# Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью радиодальномерных и доплеровских измерений

А.С. Жамков<sup>*a*</sup>, В.Е. Жаров<sup>*b*</sup>

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: <sup>a</sup> zhamkov@physics.msu.ru, <sup>b</sup> vladzh2007@yandex.ru

Статья поступила 23.10.2015, подписана в печать 14.12.2015.

В статье изложены первые результаты по уточнению вектора состояния космического аппарата (КА) «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон», являющегося элементом наземно-космического радиоинтерферометра. Вектор состояния включает в себя по три компоненты положения и скорости аппарата в геоцентрической системе координат, которые посредством применения фильтра Калмана на основе радиодальномерных и доплеровских данных уточняются с каждой итерацией алгоритма. Показано, что полученные результаты по уточнению орбиты улучшают точность орбиты, рассчитываемой Институтом прикладной математики имени М. В. Келдыша (ИПМ РАН).

Ключевые слова: «Радиоастрон», фильтр Калмана, наземно-космический интерферометр, корреляционная обработка.

УДК: 521.35. PACS: 95.10.Eg.

#### Введение

Космическая миссия «Радиоастрон» [1, 2, 3] это уникальный по своим масштабам и сложности проект, воплотивший в себе принципы РСДБ (радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой), разработанные и реализованные с использованием КА «Спектр-Р». Космический радиотелескоп (КРТ) диаметром 10 м на борту «Спектра-Р» в ходе научных наблюдений является элементом наземно-космического интерферометра, вынесенным относительно наземных радиотелескопов на расстояние, ограниченное апогеем орбиты КА, которое составляет в настоящее время около 300 тыс. км. В качестве наземных элементов интерферометра используются крупнейшие радиотелескопы мира: 300-метровый в Аресибо и 100-метровый ГБТ (Грин-Бэнк телескоп) (США), 100-метровый в Эффельсберге (Германия), интерферометр в Вестерборке (Нидерланды), 70-метровый в Евпатории (Украина), 64-метровый в Усуде (Япония), 70-метровый в Тидбинбилле (Австралия), российская система «Квазар» и др. Выбранная высокоэллиптическая орбита КА «Спектр-Р» является сильно эволюционирующей, что позволяет в ходе полета вести наблюдение как отдельного объекта, так и различных участков небесной сферы в разных режимах для решения научных задач проекта.

Для успешной работы, а также корреляции наблюдений на наземно-космическом интерферометре необходимо с максимально высокой точностью определять положение базы наземно-космического интерферометра, а значит и геоцентрическую орбиту КА. Для корреляционной обработки научной информации отличие расчетной орбиты от реальной по положению, скорости и ускорению не должно превышать соответственно 100–300 м, 2 мм/с и  $5\cdot 10^{-5}$  мм/с  $^2$  [2].

Определением расчетной орбиты КА «Спектр-Р» занимается Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша (ИПМ РАН), для чего используется модель движения, учитывающая ряд возмущающих факторов [4]:

— несферичность гравитационного поля Земли, рассчитываемую в соответствии с моделью EGM-96 (Earth gravitational model, 1996);

 притяжение Луны и Солнца, координаты которых вычисляются на основе эфемерид DE421;

— давление солнечного света;

 возмущающие ускорения, возникающие в процессе разгрузки маховиков;

 «твердые приливы», т. е. поправки к гравитационному полю Земли, обусловленные ее деформацией под действием притяжения Луны и Солнца.

В настоящей работе отличительной чертой определения координат и компонент скорости КРТ на момент проведения им наблюдений является использование фильтра Калмана, учитывающего дальномерные и доплеровские измерения.

Для аппарата «Спектр-Р» измерения положения и скорости его движения проводятся различными методами. Они включают, в частности, штатные радиотехнические измерения дальности и радиальной скорости, которые регулярно осуществляются станциями управления в Уссурийске и Медвежьих Озерах. Измерения радиальной скорости по сигналу ВИРК (высокоинформативный радиоканал) проводятся на наземной станции слежения в Пущинской радиоастрономической обсерватории (ПРАО АКЦ ФИАН). Сюда же относятся и лазерные измерения дальности. Лазерные измерения дальности являются одними из наиболее точных и информативных среди всех перечисленных источников орбитальной информации. Однако для их получения необходимо выполнение ряда условий, которые не всегда могут быть обеспечены: безоблачная погода, достаточная мощность лазера, способная обеспечить локацию вплоть до расстояний 300 000 км, доступ к средствам лазерной локации на территории других стран.

Таким образом, самыми доступными методами уточнения орбиты КА являются радиотехнические измерения дальности и радиальной скорости. Использование описанной модели позволяет реконструировать орбиту для обработки данных в корреляторе с точностями для положения не хуже  $\pm$  500 м и для скорости не хуже  $\pm$  2 см/с по трем координатам и компонентам скорости.

Эти величины значительно превышают указанные в работе [2]. Нами показано, что применение фильтра Калмана улучшает параметры кросс-корреляционной функции (уменьшение задержки и остаточной частоты интерференции) в результате корреляционной обработки данных, что и служит показателем улучшения орбиты.

## 1. Корреляционная обработка данных наземно-космического интерферометра и ее требования к точности определения орбиты КА «Спектр-Р»

Программный коррелятор для проекта «Радиоастрон» [5] разработан в АКЦ ФИАН (Астрокосмический центр Физического института им. П. Н. Лебедева РАН) и является важнейшим элементом данного проекта.

Выходные потоки данных коррелятора служат мерой интегрального качества проекта «Радиоастрон» и определяют успех решения поставленных научных задач.

Корреляция — необходимый процесс обработки данных с разных антенн, составляющих радиоинтерферометр. Коррелятор, используемый в проекте «Радиоастрон», построен по схеме программного FX-коррелятора «станция-интерферометр». Это означает, что сначала выполняется Фурье-преобразование сигналов, а потом перемножение их спектров с учетом того, что каждый из сигналов с *i*-го телескопа (i = 1, 2, ..., n) задерживается на расчетную задержку относительно центра масс Земли.

По причине того, что КА на орбите и радиотелескопы на Земле движутся с разными скоростями относительно центра Земли и моменты прихода фронта радиоволны от удаленного радиоисточника на каждый из телескопов различаются, необходимо это различие компенсировать введением дополнительной задержки  $\tau$ , а также изменением этой задержки. Первый процесс обычно называют поправкой по задержке, а второй — поправкой по частоте интерференции. Полную задержку можно представить в виде  $\tau_c = \tau_{geom} + \Delta \tau_b + \Delta \tau_{atm}$ . Здесь  $\tau_{geom}$  — геометрическая задержка, которая вносит наибольший вклад и равна  $\tau_{geom} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{s})/c$ , где  $\boldsymbol{b}$  — вектор базы наземно-космического интерферометра,  $\boldsymbol{s}$  — единичный вектор направления на радиоисточник, c — скорость света,  $\Delta \tau_b$  — поправка, учитывающая смещение второго из телескопов за время распространения волны от первого до второго телескопа,  $\Delta \tau_{atm}$  — задержка в атмосфере, вычисленная на основе принятой [6] модели распространения радиоволн в атмосфере.

Поскольку координаты и скорости движения наземных телескопов по стандартам IERS (International Earth Rotation Service) [7] вычисляются с очень высокой точностью, равной соответственно 1 мм и 1 мм/год, а успех корреляционной обработки данных зависит напрямую от базы наземно-космического интерферометра, то, как следствие, все зависит от точности определения положения и скорости KA.

В корреляторе задержка отслеживается с точностью шага выборки данных  $\Delta t$ , где  $\Delta t = 1/(2\Delta f)$ ,  $\Delta f$  — ширина полосы приема радиосигнала [5, 8]. Модельная задержка рассчитывается с использованием оригинальной орбиты баллистическим центром ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Для обнаружения корреляции (максимума кросс-корреляционной функции (ККФ)) разность между расчетной  $\tau_{\rm c}$  и истинной задержкой  $au_0$ , равная  $\Delta au = au_0 - au_c$ , за время интегрирования T<sub>int</sub> не должна превышать длительности одного ( $\Delta t$ ) или нескольких ( $m \cdot \Delta t$ ) шагов выборки. Увеличение количества шагов выборки необходимо для повышения вероятности обнаружения корреляции, поскольку требование к разности  $\Delta \tau$  в пределах длительности одного шага выборки  $\Delta t$  является слишком строгим и практически невыполнимым. Если эта разность существует и постоянна на интервале интегрирования, то присутствует ошибка в определении задержки из-за погрешности в определении длины базы интерферометра  $\Delta b$ . Если максимум ККФ регулярно перемещается по каналам задержки на интервале интегрирования, то присутствует ошибка в скорости изменения длины базы  $d(\Delta b)/dt$ . Если же вдобавок ко всему присутствует ошибка в ускорении изменения длины базы, то происходит перемещение по каналам и ослабление (замывание) ККФ.

Запуск коррелятора с перебором по нескольким шагам выборки называется обработкой в широком окне, или «первым прогоном». Если в процессе обработки с широким окном найден отклик ККФ, то запускается режим посткорреляционной обработки, учитывающий найденную поправку к задержке в результате «первого прогона».

В общем случае задержку можно представить рядом Тейлора:

$$\tau_0(t) = \tau_c(t_0) + \left[\dot{\tau}_c(t_0) + \Delta \dot{\tau}(t_0)\right](t - t_0) + \frac{1}{2} \left[\ddot{\tau}_c(t) + \Delta \ddot{\tau}(t_0)\right](t - t_0)^2 + \dots, \quad (1)$$

где  $t_0$  — момент, соответствующий началу наблюдений;  $\Delta \dot{\tau}$  и  $\Delta \ddot{\tau}$  — поправки к производным задержки  $\tau$ , которые рассчитываются на основе априорных данных по координатам наземной станции и координатам космического радиотелескопа.

Ограничившись в (1) членами 1-го и 2-го порядка малости, получим

$$\Delta \dot{\tau}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\Delta \ddot{\tau}(t_0)(t-t_0)^2 < \frac{1}{2\Delta f}.$$
 (2)

Из условия (2) можно получить оценки [5] допустимой погрешности по  $\Delta \dot{\tau}$  и  $\Delta \ddot{\tau}$  и соответственно по скорости изменения базы  $d(\Delta b)/dt$  и ускорению ее изменения  $d^2(\Delta b)/dt^2$ , определяющим точность компонент положения, скорости и ускорения КРТ [6].

Невыполнение этих условий может быть одной из причин того, что из 702 сеансов наблюдений квазаров и активных ядер галактик только в 224 сеансах обнаружена корреляция [5].

Разумеется, причина отсутствия корреляции в отдельных сеансах может быть связана не только с неточной орбитой аппарата, но и с малым коррелированным потоком от разрешенных на наземно-космической базе радиоисточников, а также с приемной аппаратурой. В нашей работе предлагается использование фильтра Калмана для уточнения орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с целью поиска корреляции в отдельных сеансах.

#### 2. Основы калмановской фильтрации

### 2.1. Постановка задачи

Предположим, что имеется некоторая динамическая система, состояние которой непрерывно меняется со временем. Выходной сигнал системы y(t) (*n*-мерный вектор) известен и несет информацию о состоянии системы, которая описывается вектором состояния X(t). Вектор состояния X(t) — это неизвестный *m*-мерный случайный вектор:  $X(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)].$ 

Связь между наблюдаемым выходным сигналом y(t) динамической системы и вектором состояния X(t) имеет линейный вид:

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{r}(t), \qquad (3)$$

где C(t) — известная  $n \times m$ -матрица, называемая матрицей плана или матрицей наблюдений, r(t) — неизвестный n-мерный вектор невязок. Уравнение (3) называется моделью наблюдений.

Для дискретных систем состояние известно в моменты наблюдений  $t_0, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots$ , причем моменты  $t_k, t_{k+1}$  для разных k не обязательно равноотстоят друг от друга. Моменты наблюдений удобно обозначать их порядковыми номерами  $0, 1, \ldots, k, k+1, \ldots$  Тогда модель наблюдения в дискретном виде:

$$\boldsymbol{y}(k) = C(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{r}(k). \tag{4}$$

Будем считать, что вектор состояния меняется в соответствии с *уравнением состояния*, также записанным в дискретном виде:

$$\boldsymbol{X}(k+1) = A(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{v}(k), \quad (5)$$

где матрица A(k) размерности  $m \times m$  предполагается известной, v(k) — вектор возмущений. Тогда задача фильтрации формулируется следующим образом.

Рассматривается динамическая система

$$\boldsymbol{y}(k) = C(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{r}(k), \qquad (6a)$$

$$\boldsymbol{X}(k+1) = A(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{v}(k). \tag{6b}$$

Матрицы обратной связи A(k) размерности  $m \times m$ и наблюдений C(k) размерности  $n \times m$  предполагаются известными. Измеряемый вектор y(k) имеет размерность n.

Вектор невязок r(k) размерности n и m-мерный вектор возмущений v(k) представляют собой дискретные векторные случайные процессы типа белого шума с нулевым средним и априори известными автоковариациями:

$$E\{\boldsymbol{r}(k)\} = 0, \quad E\{\boldsymbol{r}(k)\boldsymbol{r}'(j)\} = Q(k)\delta_{kj}, \quad (7)$$

$$E\{\boldsymbol{v}(k)\} = 0, \quad E\{\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{v}'(j)\} = V(k)\delta_{kj}, \quad (8)$$

где  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера, штрих обозначает транспонирование, Q(k) — матрица автоковариации вектора невязок r(t), V(k) — матрица автоковариации вектора возмущений v(k). Предполагается также, что начальное состояние, ошибки измерений r(k) и вектор возмущений v(k) взаимно не коррелированны:

$$E\{X(0)r'(j)\} = 0, E\{X(0)v'(j)\} = 0, E\{v(k)r'(k)\} = 0.$$
(9)

Требуется на основе имеющихся данных y(k) построить такую линейную несмещенную оценку вектора  $\widehat{X}(k)$ , чтобы дисперсии ошибок

$$\mathbf{\tilde{X}}(k) = \mathbf{X}(k) - \mathbf{\tilde{X}}(k), \qquad (10)$$

т. е. диагональные элементы матрицы апостериорных автоковариаций

$$P(k) = E\{\widetilde{\boldsymbol{X}}(k)\widetilde{\boldsymbol{X}}'(k)\},\qquad(11)$$

были минимальны.

#### 2.2 Основные уравнения

Для того чтобы применить фильтр Калмана к какой-либо конкретной задаче, необходимо знать дифференциальное уравнение состояния, которое описывает данный процесс:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = f(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{W}, \qquad (12)$$

где **X** — вектор состояния системы, f(X) — нелинейная функция этого состояния, **W** — случайный процесс, или шум системы.

После преобразования уравнения (12) к виду (5) [9, 10] матрица *A*(*k*) будет иметь следующий вид:

$$A(k) = I + F(k)T, \tag{13}$$

где I — единичная матрица размерности  $m \times m$ , T — интервал времени между дискретными отсчетами, а F(k) — матрица размерности  $m \times m$ , элементы которой находятся согласно формуле

$$F(k) = \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} \bigg|_{\boldsymbol{X} = \widehat{\boldsymbol{X}}(k)}.$$
 (14)

Аналогично если модель наблюдений описывается нелинейным уравнением

$$\boldsymbol{Z} = h(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{R},\tag{15}$$

где  $h(\mathbf{X})$  — нелинейная модель наблюдений,  $\mathbf{R}$  — шум наблюдений, то после приведения ее к виду (4) матрица C(k) определится как

$$C(k) = \frac{\partial h(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} \bigg|_{\boldsymbol{X} = \widehat{\boldsymbol{X}}(k)}.$$
 (16)

Заметим, что если рассматривается дискретный процесс, то в модели движения (12) и модели наблюдений (15) достаточно просто расставить индексы, соответствующие определенному моменту времени  $t_k$ :

$$\boldsymbol{X}(k) = f(\boldsymbol{X}(k)) + \boldsymbol{W}(k), \quad (17a)$$

$$\boldsymbol{Z}(k) = h(\boldsymbol{X}(k)) + \boldsymbol{R}(k).$$
(17b)

Таким образом, в процессе линеаризации получаются матрицы A(k) и C(k). Эти матрицы в дальнейшем используются для составления уравнений Риккати, которые необходимы для уточнения вектора состояния и имеют следующий вид:

$$M(k) = A(k)P(k-1)A'(k) + V(k),$$
  

$$K(k) = M(k)C'(k)(C(k)M(k)C'(k) + Q(k))^{-1}, \quad (18)$$
  

$$P(k) = (I - K(k)C(k))M(k).$$

Теперь можно описать алгоритм действий по уточнению вектора состояния системы.

1. Экстраполяция вектора состояния на момент времени  $t_{k+1} > t_0$ :

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{*}(k+1) = A(k)\widehat{\boldsymbol{X}}(k), \quad \widehat{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{X}(0), \quad (19)$$

где **X**(0) — априори известные начальные величины вектора состояния.

2. Вычисление матрицы ковариации оценки вектора состояния:

$$P_*(k+1) = A(k)P(k)A'(k) + V(k), \quad P(0) = \overline{P}(0), \ (20)$$

где  $\overline{P}(0)$  — априори известные начальные величины матрицы ковариации.

3. Вычисление матрицы усиления:

$$K(k+1) = P_*(k+1)C'(k+1) \times \times \left[C(k+1)P_*(k+1)C'(k+1) + Q(k+1)\right]^{-1}.$$
 (21)

 Вычисление уточненной оценки вектора состояния с учетом новых наблюдений:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(k+1) = \widehat{\boldsymbol{X}}_*(k+1) + K(k+1) [\boldsymbol{y}(k+1) - C(k+1)\widehat{\boldsymbol{X}}_*(k+1)]. \quad (22)$$

5. Вычисление матрицы ковариации уточненной оценки вектора состояния:

$$P(k+1) = P_*(k+1) - K(k+1)C(k+1)P_*(k+1).$$
(23)

Далее процесс рекуррентно повторяется, пока не будет исчерпан массив наблюдений y(k).

Начальное значение матрицы ковариации вектора состояния  $\overline{P}(0)$  выбирается, как правило, из физических соображений. Обычно задаются диагональные элементы, а все остальные принимаются равными нулю. Если нет абсолютно никакой информации о ковариациях искомых параметров, то они полагаются равными любому большому числу в рамках решаемой задачи. Алгоритм таков, что если начальные условия заданы достаточно хорошо, то элементы ковариационной матрицы сами быстро сойдутся к истинным значениям.

# 3. Уточнение орбиты КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон» с помощью фильтра Калмана

#### 3.1. Модель движения

Простейшая модель, которую можно применить к движению аппарата, — это кеплеровская орбита. Однако эта модель слишком проста и не годится для описания движения большинства искусственных спутников Земли, в том числе и КРТ, который вследствие своей орбиты и конструкции испытывает значительные воздействия со стороны притяжения тел Солнечной системы (планет, Луны и Солнца), в особенности Луны и Солнца, а также давления солнечного излучения.

Поскольку в перигее спутник проходит достаточно близко к Земле, то нельзя рассматривать Землю как материальную точку с массой *m*. Необходимо учитывать несферичность нашей планеты и раскладывать геопотенциал в ряд по полиномам Лежандра.

Учитывая все вышесказанное, можем записать [6,10]:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{s} = -\frac{\mu_{\rm E}\boldsymbol{r}_{s}}{r_{s}^{3}} + \boldsymbol{a}_{\rm pl} + \boldsymbol{a}_{\rm harm} + \boldsymbol{a}_{\rm SPres}, \qquad (24)$$

где  $\mu_{\rm E}$  — гравитационный параметр Земли;  $r_s$  — геоцентрический радиус-вектор спутника;  $a_{\rm pl}$ ,  $a_{\rm harm}$ ,  $a_{\rm SPres}$  — возмущающие ускорения от тел Солнечной системы, несферичности Земли и давления солнечного света соответственно. В нашем случае ускорение от тел Солнечной системы имеет вид

$$\boldsymbol{a}_{\rm pl} = \mu_{\rm pl} \left( \frac{\boldsymbol{r}_{\rm pl} - \boldsymbol{r}_s}{|\boldsymbol{r}_{\rm pl} - \boldsymbol{r}_s|^3} - \frac{\boldsymbol{r}_{\rm pl}}{|\boldsymbol{r}_{\rm pl}|^3} \right), \qquad (25)$$

 $\mu_{\rm pl}$  — гравитационный параметр планеты,  $\pmb{r}_{\rm pl}$  — геоцентрический вектор координат планет, Луны и Солнца.

Ускорение от давления солнечного излучения

$$\boldsymbol{a}_{\rm SPres} = -P_{\rm Sun} C_R \frac{A}{m} \frac{\boldsymbol{r}_{\rm Sun}}{\boldsymbol{r}_{\rm Sun}^3} \, {\rm AU}^2, \qquad (26)$$

 $P_{\rm Sun}$  — постоянная давления солнечного излучения на орбите Земли, равная  $4.56 \cdot 10^{-6}$  H/m<sup>2</sup>,  $C_R$  коэффициент давления излучения, который равен  $1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — коэффициент поглощения ( $\varepsilon = 1$  полное отражение,  $\varepsilon = 0$  — полное поглощение излучения), A — эффективная площадь спутника, m — масса спутника,  $r_{\rm Sun}$  — геоцентрический радиус-вектор Солнца, AU — астрономическая единица.

Возмущающее ускорение вследствие несферичности Земли

$$\boldsymbol{a}_{\text{harm}} = \left\{ \ddot{\boldsymbol{x}}_{\text{harm}}, \ddot{\boldsymbol{y}}_{\text{harm}}, \ddot{\boldsymbol{z}}_{\text{harm}} \right\},$$
(27)

$$\ddot{x}_{\text{harm}} = \sum_{n,m} \ddot{x}_{nm}, \quad \ddot{y}_{\text{harm}} = \sum_{n,m} \ddot{y}_{nm}, \quad \ddot{z}_{\text{harm}} = \sum_{n,m} \ddot{z}_{nm},$$

где  $\ddot{x}_{nm}$ ,  $\ddot{y}_{nm}$ ,  $\ddot{z}_{nm}$  — функции, описывающие разложение геопотенциала в ряд по полиномам Лежандра до 10-го порядка включительно [6, 11].

Поскольку радиодальномерные и доплеровские измерения занимают небольшой интервал времени, в пределах нескольких часов, то заданная таким образом приближенная модель вполне достаточна для успешного решения поставленной задачи.

Вектор состояния в данной задаче, как уже было упомянуто выше, включает координаты и составляющие скорости, т. е.  $\mathbf{X}(t) = [X_s(t), Y_s(t), Z_s(t), V_{xs}(t), V_{ys}(t), V_{zs}(t)]$ , следовательно, производная по времени данного вектора будет иметь вид  $\dot{\mathbf{X}}(t) = [V_{xs}(t), V_{ys}(t), V_{zs}(t), \ddot{r}_{xs}(t), \ddot{r}_{ys}(t), \ddot{r}_{zs}(t)]$ , где  $\ddot{r}_{is}(t)$ компоненты ускорения спутника, выраженные через координаты, которые были только что определены выше. Таким образом, модель приведена в соответствие с видом уравнения (17а).

#### 3.2. Модель наблюдений

Модель наблюдений представляет собой два уравнения: одно — для дальномерных, второе — для доплеровских измерений. Для дальномерных измерений справедливо следующее очевидное соотношение:

$$Z_1 = \sqrt{(X_0 - X_s)^2 + (Y_0 - Y_s)^2 + (Z_0 - Z_s)^2},$$
 (28)

 $X_0, Y_0, Z_0$  — геоцентрические координаты наземной станции;  $X_s, Y_s, Z_s$  — геоцентрические координаты КА.

Здесь необходимо учесть, что положение КА рассчитывается на момент испускания сигнала, а положение станции, естественно, на момент приема.

Модель доплеровских измерений [12] учитывает члены до 10<sup>-15</sup> степени малости. Для нашей работы не требуется такая точность. Путем тестирования программы на модельных значениях были оставлены только несколько членов, дающих основной вклад, и, таким образом, модель доплеровских наблюдений приняла следующий вид:

$$Z_{2} = V_{dop} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}_{0} - \boldsymbol{v}_{s}) + \frac{v_{s}^{2}}{2c} - \frac{\mu_{E}}{r_{s}c} + L_{G}c + \frac{\boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_{s}}{c} - \frac{\boldsymbol{v}_{0}\boldsymbol{v}_{s}}{c} + \frac{\mu_{Moon}}{r_{Moon}c} - \frac{\mu_{Moon}}{|\boldsymbol{r}_{Moon} - \boldsymbol{r}_{s}|c} - \frac{\mu_{Moon}}{r_{Moon}^{3}c}(\boldsymbol{r}_{s}\boldsymbol{r}_{Moon}) - \frac{\mu_{E}R_{ref}^{2}J_{2}}{2r_{s}^{3}c}\left(1 - \frac{3z_{s}^{2}}{r_{s}^{2}}\right), \quad (29)$$

где,  $\mathbf{n} = \mathbf{D}/D$  — единичный вектор направления от наблюдателя к КА;  $\mathbf{D}$  — вектор, направленный от наблюдателя к КА;  $\mathbf{D}$  — расстояние между наблюдателем и КА;  $\mathbf{v}_0$  — вектор скорости наблюдателя;  $\mathbf{v}_s$  — вектор скорости КА; c — скорость света,  $L_G$  — безразмерный потенциал геоида (табличное значение);  $\mathbf{a}_s$  — ускорение КА;  $J_2$  — динамический формфактор Земли;  $\mu_{\rm E}$ ,  $\mu_{\rm Moon}$  — гравитационные параметры Земли и Луны;  $\mathbf{r}_s$ ,  $\mathbf{r}_{\rm Moon}$  — геоцентрические радиусы-векторы координат КА и Луны,  $R_{\rm ref}$  экваториальный радиус Земли.

Таким образом, модель наблюдений приведена в соответствие с видом уравнения (17b).

### 3.3. Модель задержки радиосигнала

В п. 3.2 было упомянуто, что следует учитывать время распространения радиосигнала от КА до наземной станции слежения. В условиях проекта «Радиоастрон» задержка достигает величин вплоть до 1 с. За это время аппарат может переместиться на сотни метров, а возможно, и на километры.

Модель задержки приводится в работе [12]. Приведем здесь ее вид, оставив только те члены, которые вносят существенный вклад:

$$\Delta = \frac{D}{c} - \frac{(\mathbf{D}\mathbf{v}_s)}{c^2} + \frac{2\mu_{\rm E}}{c^3} \ln \frac{r_s + R_{\rm ref} + D}{r_s + R_{\rm ref} - D} + \frac{Dv_s^2}{2c^3} + \frac{(\mathbf{D}\mathbf{v}_s)^2}{2Dc^3}.$$
(30)

# 4. Результаты работы фильтра Калмана по уточнению орбиты КА «Спектр-Р»

Для тестирования работы фильтра Калмана был использован сеанс наблюдений под кодовым названием RAES03ST. Сеанс был проведен 7 мая 2013 г. в промежуток времени 17:00:00–17:40:00 UTC. Наблюдение проводилось в *L*-диапазоне (18 см) на интерферометре «Радиоастрон»-Евпатория с базой 2.3 диаметра Земли. Радиодальномерные и доплеровские измерения аппарата были проведены на станции Медвежьи Озера в этот же день в 2 этапа в промежуток времени с 13:15:22 по 13:29:22 UTC и с 14:59:07 по 15:13:07 UTC. По техническим причинам весь промежуток наблюдений разбивается на интервалы по 10 мин, далее в тексте эти промежутки будут называться «сканами». Результаты обработки сеанса представлены на рис. 1, 2.

На рис. 1 показаны кросс-корреляционные функции (зависимость амплитуды интерференционного отклика от задержки и частоты интерференции) для оригинальной орбиты ИПМ РАН (рис. 1, *a*) и для орбиты, рассчитанной с помощью фильтра Калмана (рис. 1, *б*). Из рисунка видно, что для орбиты, рассчитанной с помощью фильтра Калмана,



*Puc. 1.* Интерферометрический отклик на плоскости fringe rate/delay (частота интерференции/задержка): исходные (*a*) и уточненные (*б*) данные

интерференционный отклик оказался ближе к центру картины: величина задержки уменьшилась на 1 мкс, а отклонение по частоте интерференции стало на порядок лучше: 0.03 Гц вместо 0.3 Гц. Это означает, что уточненная орбита точнее орбиты ИПМ по координатам и компонентам скорости.

На рис. 2, *а* представлено отношение сигнал/шум (SNR) для двух версий орбит, оригинальной и уточненной. Из рисунка видно, что для уточненной орбиты отношение сигнал/шум увеличилось более чем в 2 раза на всех 4 сканах наблюдений. Это также говорит о более точном вычислении координат и составляющих скорости КА, поскольку величина отношения сигнал/шум — прямое следствие когерентного сложения двух сигналов с разных радиотелескопов, которое тем больше, чем точнее известны компоненты положения и скорости радиотелескопов, составляющих радиоинтерферометр.

На рис. 2, б показан ход поправки к задержке для двух версий орбит на протяжении всего промежутка наблюдений. Как уже было сказано выше, величина поправки к задержке определяет ошибку базы наземно-космического интерферометра. Из рисунка видно, что эта величина меньше для уточненной орбиты.

На рис. 2, в представлен ход изменения задержки на протяжении наблюдений. Как видно из рисунка, скорость ее изменения уменьшилась на порядок: с  $\approx 1.8 \cdot 10^{-10}$  с/с до  $\approx 2 \cdot 10^{-11}$  с/с для улучшенной



Рис. 2. Отношение сигнал/шум при наблюдениях на протяжении 4 сканов (1 скан — 10 минут наблюдений): Original — исходные данные, Kahlman — уточненные данные (а). Поведение задержки при наблюдениях на протяжении 4 сканов: delOrig — задержка для исходных данных, delKahlm — задержка для уточненных данных (б). Поведение скорости изменения задержки при наблюдениях на протяжении 4 сканов: veldelOrig — исходные данные, veldelKahlm — уточненные данные (в)

орбиты, что означает более точное определение скорости изменения базы наземно-космического интерферометра (6 мм/с вместо  $\approx 5$  см/с).

Следующим обработанным сеансом стал RAES03OE. Сеанс был проведен 12 марта 2013 г. в промежуток времени 16:30:00–17:10:00 UTC на интерферометре «Радиоастрон»-Евпатория с базой 2 диаметра Земли. Существенное отличие данного сеанса от предыдущего состоит в том, что наблюдения проводились в *C*-диапазоне (6.2 см), который накладывает более серьезные требования к точности априорной оценки орбиты, нежели *L*-диапазон. В этом легко убедиться из простейшей оценки  $\Delta f = \Delta v \cdot f/c$ . Для того чтобы остаться в пределах той же ошибки по частоте интерференции  $\Delta f$ , при наблюдениях на большей частоте необходимо уменьшить неопределенность в скорости аппарата. Другими словами, проводя наблюдения на частоте в три раза большей, мы должны знать компоненты скорости аппарата в три раза лучше.

Радиодальномерные и доплеровские измерения аппарата были проведены на станции в Уссурийске в этот же день в 2 этапа в промежуток времени с 06:12:40.5 по 06:27:37.5 UTC и с 07:20:09.5 по 07:35:08.5 UTC. Результаты обработки сеанса представлены на рис. 3.



*Рис. 3.* Отношение сигнал/шум при наблюдениях в сеансе RAES03OE на протяжении 4 сканов: Original исходные данные, Kahlman — уточненные данные

На рис. З показано отношение сигнал/шум для двух версий орбит: орбиты ИПМ и уточненной нами. Для первой орбиты результаты представлены после посткорреляционной обработки, для уточненной — после «первого прогона». Поскольку программное обеспечение обработки данных с коррелятора позволяет отображать прогнозное значение отношения сигнал/шум для посткорреляционной обработки по результатам прогона в широком окне, то сравнение с оригинальной орбитой ИПМ проводилось именно по этому параметру. Из рисунка видно, что фильтр Калмана местами улучшает показания оригинала. Этого факта достаточно, чтобы ожидать появления корреляции в тех сеансах, где ее не было. Таким образом, показана способность алгоритма к улучшению орбиты в С-диапазоне.

Ceaнс RAES03BB был выбран для тестирования программы на сеансе с отсутствующей корреляцией.

Сеанс был проведен 21 июля 2012 г. в промежуток времени 12:30:00-13:30:00 UTC на интерферометрах «Радиоастрон»-Yebes (Испания), «Радиоастрон»-Медичина (Италия), «Радиоастрон»-Робледо (Испания)



Рис. 4. Отношение сигнал/шум при наблюдениях в сеансе RAES03BC на протяжении 6 сканов: Original — исходные данные, Kahlman — уточненные данные (a). Поведение задержки при наблюдениях в сеансе RAES03BC на протяжении 6 сканов: delOrig задержка для исходных данных, delKahlm — задержка для уточненных данных (б). Поведение скорости изменения задержки при наблюдениях в сеансе RAES03BC на протяжении 6 сканов: veldelOrig — исходные данные, veldelKalm — уточненные данные (в)

с базой 2 диаметра Земли. Радиодальномерные и доплеровские измерения аппарата были проведены на станции в Уссурийске в этот же день в 2 этапа в промежуток времени с 08:46:55 по 09:01:15 UTC и с 09:54:51 по 10:08:35 UTC. При использовании фильтра Калмана корреляция не была найдена ни в *C*-, ни в *L*-диапазоне. Вопрос о причинах отсутствия корреляции остается открытым. Далее была предпринята попытка рассмотреть сеанс с отсутствием корреляции в отдельных сканах.

Таким образом, следующим обработанным сеансом оказался RAES03BC, где при использовании оригинальной орбиты ИПМ-корреляция была найдена в пяти из шести сканов. Сеанс наблюдений проводился также 21 июля 2012 г. в промежуток времени 16:30:00-17:30:00 UTC на интерферометре «Радиоастрон»-Эффельсберг (Германия) с базой 3 диаметра Земли. Используемые радиодальномерные и доплеровские данные те же, что и для сеанса RAES03BB. При обработке с использованием как орбиты ИПМ, так и уточненной нами с использованием фильтра Калмана из 6 сканов корреляция не найдена только в 4-м, причем во всех остальных сканах наблюдалось достаточно устойчивое и хорошее отношение сигнал/шум. Результаты обработки сеанса представлены на рис. 4.

Из рис. 4, *а* видно, что с использованием фильтра Калмана удалось увеличить отношение сигнал/шум для всех 5 сканов (кроме 4-го) приблизительно на 14%. К сожалению, в 4-м скане корреляция так и не была обнаружена. С учетом того что отношение сигнал/шум, наблюдаемое в соседних сканах, достаточно высоко, а задержки до и после 4-го скана описываются гладкой функцией, можно судить о том, что во время наблюдения, соответствующее 4-му скану, произошел некий сбой в аппаратуре.

На рис. 4,  $\delta$  показан ход поправки к задержке для двух версий орбит на протяжении всего промежутка наблюдений. В результате уточнения орбиты поправка к задержке  $\Delta \tau$  уменьшилась на 6 мкс, что говорит об увеличении точности определения орбиты.

На рис. 5 для наглядности различия между уточненной орбитой и орбитой ИПМ представлено изменение со временем разности координат КРТ. Так как

$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \left( (X_{\text{Kahlm}} - X_{\text{IPM}})x + (Y_{\text{Kahlm}} - Y_{\text{IPM}})y + (Z_{\text{Kahlm}} - Z_{\text{IPM}})z \right),$$

где  $x = \cos \delta \cos \alpha$ ,  $y = \cos \delta \sin \alpha$ ,  $z = \sin \delta$  — компоненты единичного вектора направления на источник со склонением  $\delta$  и прямым восхождением  $\alpha$ , а разности координат КРТ, исходя из рисунка, лежат в пределах:

$$(X_{\text{Kahlm}} - X_{\text{IPM}}) = 2.5 \dots 3.0 \text{ km},$$
  
 $(Y_{\text{Kahlm}} - Y_{\text{IPM}}) = -2.5 \dots -2.0 \text{ km},$   
 $(Z_{\text{Kahlm}} - Z_{\text{IPM}}) \sim -1.3 \text{ km},$ 



Рис. 5. Поведение разности компонент X, Y, Z орбиты, вычисленной с помощью фильтра Калмана, и орбиты ИПМ, а также модуля разности геоцентрических радиусов-векторов аппарата для оригинальной и уточненной орбиты. Сеанс RAES03BC

то становится наглядным исправление задержки на 6 мкс, которая в эквиваленте поправки по положению КРТ составляет 1.8 км.

#### Заключение

В данной работе была использована фильтрация Калмана для уточнения координат КА «Спектр-Р» в проекте «Радиоастрон». Уточнение орбиты КА выполнялось с использованием радиодальномерных и доплеровских измерений.

Улучшение результатов при корреляции впервые было обнаружено при наблюдениях в *L*-диапазоне, который накладывает не слишком строгие ограничения по скорости и местоположению аппарата на орбите. Обработка данных была проведена и в *C*-диапазоне с более существенными ограничениями на точность определения координат и компонент скорости КА. Показано, что алгоритм дает положительный результат и в этом диапазоне. Практически во всех рассмотренных случаях (сеансах) улучшен показатель отношения сигнал/шум, с одновременным уменьшением задержки и остаточной частоты интерференции, что является уверенным подтверждением успешной работы алгоритма по уточнению орбиты КА.

Вопрос относительно ненайденной корреляции в тех сеансах, в которых она и не наблюдалась, остается открытым. Вероятно, причина в наблюдениях в C- и K-диапазонах, которые требуют гораздо более точного определения орбиты аппарата. Практика, однако, показала, что отсутствие корреляции также может как носить технический характер, так и являться следствием грубых результатов радиодальномерных измерений.

Авторы выражают благодарность коллективу отдела обработки астрофизических наблюдений АКЦ ФИАН: заведующему отделом С. Ф. Лихачеву, а также сотрудникам Ю.Н. Пономареву, А.С. Андрианову и А.Г. Рудницкому.

- Список литературы
- 1. Авдеев В.Ю., Алакоз А.В., Александров Ю.А. и др. // Вестн. НПО им. С.А. Лавочкина. 2012. **3**, № 14. С. 4.
- Кардашев Н.С., Хартов В.В., Абрамов В.В. и др. // Астрон. журнал. 2013. 90, № 3. С. 179.
- Кардашев Н.С., Алакоз А.В., Ковалев Ю.Ю. и др. // Вестн. НПО им. С. А. Лавочкина. 2014. 3, № 24. С. 4.
- Захваткин М.В. Определение и прогнозирование параметров движения космического аппарата с учетом возмущений, вызванных работой бортовых систем: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2013.
- 5. Андрианов А.С., Гирин И.А., Жаров В.Е. и др. // Вестн. НПО им. С. А. Лавочкина. 2014.**3**, № 24. С. 55.
- 6. *Montenbruck O., Gill E.* Satellite Orbits. Models, Methods, and Applications. B.; Heidelberg; N. Y., 2000.
- 7. *Petit G., Luzum B.* IERS Conventions; IERS Technical Note No. 36. IERS Conventional Centre, 2010.

- 8. Жаров В.Е. Основы радиоастрометрии. М., 2011.
- 9. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. СПб., 1997.
- Zarchan P. Fundamentals of Kalman Filtering A Practical Approach. Second Edition. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2005.
- 11. *Cunningham L.E.* // Celestial Mechanics. 1970. **2**. P. 207.
- Сажин М.В., Власов И.Ю., Сажина О.С., Турышев В.Г. // Астрон. журн. 2010, 87, № 11. С. 1043. (Sazhin M.V., Vlasov I.Yu., Sazhina O.S., Turyshev V.G. // Astronomy Reports. 2010. 64, N 11. P. 959.)
- Сейдж Э.П., Мелса Дж.Л. Идентификация систем управления. М., 1974. (Sage A.P., Melsa J.L. System Identification. N. Y.; L.: Academic Press, 1971.)
- 14. *Tapley B.D., Schutz B.E., Born G.H.* Statistical Orbit Determination. USA, 2004.
- Vallado D.A. Fundamentals of Astrodynamics and Applications. (College Custom Series.) The McGraw-Hill Companies, Inc., 1997.

# Improvement of the orbit of the Spektr-R spacecraft in the RadioAstron mission on the basis of radio range and Doppler measurements

# A. S. Zhamkov<sup>a</sup>, V. E. Zharov<sup>b</sup>

Department of Celestial Mechanics, Astrometry and Gravimetry, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: <sup>a</sup> zhamkov@physics.msu.ru, <sup>b</sup> vladzh2007@yandex.ru.

The first results of the improvement of the state vector of the Spektr-R spacecraft of the RadioAstron mission, which is a part of an earth-space radio interferometer, are presented. The state vector includes three components for the spacecraft position and three components for its velocity in the Geocentric Celestial Reference System. Kalman filtering on the basis of radio range and Doppler data allows refinement of the components at each iteration. It is shown that orbit improvement increases the accuracy of the orbit determined at the Keldysh Institute of Applied Mathematics.

*Keywords*: RadioAstron, Kalman filter, earth-space radio interferometer, correlation processing. PACS: 95.10.Eg.

Received 23 October 2015.

English version: Moscow University Physics Bulletin. 2016. 71, No. 3. Pp. 299–308.

#### Сведения об авторах

- 1. Жамков Александр Сергеевич аспирант; тел.: 8-967-109-14-41, e-mail: zhamkov@physics.msu.ru.
- 2. Жаров Владимир Евгеньевич доктор физ.-мат наук, зав. кафедрой, профессор; тел.: (495) 939-37-64, e-mail: vladzh2007@yandex.ru.