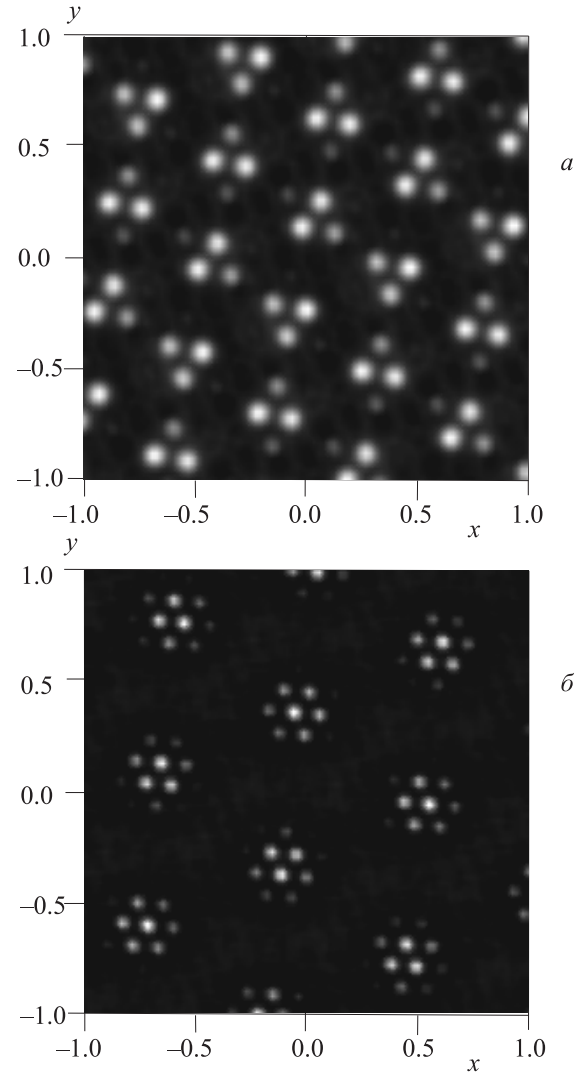


Рис. 4. Пространственные структуры, похожие на цветы. Распределения интенсивности в поперечном сечении световой волны в резонаторе, нормированные на значение в максимумах

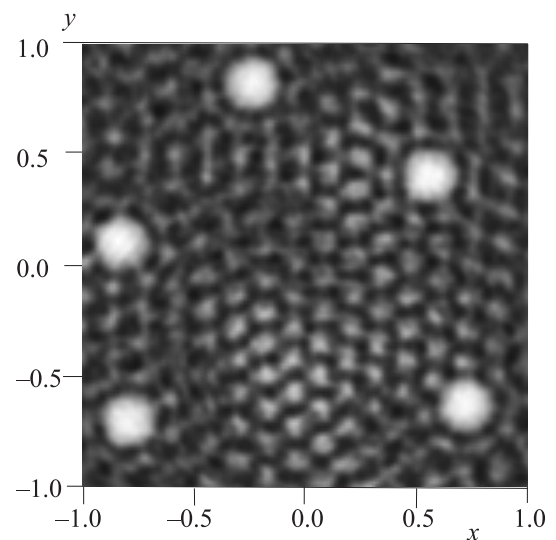


Рис. 5. Динамическая фазовая пространственная структура. Распределение интенсивности в поперечном сечении световой волны в резонаторе, нормированное на значение в максимумах

Динамические фазовые структуры

Численно был обнаружен особый режим, приводящий к формированию динамических фазовых пространственных структур в кольцевом резонаторе. Такая фазовая структура возникает в области бистабильности пространственно-однородной нелинейной фазовой модуляции вблизи порога возбуждения. Она имеет вид ярких крупных пятен в поперечном сечении пучка (рис. 5).

Пятна медленно перемещаются, могут объединяться, пропадать, появляться снова. Они существуют на фоне менее яркой мелкой «собственной» структуры (обычно гексагона). Механизм формирования такой пространственной структуры, видимо, можно объяснить следующим образом. В начальный момент порог возбуждения для второй области неустойчивости оказывается ниже, чем для первой. Формируется гексагон. По мере роста его амплитуды увеличивается средняя фаза. Через некоторое время достигается порог возбуждения для первой области неустойчивости. Образуются крупные пятна. Интенсивность пятен определяется разностью между двумя устойчивыми ветвями пространственно-однородной нелинейной фазовой модуляции. В дальнейшем структура стабилизируется и рост средней фазы прекращается. Было обнаружено, что существует довольно узкая область значений входной интенсивности, при которой может формироваться динамическая фазовая пространственная структура.

Заключение

В настоящей работе теоретически и численно рассмотрены процессы формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении световой волны в пассивном нелинейном кольцевом резонаторе. Численно показана возможность формирования фазовых структур типа ролла и гексагона, являющихся результатом соревновательной динамики нелинейных мод в резонаторе, а также более

сложных фазовых структур, формирующихся в результате кооперативной динамики нелинейных мод.

Список литературы

1. *Newell A.C., Moloney J.V.* Nonlinear Optics. Redwood City: Addison-Wesley, 1992.
2. *Lugiato L.A.* // Chaos, Solitons and Fractals. 1994. **4**. P. 1251.
3. *Firth W.J.* Pattern formation in passive nonlinear optical systems // Self-Organization in Optical Systems and Application to Information Technology. B., Springer-Verlag, 1995.
4. *Abraham N.B., Firth W.J.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 1990. **7**. P. 951.
5. *Lugiato L.A., Oppo G.L., Tredicce J.R.* et al. // J. Opt. Soc. Amer. B. 1990. **7**. P. 1019.
6. *Arecchi F.T.* // Physica D. 1991. **51**. P. 450.
7. *Scroggie A.J., Firth W.J., McDonald G.S.* et al. // Chaos, Solitons and Fractals. 1994. **4**. P. 1323.
8. *Shadrivov I.V., Morrison S.K., Kivshar Y.S.* // Optics Express. 2006. **14**, N 20. P. 9344.
9. *Powell D.A., Shadrivov I.V., Kivshar Y.S.* // Applied Physics Letters. 2009. **95**, N 8. P. 084102.
10. *Tanaram C.* et al. // Procedia Engineering. 2011. **8** P. 432.
11. *Preecha Yupapin, Chat Teeka, Muhammad Arif Jalil, Jalil Ali.* Nanoscale Nonlinear PANDA Ring Resonator. CRC Press, Taylor & Francis, 2012.
12. *Nithiroth Pornsuwancharoen, Jalil Ali, Preecha Yupapin.* Optical Solitons in Nonlinear Micro Ring Resonators: Unexpected Results and Applications. NOVA Science Publishers, 2011.
13. *De Leonardis F., Campanella C.E., Troia B.* et al. // Sensors. 2014. **4**, N 9. P. 16017.
14. *Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. **17**, № 2. С. 87.
15. *Балякин А.А., Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. **50**, № 9. С. 800.
16. *Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu.* et al. // J. Opt. Soc. Amer. B. 1992. **9**. P. 78.
17. *Иванов В.Ю., Ирошников Н.Г., Лачинова С.Л.* // Изв. РАН. Сер. физ. 1996/ **60**, № 12. С. 169.
18. *Ikeda K.* // Opt. Commun. 1979. **30**. P. 257.
19. *Gibbs H.M.* Optical Bistability: Controlling Light with Light. N. Y.: Acad. Press, 1985.

Phase patterns in a nonlinear ring resonator

V. Yu. Ivanov, I. B. Ivanova (Polyakova)

Department of General Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: vu.ivanov@physics.msu.ru.

The processes of the formation of phase spatial structures (patterns) in the cross section of a light wave in a passive nonlinear ring resonator are considered. Analytical and numerical calculations are performed. The potential to form roll- and hexagon-type phase patterns, which are the product of competitive dynamics of nonlinear modes in a resonator, and more complex phase patterns associated with cooperative dynamics of nonlinear modes is demonstrated by numerical modeling.

Keywords: nonlinear ring resonator, spatial mode, phase pattern, roll, hexagon.

PACS: 42.60.Da.

Received 17 October 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 3. Pp. 266–271.

Сведения об авторах

1. Иванов Владимир Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-14-89, e-mail: vu.ivanov@physics.msu.ru.
2. Иванова (Полякова) Инна Борисовна — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-14-89, e-mail: ib.polyakova@physics.msu.ru.