

О применении метода конечных элементов к задаче сочленения коаксиального и радиального волноводов

А. Л. Делицын

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: delitsyn@mail.ru

Статья поступила 11.03.2016, подписана в печать 05.05.2016.

Рассмотрено применение метода смешанных конечных элементов к задаче сочленения коаксиального и радиальных волноводов. Задача сводится к внутренней краевой задаче с нелокальными краевыми условиями. Проведено сравнение результатов вычислений, проведенных методом смешанных конечных элементов с формулой Отто в низкочастотном диапазоне.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, сочленение коаксиального и радиального волноводов, метод смешанных конечных элементов.

УДК: 517.95. PACS: 41.20.Jb.

Введение

Задача о сочленении коаксиального и радиальных волноводов вызывает интерес в теории антенн [1] и при анализе межслойных переходов в печатных платах. В низкочастотной области достаточно распространенным для вычисления характеристик полей является применение аналитической формулы Отто [1], дающей приближенное решение для определенного класса задач. Кроме того, (см., например, [2]) применялся метод связанных интегральных уравнений. В настоящей работе рассматривается применение метода смешанных конечных элементов [4], для определенных задач, на наш взгляд, более экономичного, чем метод интегральных уравнений. Для родственных задач волноводной дифракции различные варианты метода конечных элементов и конечных разностей применялись в большом количестве работ [5–11]. Для постановки внутренней краевой задачи использована возможность введения парциальных условий излучения в радиальном волноводе для случая аксиально-симметричных полей. Для коаксиала применяются стандартные парциальные условия излучения, введенные А. Г. Свешниковым [3]. Приводится сравнение результатов расчета входного импеданса с результатами, получаемыми по формуле Отто, и картины полей в межслойных переходах. Особенностью задачи является наличие бегущих волн при любых, сколь угодно низких частотах, как в коаксиальном, так и в радиальных волноводах.

1. Постановка задачи и метод ее решения

Задача о сочленении коаксиального и радиальных волноводов имеет геометрию, показанную на рис. 1, 2, на которых изображено сечение аксиально-симметричной области плоскостью, проходящей через ось z . Будем далее при постановке задачи рассматривать область, изображенную на рис. 1. Для области, соответствующей рис. 2, постановка задачи аналогична.

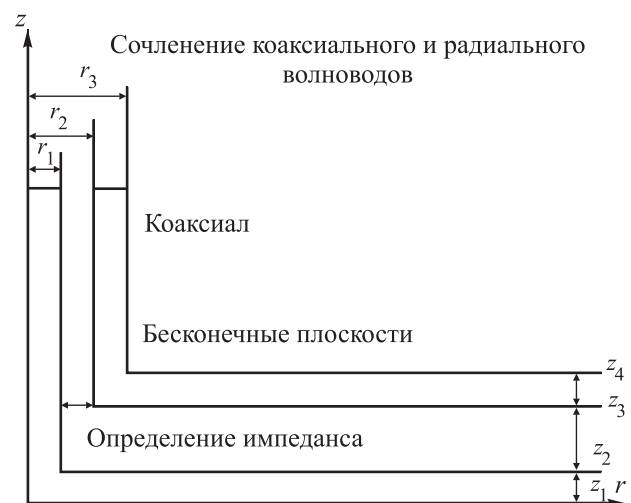


Рис. 1. Соединение коаксиального и радиального волноводов

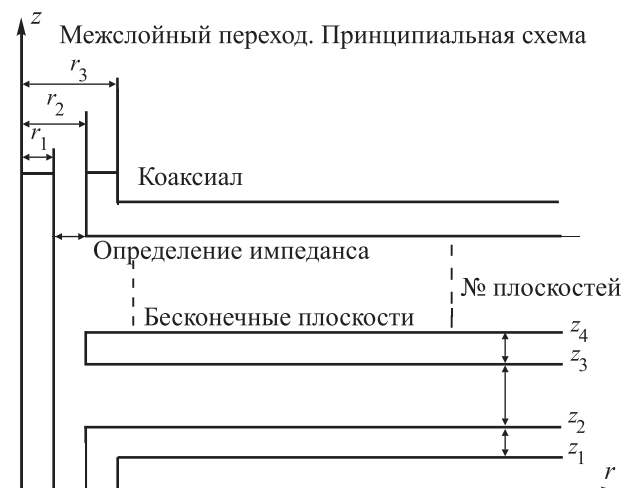


Рис. 2. Межслойный переход. Принципиальная схема

Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -ik\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} = -ik\epsilon\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\text{div } \epsilon\mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

в областях постоянства функции

$$\varepsilon = 1 + i \frac{4\pi}{kc} \sigma = 1 + i \frac{2\sigma}{f},$$

где σ — проводимость, f — частота.

На поверхностях разрыва ε , которые обозначим S , используем условия сопряжения

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_S = 0, \quad [\mathbf{H} \times \mathbf{n}]|_S = 0, \quad (3)$$

$$[\varepsilon \mathbf{E} \mathbf{n}]|_S = 0, \quad [\mathbf{H} \mathbf{n}]|_S = 0. \quad (4)$$

Считаем, что коаксиальный и радиальные волноводы переходят на некотором расстоянии от межслойного перехода в идеально проводящие. Это расстояние выбирается максимальным исходя из характеристик компьютера. Кроме того, считаем, что на внешней поверхности коаксиального и соответствующих радиальных волноводов дополнительно поставлены краевые условия, отвечающие идеально проводящим стенкам

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$$

таким образом, чтобы задача могла рассматриваться как ограниченная всюду, кроме коаксиальных и радиальных выходов. Например, для геометрии области, изображенной на рис. 1, условие, соответствующее идеально проводящей стенке, используется при $r = r_3$, $z_4 < z < \infty$ и $0 < r < \infty$, $z = z_1$. Подобное условие, необходимое для ограничения области, не оказывает влияния на результат в силу больших потерь в металле.

Сведем исходную задачу к задаче относительно электрического поля для уравнения

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - k^2 \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (6)$$

и условиями сопряжения

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_S = 0, \quad (7)$$

$$[\text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_S = 0, \quad (8)$$

на поверхностях раздела металл-воздух.

Уравнение

$$\text{div } \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (9)$$

и условия

$$[\varepsilon \mathbf{E} \mathbf{n}]|_S = 0 \quad (10)$$

являются следствиями предыдущих уравнений.

В дальнейшем рассматриваем аксиально-симметричные решения уравнения (5). Тогда, как известно [12], задача сводится к поиску только двух компонент поля E_r и E_z . Учитывая аксиальную симметрию задачи, заменяем в уравнении производные полей по координате ϕ на 0. Компонента поля E_ϕ равняется нулю. Для ненулевых компонент поля E_r , E_z уравнения имеют вид

$$-\frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r \partial z} - k^2 \varepsilon E_r = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E_z}{\partial r} - k^2 \varepsilon E_z = 0. \quad (12)$$

В силу того что при $r = 0$ величина rH_ϕ равняется нулю, будем при $r = 0$ использовать для вектора $\mathbf{E}$ краевое условие

$$r \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0. \quad (13)$$

Перейдем к формулировке условий излучения и возбуждения. По идеально проводящему коаксиалу на волноводное сочленение из бесконечности падает ТЕМ-волна, что приводит к условию

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-ikz} + c \mathbf{E}_0 e^{ikz} + \tilde{\mathbf{E}}, \quad z > z_2, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{\ln(r_2/r_1)}} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r, \quad \|E_0\|_{L_2[r_1, r_2]} = 1.$$

Поле $\tilde{\mathbf{E}}$ убывает экспоненциально вдоль оси z .

Учитывая вид решения в коаксиале, будем использовать краевое условие, эквивалентное представлению поля в виде падающей и отраженной волн

$$[\text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_{z=z_0} = T\mathbf{E} + 2ik\mathbf{E}_0, \quad (15)$$

где

$$T\mathbf{E} = ik \int_{r_1}^{r_2} r \mathbf{E} \mathbf{E}_0^* dr \mathbf{E}_0,$$

т.е. парциальное условие излучения [3], использующее всего одну моду.

Краевое условие мы используем на максимальном возможном расстоянии от z_4 , на котором влиянием $\tilde{\mathbf{E}}$, экспоненциально быстро убывающим по z при рассматриваемых в работе частотах 1 МГц — 10 ГГц и параметрах волноводов, приведенных на рис. 1, можно полностью пренебречь.

Остается вопрос об условиях излучения в радиальном волноводе, т.е. между бесконечных пластин. Учитывая, что в области между бесконечных идеально проводящих пластин поле $\mathbf{E}$ удовлетворяет уравнению

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0, \quad (16)$$

приходим к представлению электрического поля в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \chi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \chi \mathbf{e}_z,$$

где χ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \chi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi + k^2 \chi = 0,$$

граничным условиям

$$\frac{\partial}{\partial z} \chi \Big|_{z=z_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \chi \Big|_{z=z_3} = 0$$

и условию излучения

$$\frac{\partial}{\partial r} \chi - ik\chi = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Функция χ представима в виде

$$\chi = c_0 H_1^{(1)}(kr) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{\pi n}{z_3 - z_2} (z - z_2) K_1 \left(\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{(z_3 - z_2)^2} - k^2} \cdot r \right).$$

Пренебрегаем экспоненциально убывающими полями, которые при указанных частотах и параметрах системы убывают достаточно быстро. Исключая неизвестную константу c_0 , приходим к условию, при некотором по возможности большем r_0 , связывающему $\text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ и $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$:

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{H_1^{(1)}(kr_1)}{H_0^{(1)}(kr_1)} k \frac{r_0}{z_3 - z_2} \int_{z_2}^{z_3} E_z dz. \quad (17)$$

Итак, условия возбуждения и излучения имеют вид

$$[\text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_{z=z_0} - T\mathbf{E} = 2ik\mathbf{E}_0, \quad (18)$$

где $T\mathbf{E} = ik \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \mathbf{E}_0^* dr \mathbf{E}_0$,

$$[\text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_{r=r_0} = S\mathbf{E}, \quad (19)$$

где $S\mathbf{E} = \frac{H_1^{(1)}(kr_1)}{H_0^{(1)}(kr_1)} k \frac{r_0}{z_3 - z_2} \int_{z_2}^{z_3} E_z dz$.

Слабые решения задачи (5)–(10), (13), (15), (17) определяются из уравнения

$$\int_{\Omega} \left(\text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \tilde{\mathbf{E}} - k^2 \varepsilon \mathbf{E} \tilde{\mathbf{E}} \right) r dr dz - \int_{r_1}^{r_2} T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{E}} dr + \int_{z_2}^{z_3} S \mathbf{E} \tilde{\mathbf{E}} dz = 2ik \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \mathbf{E}_0 dr, \quad (20)$$

которому должен удовлетворять вектор $\mathbf{E} \in H_0(\text{rot})$, т. е. $\mathbf{E} \in L_2(\Omega)$, $\text{rot } \mathbf{E} \in L_2(\Omega)$, $\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ для любого $\tilde{\mathbf{E}} \in H_0(\text{rot})$.

Условие

$$\text{div } \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (21)$$

выполняется для решения в слабом смысле. Для любого $\tilde{\mathbf{E}} = \text{grad } \varphi$, $\varphi \in H_0^1$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \text{ grad } \varphi r dr dz = 0. \quad (22)$$

Легко видеть, что для магнитного поля отлична от нуля только H_ϕ -компонента. Ненулевая компонента магнитного поля H_ϕ -определяется из уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\phi = -ik\varepsilon(r, z) E_z \quad (23)$$

с учетом

$$H_\phi(0, z) = 0.$$

Магнитное поле находится интегрированием

$$H_\phi = -\frac{ik}{r} \int_0^r r \varepsilon(r, z) E_z dr.$$

В качестве величины, определяемой полями, рассмотрим импеданс, вычисляемый при $z = z_3$:

$$Z = \frac{\int_{r_1}^{r_2} E_r dr}{I}, \quad I = 2\pi\sigma \int_0^{r_1} r E_z dr.$$

Приведем типовые значения параметров межслойного перехода. Радиус возбуждающего цилиндра $r_1 = 0.125$ мм. Внутренний радиус внешнего цилиндра коаксиала равен радиусу отверстия $r_2 = 0.25$ мм. Внешний радиус коаксиала $r_3 = 0.375$ мм. Расстояние между пластинами $h = 0.2$ мм.

2. Применение метода смешанных конечных элементов

Будем применять метод смешанных конечных элементов [4] для решения задачи (13). Введем сетку r_i , $i = 1, \dots, N_r$, по оси r и z_j , $j = 1, \dots, N_z$, по оси z .

Для аппроксимации E_r, E_z будем применять функции, непрерывные в направлении одной из осей координат и разрывные в направлении другой.

Для аппроксимации E_r применяем функции $N_i(z)p_{j,j+1}(r)$, где

$$N_i(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}, & z_{i-1} \leq z \leq z_i, \\ \frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i}, & z_i \leq z \leq z_{i+1}, \\ 0, & z \notin [z_{i-1}, z_{i+1}], \end{cases}$$

$$p_{j,j+1}(r) = \begin{cases} 1, & r_j \leq r \leq r_{j+1}, \\ 0, & r \notin [r_j, r_{j+1}]. \end{cases}$$

Для аппроксимации E_z применяем $N_i(r)p_{j,j+1}(z)$. Будем искать приближенное решение задачи (13) в виде

$$E_r = \sum_{ij} E_{rij} N_i(z) p_{j,j+1}(r), \quad E_z = \sum_{ij} E_{zij} N_i(r) p_{j,j+1}(z).$$

Условие соленоидальности поля $\mathbf{E}$ учитывается следующим образом. Пусть

$$\tilde{\mathbf{E}} = \text{grad } N_i(r) N_j(z),$$

где i, j — произвольный узел сетки. Тогда решение задачи удовлетворяет уравнению

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \text{ grad } N_i(r) N_j(z) r dr dz = 0. \quad (24)$$

3. Результаты тестирования и некоторые примеры вычислений

Для тестирования сравним результаты конечно-элементного метода с аналитической формулой Отто. Отто получил приближенную формулу для величины, обратной импедансу $Y = 1/Z$:

$$Y = -\frac{2\pi i}{Z_0 k h (\ln(r_2/r_1))^2} \left(\ln(r_2/r_1) + \frac{\pi}{2} \frac{H_0^{(1)}(kr_2)}{H_0^{(1)}(kr_1)} \{J_0(kr_2)Y_0(kr_1) - J_0(kr_1)Y_0(kr_2)\} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{q_m^2} \left\{ \ln(r_2/r_1) + \frac{K_0(q_m k r_2)}{K_0(q_m k r_1)} (J_0(q_m k r_1)K_0(q_m k r_2) - J_0(q_m k r_2)K_0(q_m k r_1)) \right\} \right),$$

$$h = z_3 - z_2, \quad q_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{kh}\right)^2 - 1}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

Используем следующие параметры для коаксиала

$$r_1 = 0.125 \text{ мм}, \quad r_2 = 0.25 \text{ мм}, \quad r_3 = 0.375 \text{ мм}.$$

Расстояние между пластинами $h = z_3 - z_2 = 0.175 \text{ мм}$. Толщина пластин: $z_2 - z_1 = 0.025 \text{ мм}$,

$z_4 - z_3 = 0.025 \text{ мм}$. Отто предполагал, что $\sigma = \infty$. Мы считаем, что проводимость металла равна ($\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{ 1/с}$ в CGS).

Проведем сравнение результатов вычислений методом конечных элементов с формулой Отто при измельчении сетки от 4 до 32 элементов на воз-

Таблица 1

Импеданс перехода коаксиал — радиальный волновод
(4 элемента на возбуждающий цилиндр по оси r)

f , Гц	$ \text{Re } Z $, Ом	$ \text{Im } Z $, Ом	$ \text{Re } Z $, Ом	$ \text{Im } Z $, Ом
	Вычисленное МКЭ	Вычисленное МКЭ	Вычисленное по формуле Отто	Вычисленное по формуле Отто
10^{10}	3.459	8.361	3.442	8.250
10^9	0.350	1.345	0.345	1.332
10^8	0.0359	0.186	0.0345	0.184
10^7	0.00388	0.0239	0.00345	0.0234
10^6	0.000589	0.00294	0.000345	0.00285

Таблица 2

Импеданс перехода коаксиал — радиальный волновод
(16 элементов на возбуждающий цилиндр по оси r)

f , Гц	$ \text{Re } Z $, Ом	$ \text{Im } Z $, Ом	$ \text{Re } Z $, Ом	$ \text{Im } Z $, Ом
	Вычисленное МКЭ	Вычисленное МКЭ	Вычисленное по формуле Отто	Вычисленное по формуле Отто
10^{10}	3.459	8.364	3.442	8.250
10^9	0.350	1.345	0.345	1.332
10^8	0.0359	0.186	0.0345	0.184
10^7	0.00389	0.0239	0.00345	0.0234
10^6	0.000599	0.00294	0.000345	0.00285

Таблица 3

Импеданс перехода коаксиал — радиальный волновод
(32 элемента на возбуждающий цилиндр по оси r)

f , Гц	$ \text{Re } Z $, Ом	$ \text{Im } Z $, Ом	$ \text{Re } Z $, Ом	$ \text{Im } Z $, Ом
	Вычисленное МКЭ	Вычисленное МКЭ	Вычисленное по формуле Отто	Вычисленное по формуле Отто
10^{10}	3.459	8.365	3.442	8.250
10^9	0.350	1.346	0.345	1.332
10^8	0.0359	0.186	0.0345	0.184
10^7	0.00389	0.0239	0.00345	0.0234
10^6	0.000604	0.00294	0.000345	0.00285

Таблица 4

Зависимость Z от σ при $f = 10^6 \text{ Гц}$

σ , 1/с	$ \text{Re } Z $, Ом	$ \text{Im } Z $, Ом	$ \text{Re } Z $, Ом	$ \text{Im } Z $, Ом
	Вычисленное МКЭ	Вычисленное МКЭ	Вычисленное по формуле Отто	Вычисленное по формуле Отто
$5 \cdot 10^{17}$	0.000604	0.00294	0.000345	0.00285
10^{18}	0.000488	0.00293	0.000345	0.00285
$5 \cdot 10^{18}$	0.000389	0.000290	0.000345	0.00285
$5 \cdot 10^{21}$	0.000346	0.00286	0.000345	0.00285

буждающий цилиндр по оси r (табл. 1–3). Диапазон частот, в котором производится сравнение, — 1 МГц — 10 ГГц. Сходимость метода конечных элементов имеет место. Видно соответствие в пределах 3% между результатами, полученными разными методами.

Последние строки табл. 1–3 при частоте $f = 10^6$ Гц показывают как будто значительное расхождение результатов, полученных методом конечных элементов с формулой Отто. Это расхождение связано с тем, что результаты Отто получены для идеально проводящего металла ($\sigma = \infty$). Поэтому для частот, при которых проникновение поля в металл значительно, наблюдается различие результатов вычислений с формулой Отто. При увеличении σ сходимость конечно-элементных вычислений к результатам, полученным по формуле Отто, см. в табл. 4.

Приведем пример вычисления межслойного перехода (рис. 2) с 12 бесконечными пластинами. В табл. 5, 6 показано установление результатов при увеличении числа элементов.

Таблица 5
Импедансы, вычисленные методом конечных элементов для перехода, изображенного на рис. 2
(4 элемента на возбуждающий цилиндр (в направлении оси r))

f , Гц	$ Re Z $, Ом	$ Im Z $, Ом
	Вычисленное МКЭ	Вычисленное МКЭ
10^{10}	137.97	26.682
10^9	46.114	13.079
10^8	41.992	1.889
10^7	41.631	0.248
10^6	41.594	0.0308

Таблица 6
Импедансы, вычисленные методом конечных элементов для перехода, изображенного на рис. 2
(32 элемента на возбуждающий цилиндр (в направлении оси r))

f , Гц	$ Re Z $, Ом	$ Im Z $, Ом
	Вычисленное МКЭ	Вычисленное МКЭ
10^{10}	138.110	27.379
10^9	46.107	13.102
10^8	41.992	1.891
10^7	41.631	0.248
10^6	41.594	0.0300

На рис. 3–5 показаны картины волновых полей для E_z , E_r и H_ϕ , соответствующие сочленению коаксиального и радиального волноводов (рис. 1).

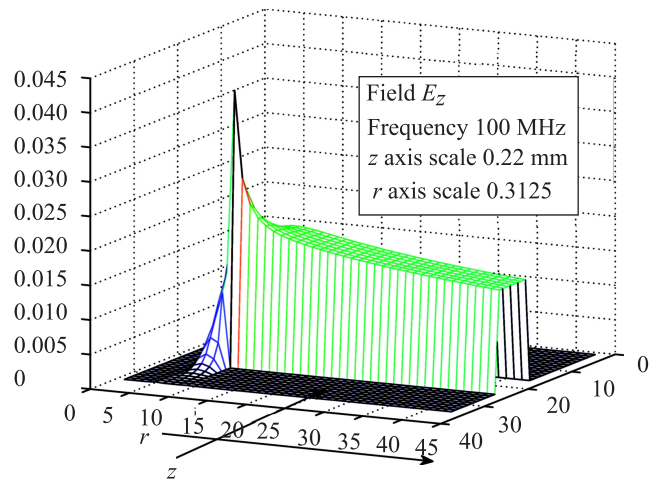


Рис. 3. E_z -координата поля в соединении коаксиального и радиального волноводов

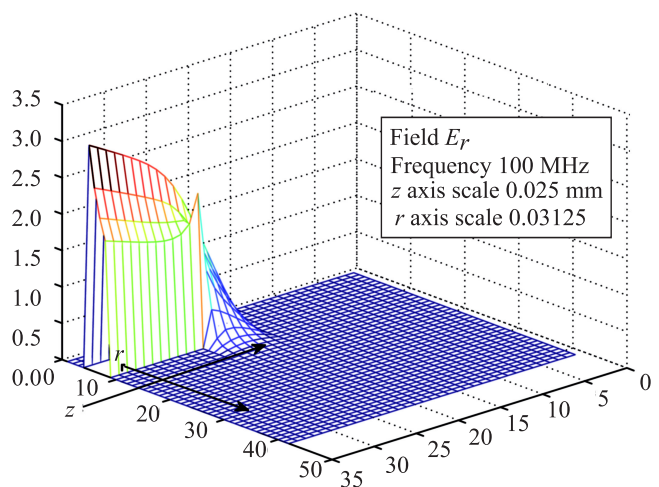


Рис. 4. E_r -координата поля в соединении коаксиального и радиального волноводов

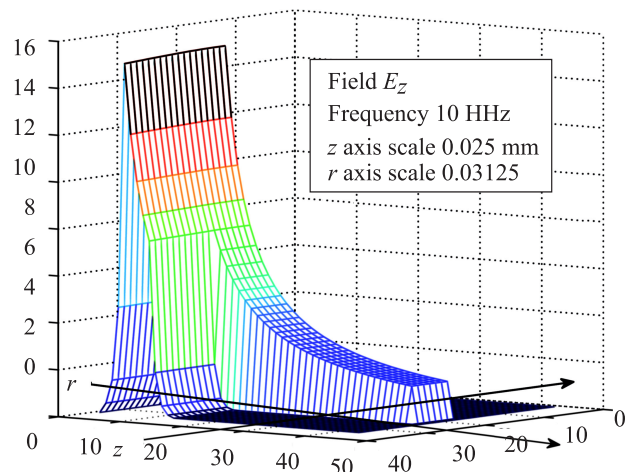


Рис. 5. H_ϕ -координата поля в соединении коаксиального и радиального волноводов

На рис. 6, 7 представлены E_r - и H_ϕ -компоненты поля для межслойного перехода (рис. 2) для случая трех бесконечных пластин.

Данные рисунки имеют главным образом иллюстративный характер, показывая возможности

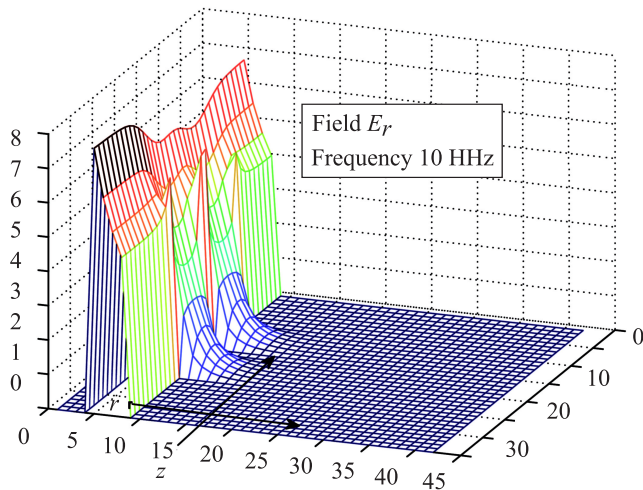


Рис. 6. E_r -координата поля в межслойном переходе

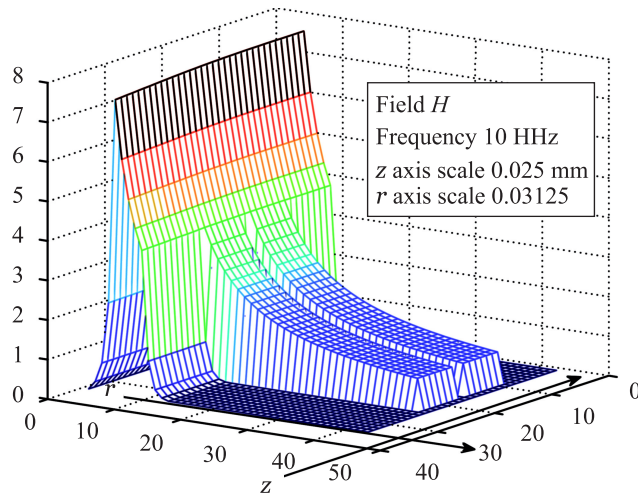


Рис. 7. H_ϕ -координата поля в межслойном переходе

метода конечных элементов для описания электромагнитных полей. Они демонстрируют качественно правильное вычисление полей, в том числе показывают всплески на ребрах металлов.

Finite-element methods for junction problems for coaxial and radial waveguides

A. L. Delitsyn

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow 119991, Russia.

E-mail: delitsyn@mail.ru.

We apply the method of mixed finite elements to the junction problem for coaxial and radial waveguides. The problem is reduced to an internal boundary-value problem with nonlocal boundary-value conditions. In the low-frequency range, we compare the results of the finite-element method with the Otto relationship.

Keywords: Maxwell equations, junctions of coaxial and radial waveguides, the method of mixed finite elements.

PACS: 41.20.Jb.

Received 11 March 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 4. Pp. 368–374.

Заключение

Представленные результаты конечно-элементных вычислений показывают большие возможности этого метода для определения характеристик межслойных переходов и высокую точность получаемых результатов. Принципиальная возможность сводить задачу в бесконечной области специального вида к задаче в конечной области с нелокальными краевыми условиями дает возможность рассматривать как задачи, охватываемые методом интегральных уравнений, так и более широкие классы задач с переменными характеристиками диэлектриков, заполняющих межслойные переходы.

Список литературы

1. Otto D.V. // *Radio Science*. 1967. **2**, N 9. P. 1031.
2. Yung E.K.N., Xie Z.M., Chen R.S., Han Y.F. // *Radio Science*. 1999. **34**, N 3. P. 615.
3. Ильинский А.С., Крайцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. школа, 1991.
4. Handbook of Numerical Analysis. Vol. 2 / Ed. by P. G. Ciarlet, J. L. Lions. Elsevier, 1991.
5. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н. // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 1974. **14**, № 4. С. 947.
6. Боголюбов А.Н., Буткарев И.А. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 2003. № 4. С. 6.
7. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Лавренова А.В. // *Радиотехника*. 2004. № 12. С. 20.
8. Боголюбов А.Н., Буткарев И.А., Минаев Д.В. // *Радиотехника и электроника* 2005. **50**, № 2. С. 140.
9. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Буткарев И.А. // *Радиотехника и электроника*. 2006. **51**, № 8. С. 901.
10. Ho T.Q., Beker B. // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 1991. **39**, N 6. P. 1021.
11. Ise K., Inoue K., Koshiba M. // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 1990. **38**, N 9. P. 1032.
12. Рамо С., Уинери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике. М.: ОГИЗ, 1948.

Сведения об авторе

Делицын Андрей Леонидович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел: (495) 939-39-37, e-mail: delitsyn@mail.ru.