ФИЗИКА ЗЕМЛИ, АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

Теоретические и экспериментальные исследования границ раздела двух несмешивающихся жидкостей в вихревом течении со свободной поверхностью

Т. О. Чаплина[1,2,a], А. В. Кистович[2,b], Е. В. Степанова[2]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики моря и вод суши. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН. Россия, 119526, Москва, пр. Вернадского, д. 101, к. 1.*
E-mail: [a] *chaplina_to@inbox.ru*, [b] *kavmendeleevo@mail.ru*

Статья поступила 23.11.2015, подписана в печать 16.03.2016.

Рассмотрено аналитическое представление формы поверхностей раздела фаз для составного вихря, образованного закручиванием в цилиндрическом контейнере фиксированного количества воды, с заданным объемом легкой несмешивающейся примеси на ее поверхности. В экспериментальной установке возникает вихревая структура, состоящая из воронки в центре контейнера и масляного тела внутри нее. В предположении осесимметричности задачи впервые получены точные аналитические выражения, характеризующие форму границ раздела фаз, проведено сравнение с экспериментальными данными, полученными в оригинальных экспериментах. Показано, что рассчитанная и измеренная формы поверхностей раздела удовлетворительно согласуются между собой. Сформулированы требования к методике проведения экспериментальных исследований формы масляного тела в составном вихре и ее устойчивости в зависимости от управляющих параметров задачи.

Ключевые слова: составной вихрь, примесь, свободная поверхность, граница раздела фаз, точное решение.

УДК: 551.46. PACS: 92.05.Bc.

Введение

Вихревые течения составляют существенную часть процессов, которые обусловливают динамику течений в природных водоемах, их свойства используются в технических устройствах. В основе изучения вихревых течений лежат экспериментальные исследования, численное и лабораторное моделирование таких потоков преимущественно осуществляется в замкнутой цилиндрической геометрии [1]. При этом одним из удобных способов наблюдения за распределением физических характеристик в вихре может служить свободная поверхность течения. Форма поверхности легко определяется, когда жидкость приведена в режим твердотельного вращения. Однако такой тип течения наблюдается далеко не всегда, простейшим примером чему выступает вихрь Рэнкина [2]. Еще более сложное течение реализуется в случае вращения жидкой среды, состоящей из двух несмешивающихся компонент [3].

Интерес к изучению динамики многофазных и многокомпонентных сред стимулируется проблемами экологии и в условиях роста объема производства и транспортировки инертных, а также химически и биологически активных веществ. Изучение переноса веществ в компактных вихрях также необходимо для оптимизации конструкции и условий эксплуатации экономичных и высокопроизводительных промышленных установок [4].

В последние годы измерения в промышленных установках и расчеты переноса вещества в многослойных вихрях дополняются лабораторными исследованиями вида каверны в чистой жидкости. Осесимметричная каверна при высоких угловых скоростях вращения установленного в толще жидкости диска приобретает угловатую форму, отражающую изменение симметрии поля скорости в толще жидкости [5, 6]. В большом числе опытов используется диск, расположенный на поверхности жидкости [7].

В экспериментах, выполненных в последние годы, установлено, что форма поверхности раздела в многослойных жидкостях зависит от многих факторов: свойств сред, размеров контейнера, угловой скорости вращения и положения индуктора [8]. Небольшое количество масла на свободной поверхности составного вихря, создаваемого вращающимся на дне контейнера диском, как и растворимая краска, расщепляется на отдельные спиральные рукава, ориентированные навстречу основному течению, в то время как в толще вращающейся жидкости легкая несмешивающаяся примесь собирается в компактное тело в окрестности оси вращения [9]. В двухслойной жидкости с активатором, вращающимся с умеренными угловыми скоростями в лежащем выше слое масла, выделен ряд характерных форм масляного тела — холм, остроконечный пик, сглаженный пик (Фудзияма), колокол [10].

При больших угловых скоростях вращения жидкости, когда поверхностная каверна в чистой жидкости деформируется короткими спиральными и длинными инерциальными волнами [11], на границе раздела «примесь–вода» наблюдаются аналогичные периодические возмущения. Образующийся при этом вихрь оказывается как бы составленным из нескольких областей, характеристики течения в каждой из которых существенно разнятся. В режимах интенсивного течения на свободной поверхности такого вихря наблюдаются разнородные возмущения, описание которых представляет собой весьма сложную задачу. В то же время наблюдения показывают, что свободную поверхность такого сложного вихря можно условно представить в виде суммы цилиндрически симметричной поверхности вращения и нормальных отклонений от этой поверхности, наложенных на нее.

В настоящей работе рассматривается вопрос об определении формы нулевого приближения для поверхности составного вихря, образованного вращением внутри цилиндрического контейнера известного количества воды, с заданным объемом легкой несмешивающейся примеси на ее поверхности.

1. Экспериментальная установка и параметры течения

Вихревое течение создавалось вращающимся диском, установленным на дне прозрачного цилиндрического контейнера. Подробное описание установки и схема эксперимента приведены в [12]. Перед началом экспериментов бассейн заполняется водой, несмешивающаяся примесь заданного объема предварительно помещается на свободную поверхность покоящейся воды, затем индуктор приводится во вращение и регистрируется картина течения.

В простом по геометрии эксперименте возникало достаточно сложное течение, включающее как вихревую, так и волновые компоненты и в толще, и на свободной поверхности жидкости (рис. 1).

Наблюдаемую картину течения можно схематично свести к комбинации двух вихрей, один из которых вертикальный цилиндрический (вокруг вертикальной оси), а другой — тороидальный, с кру-

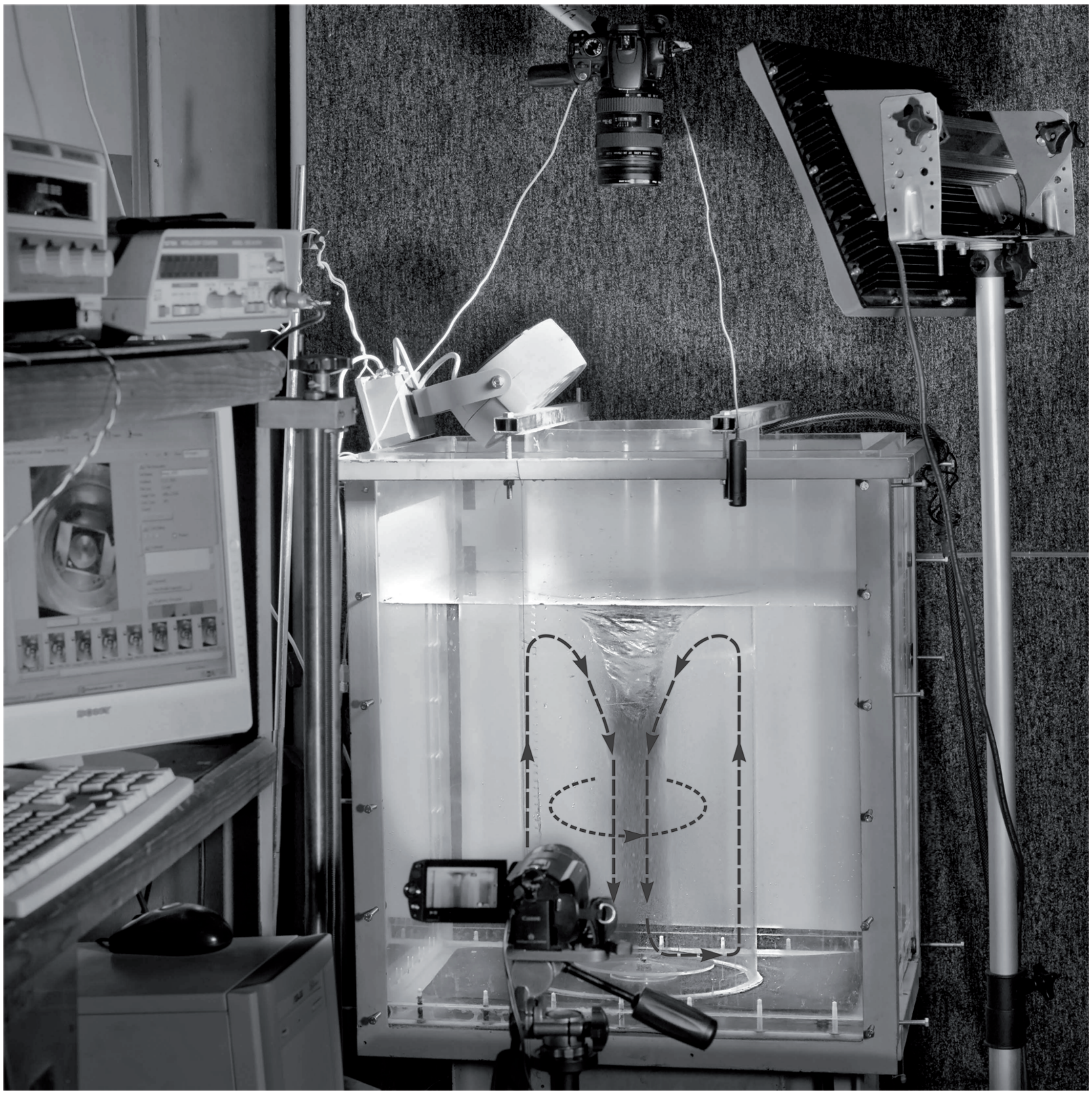

Рис. 1. Экспериментальная установка и схема течения

говой осью, охватывающей центральную вертикальную ось (см. рис. 1). В результате их совместного действия формируется сложное течение, в котором частицы жидкости движутся по спиральным и винтовым траекториям.

Картина течения зависит как от геометрии эксперимента: радиусов контейнера R и диска-активатора r_D, частоты ω вращения индуктора, толщин слоев невозмущенных жидкостей — полной H_t, слоя воды H_w и примеси H_o, так и от свойств использованных жидкостей (характеристики приведены в [12]): плотностей воды ρ_w и примеси ρ_o, кинематических вязкостей ν_w, ν_o, коэффициентов поверхностного натяжения на границах «вода–воздух» σ_{wa}, «примесь–вода» σ_{wo} и «примесь–воздух» σ_{oa}.

В качестве альтернативы размерным параметрам течение можно характеризовать набором безразмерных параметров геометрической и динамической природы. В первую группу входят отношения радиуса и высоты контейнера $\xi_H = r_D/H_t$, коэффициент перекрытия дна бассейна вращающимся диском $\xi_0 = r_D/R$. К динамическим параметрам относятся числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = (r_D^2\omega)/\nu_w$, Фруда $\mathrm{Fr} = (r_D^2\omega^2)/gH_w$, Вебера $\mathrm{We} = \rho_w H_o^3\omega^2/\sigma_{wo}$ для нижнего слоя воды и дополнительные, характерные для двухслойной среды (примесь–вода) числа Бонда $\mathrm{Bo} = gH^2(\rho_w - \rho_o)/\sigma_{wo}$ и Атвуда $A = (\rho_w - \rho_o)/(\rho_w + \rho_o)$.

Исследования формы границы раздела фаз в составном вихре без примесей показали, что при невысоких частотах вращения диска-активатора ($\omega < \sqrt{g/2H_w}$) аналитическое выражение для формы свободной поверхности с хорошей точностью совпадает с экспериментальными данными [13]. Однако при увеличении интенсивности вихревого течения ($\omega > \sqrt{g/r_D}$) экспериментальные и аналитические формы каверн различаются в связи с появлением на поверхности течения периодических возмущений в виде инерциальных и спиральных волн различной амплитуды.

В экспериментах с несмешивающейся примесью в качестве добавки использовались нефть, дизельное топливо, подсолнечное и касторовые масла. В дальнейшем для обозначения несмешивающейся добавки в основную рабочую среду будет использоваться слово «примесь».

2. Аналитическое представление формы границ раздела фаз

Исходное и конечное состояния и система координат двухкомпонентной жидкости «примесь–вода» приведены на рис. 2.

В начальном состоянии объемы воды $V_w = \pi R^2 H$ и примеси V_o задаются и считаются неизменными во всех состояниях системы. Плотности воды ρ_w и масла ρ_o постоянны во все время процесса. В неподвижном начальном состоянии S_1, S_2 и S_o — поверхности раздела «вода–воздух», «примесь–вода» и «примесь–воздух» соответственно.

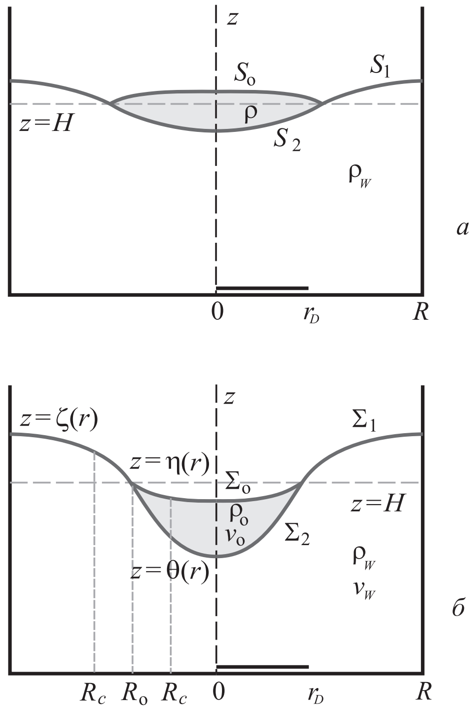

Рис. 2. Исходное (*а*) и конечное (*б*) состояния системы двухкомпонентной жидкости «примесь–вода»

При описании составного вихря делаются следующие предположения. Объемы и плотности воды V_w, ρ_w и масла V_o, ρ_o считаются заданными величинами, неизменными во всех состояниях системы. Символами Σ_{wa}, Σ_{wo} и Σ_{oa} обозначаются поверхности раздела «вода–воздух», «примесь–вода» и «примесь–воздух» соответственно.

Задача рассматривается в цилиндрической системе координат, вертикальная ось z которой направлена против вектора гравитационного ускорения g, а начало совпадает с центром вращающегося диска. Система гидродинамических уравнений, описывающих движение, имеет вид

$$v_t' + (v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta v + g, \quad \nabla\cdot v = 0. \qquad (1)$$

Под величинами v, ρ, ν понимаются скорость v_w, плотность ρ_w и кинематическая вязкость воды ν_w в области, занимаемой водой, или скорость v_o, плотность ρ_o и кинематическая вязкость примеси ν_o в области, занимаемой примесью.

На твердых поверхностях выполняются условия прилипания

$$v_w\big|_{r=R} = v_w\big|_{z=0,\, r\in[r_D,R]} = 0, \quad v_w\big|_{z=0,\, r\in[0,r_D]} = r\omega e_\phi. \qquad (2)$$

Здесь r_D, R — радиусы вращающегося диска и контейнера соответственно, ω — угловая частота вращения диска, e_ϕ — азимутальный орт цилиндрической системы координат.

На поверхностях раздела Σ_{ij} выполняются динамические

$$(p_1 - p_2)n_i = \left(\sigma'^{(1)}_{ik} - \sigma'^{(2)}_{ik}\right) n_k + \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) n_i \qquad (3)$$

и кинематические

$$\left.\frac{d\Sigma_{ij}}{dt}\right|_{\Sigma_{ij}=0}=0 \qquad (4)$$

граничные условия. Здесь n — единичная нормаль; σ — коэффициент поверхностного натяжения; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны. Все эти величины относятся к соответствующей поверхности раздела. Символы p_1, p_2 обозначают давления по разные стороны от выбранной поверхности, а $\sigma'^{(1,2)}_{ik}$ — тензоры вязких напряжений соприкасающихся сред.

Система соотношений (1)–(4) чрезвычайно сложна для анализа и ее точное решение на данный момент не достигнуто. В то же время имеется возможность построить осесимметричное решение для форм поверхностей раздела контактирующих сред, в котором все физические поля вблизи этих поверхностей не зависят ни от времени, ни от азимутальной координаты ϕ. В рамках этого приближения считается, что $v_w=v_w e_\phi$, $v_o=v_o e_\phi$; эффекты поверхностного натяжения считаются малыми и не принимаются во внимание. Поверхности раздела задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \Sigma_{wa}&:\ z-\zeta(r)=0, \quad r\in[R_o,R],\\ \Sigma_{wo}&:\ z-\theta(r)=0, \quad r\in[0,R_o],\\ \Sigma_{oa}&:\ z-\eta(r)=0, \quad r\in[0,R_o]. \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь R_o — радиальная координата точки тройного контакта вода–примесь–воздух, как показано на рис. 2.

В результате система (1) приобретает вид

$$p'_r=\rho\frac{\mathrm{v}^2}{r},\quad p'_z=-\rho g,\quad v''_{rr}+\frac{v'_r}{r}-\frac{v}{r^2}+v''_{zz}=0, \qquad (6)$$

причем условие несжимаемости $\nabla\cdot v=0$ тождественно удовлетворяется.

Представление давления в различных областях пространства в формах

$$p_w^{(1)}=p_a+\rho_w g(\zeta-z)+q_w^{(1)}(r,z), \quad r\in[R_o,R], \qquad (7)$$

$$p_o=p_a+\rho_o g(\eta-z)+q_o(r,z), \quad r\in[0,R_o], \qquad (8)$$

$$p_w^{(2)}=p_a+\rho_o g(\eta-\theta)+\rho_w g(\theta-z)+q_w^{(2)}(r,z), \quad r\in[0,R_o], \qquad (9)$$

где p_a — атмосферное давление, и подстановка (7)–(9) в (6) и граничные условия (3), (4) позволяет сформировать два возможных решения для поля скорости.

Последовательная подстановка (7)–(9) во второе уравнение системы (6) показывает, что $\frac{\partial q_w^{(1)}}{\partial z}=\frac{\partial q_w^{(2)}}{\partial z}=\frac{\partial q_o}{\partial z}=0$. Тогда из первого уравнения системы (6) следует, что в рассматриваемом приближении все поля скорости не зависят от вертикальной компоненты и удовлетворяют уравнению

$$v''_{rr}+\frac{v'_r}{r}-\frac{v}{r^2}=0.$$

Решение этого уравнения всегда представимо в виде совокупности твердотельного вращения с радиусом R_c (при этом скорость среды линейно растет с радиальной координатой) и вращением вне ядра, когда скорость обратно пропорциональна радиальной координате точки наблюдения. В том случае, когда радиус R_c твердотельного вращения меньше R_o, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v_o&=A_o r\vartheta(R_c-r)+\frac{B_o}{r}\vartheta(r-R_c), && r\in[0,R_o],\\ v_w^{(2)}&=A_2 r\vartheta(R_c-r)+\frac{B_2}{r}\vartheta(r-R_c), && r\in[0,R_o],\\ v_w^{(1)}&=\frac{B_1}{r}, && r\in[R_o,R], \end{aligned} \qquad (10)$$

где $\vartheta(x)$ — функция Хевисайда.

Если радиус R_c твердотельного вращения больше R_o, имеет место

$$\begin{aligned} v_o&=A_o r, && r\in[0,R_o],\\ v_w^{(2)}&=A_2 r, && r\in[0,R_o],\\ v_w^{(1)}&=A_1 r\vartheta(R_c-r)+\frac{B_1}{r}\vartheta(r-R_c), && r\in[R_o,R]. \end{aligned} \qquad (11)$$

Подстановка (7)–(9) в динамические граничные условия (3) при пренебрежении вклада в давление слабоинтенсивного вязкого приповерхностного пограничного слоя приводит к соотношениям $\left.q_w^{(1)}\right|_{z=\zeta(r)}=0$, $\left.q_w^{(2)}\right|_{z=\theta(r)}=0$, $\left.q_o\right|_{z=\eta(r)}=0$, которые с учетом независимости величин $q_w^{(1,2)}$ и q_o от вертикальной координаты z позволят положить эти величины равными нулю.

Из условия равенства тангенциальных напряжений на границе «вода–примесь» следует связь, общая для соотношений (10), (11):

$$v_w^{(2)}=\alpha v_o,\quad \alpha=\kappa\frac{\rho_o\nu_o}{\rho_w\nu_w}, \qquad (12)$$

где κ — некоторый коэффициент, величина которого зависит от свойств поверхности контакта «вода–примесь». Справедливость этого соотношения ограничена применимостью жидкой модели примеси, а именно как среды, в которой отсутствуют упругие касательные напряжения и имеется лишь одна характеристика — кинематическая вязкость. Возможно, что более строгий подход потребует для описания свойств примеси привлечения модели бингамовской среды. И наконец, из первого уравнения системы (6) следует, что формы поверхностей раздела определяются на основе уравнений

$$\begin{aligned} v_o^2=gr\eta'_r,\quad {v_w^{(1)}}^2=gr\zeta'_r,\\ {v_w^{(2)}}^2=gr\left(\frac{\rho_o}{\rho_w}\left(\eta'_r-\theta'_r\right)+\theta'_r\right). \end{aligned} \qquad (13)$$

Для определения постоянных A_o, B_o, A_1 и т. д., входящих в выражения (10), (11), необходимо использовать набор естественных условий, состоящих в том, что в точке контакта $r=R_o$ имеет место

$$\eta(R_o)=\theta(R_o)=\zeta(R_o), \qquad (14)$$

выполняются законы сохранения воды

$$2\pi\left(\int\limits_{R_o}^{R}\zeta(r)r\,dr+\int\limits_{0}^{R_o}\theta(r)r\,dr\right)=V_w \qquad (15)$$

и примеси

$$2\pi\int\limits_{0}^{R_o}(\eta(r)-\theta(r))r\,dr=V_o. \qquad (16)$$

Также должно выполняться условие непрерывности поля скорости в воде при $r=R_o$

$$v_w^{(1)}\big|_{r=R_o}=v_w^{(2)}\big|_{r=R_o} \qquad (17)$$

и непрерывность полей скорости (10), (11) при $r=R_c$

$$v_o\big|_{r=R_c-0}=v_o\big|_{r=R_c+0},\quad v_w^{(1,2)}\big|_{r=R_c-0}=v_w^{(1,2)}\big|_{r=R_c+0}. \qquad (18)$$

Кроме того, для установившегося движения составного вихря необходимо выполнение условия равенства скорости W_ν вязких потерь кинетической энергии вихря подводимой к системе мощности W_{ext} внешнего источника

$$W_{\text{ext}}=\rho_o\nu_o\int\limits_{V_o}\left(\frac{\partial v_o}{\partial r}-\frac{v_o}{r}\right)^2dV_o+ +\rho_w\nu_w\int\limits_{V_w}\left(\frac{\partial v_w}{\partial r}-\frac{v_w}{r}\right)^2dV_w. \qquad (19)$$

Интегрирование уравнений (13) и подстановка результатов в (14), (17), (18) определяет форму «нулевого» приближения поверхности составного вихря следующими соотношениями.

В случае $R_c<R_o$

$$\eta(r)=H-\frac{(\alpha^2-1)A_o^2R_c^4}{2gR_o^2}+\frac{A_o^2R_c^2}{2g}\times \times\left[\left(\frac{r^2}{R_c^2}-2\right)\vartheta(R_c-r)-\frac{R_c^2}{r^2}\vartheta(r-R_c)\right],\quad r\in[0,R_o],$$

$$\theta(r)=H+\frac{(\alpha^2-1)A_o^2R_c^4}{2gR_o^2}\,\frac{\rho_o}{\rho_w-\rho_o}+\frac{\alpha^2\rho_w-\rho_o}{\rho_w-\rho_o}\,\frac{A_o^2R_c^2}{2g}\times \times\left[\left(\frac{r^2}{R_c^2}-2\right)\vartheta(R_c-r)-\frac{R_c^2}{r^2}\vartheta(r-R_c)\right],\quad r\in[0,R_o], \qquad (20)$$

$$\zeta(r)=H-\frac{\alpha^2A_o^2R_c^4}{2gr^2},\quad r\in[R_o,R],$$

где H — толщина слоя воды до включения вращающегося диска.

В случае $R_c>R_o$

$$\eta(r)=H-\frac{A_o^2}{2g}\left[2\alpha^2R_c^2+(1-\alpha^2)R_o^2\right]+\frac{A_o^2r^2}{2g},\quad r\in[0,R_o],$$

$$\theta(r)=H-\frac{A_o^2}{2g}\left[2\alpha^2R_c^2+\frac{(\alpha^2-1)\rho_o}{\rho_w-\rho_o}R_o^2\right]+ +\frac{\alpha^2\rho_w-\rho_o}{\rho_w-\rho_o}\,\frac{A_o^2r^2}{2g},\quad r\in[0,R_o], \qquad (21)$$

$$\zeta(r)=H+\frac{\alpha^2A_o^2R_c^2}{2g}\times \times\left[\left(\frac{r^2}{R_c^2}-2\right)\vartheta(R_c-r)-\frac{R_c^2}{r^2}\vartheta(r-R_c)\right],\quad r\in[R_o,R].$$

Выражения (20), (21) переходят друг в друга при $R_c=R_o$, т. е. когда граница области, занимаемой примесью, совпадает с границей твердотельного вращения составного вихря.

Значения величин A_o, R_o и R_c, входящих в соотношения (20), (21), определяются после подстановки (20), (21) в (15), (16), (19). Формирующаяся система трансцендентных уравнений не допускает точного аналитического решения, но может быть решена численно. Ответ на вопрос о том, какой из вариантов течения реализуется в реальной ситуации, зависит от устойчивости решений (20), (21), что требует дополнительного исследования. Здесь необходимо особенно подчеркнуть ограниченность используемой упрощенной теоретической модели. Дело в том, что характерные особенности даже установившегося течения зависят, в первую очередь, от свойств течения вблизи вращающегося активатора, на поверхности которого формируется вязкий пограничный слой существенной толщины, из которого жидкость отбрасывается в радиальном направлении, что приводит к возникновению восходящих и нисходящих потоков воды во всем объеме формирующегося течения. При этом скорость жидких элементов как в этом пограничном слое, так и в восходящих (нисходящих) потоках зависит не только от радиальной, но и от вертикальной координат. В то же время основной запас кинетической энергии формирующегося вихревого течения сосредоточен именно в азимутальном движении, что и является причиной использования предлагаемой здесь модели для описания осесимметричных свойств возникающего течения.

3. Сравнение с экспериментальными данными

В проведенных экспериментах в установившемся вихревом течении с порцией легкой нерастворимой примеси большая часть ее собирается в окрестности вертикальной оси вращения в масляное тело, погруженное в воду и граничащее с воздухом (рис. 3).

В основу обработки экспериментальных данных с точки зрения предложенных аналитических зависимостей для форм поверхностей был положен принцип минимума функционала вида

$$\Phi=\sum_{r_i\leqslant R_c}\left(ar_i^2-b-y_i\right)^2+\sum_{r_i>R_c}\left(c-\frac{d}{r_i^2}-y_i\right)^2, \qquad (22)$$

где R_c — радиус твердотельного вращения, r_i — радиальная координата измеренной точки, y_i — ее вертикальная координата, a, b, c, d — подбираемые параметры.

Так как в точке $r=R_c$ форма поверхности не должна иметь разрывов первого и второго рода,

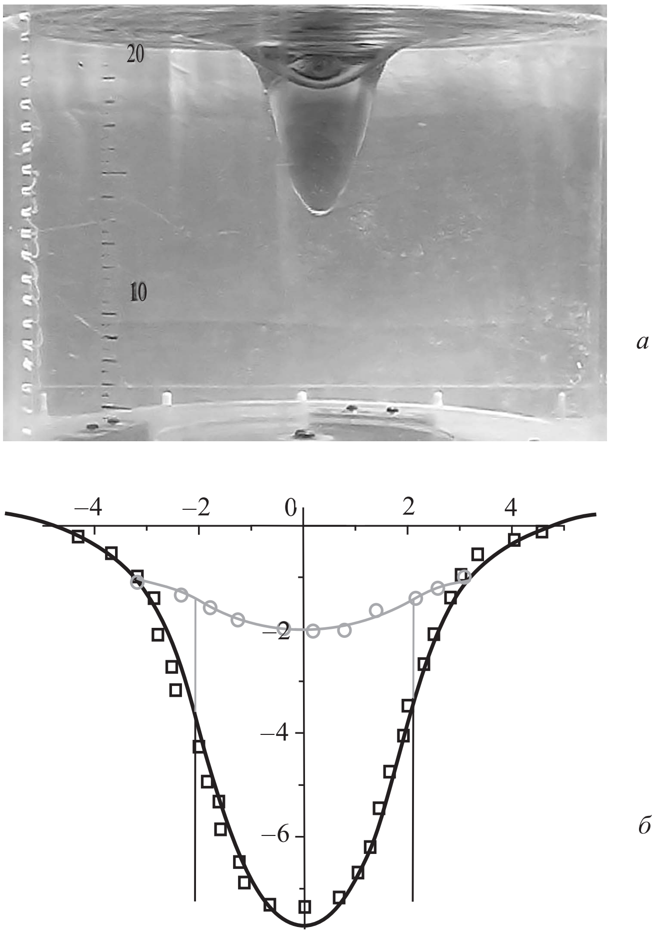

Рис. 3. Форма масляного тела в вихревом течении ($H = 20$ см, $\omega = 320$ об/мин, $V_0 = 150$ мл): *а* — фото сбоку, *б* — экспериментальные данные и аппроксимирующие кривые

то с необходимостью следует, что функционал (22) должен иметь вид

$$\Phi = \sum_{r_i \leqslant R_c} \left(ar_i^2 - b - y_i\right)^2 + \sum_{r_i > R_c} \left(aR_c^2\left(2 - \frac{R_c^2}{r_i^2}\right) - b - y_i\right)^2. \tag{23}$$

В полученном функционале присутствуют три неизвестных параметра: a, b и R_c, причем параметр R_c играет нестандартную роль: он не только влияет напрямую на абсолютное значение второй суммы в (23), но и определяет количество суммируемых величин в каждой сумме. По этой причине минимум предложенного функционала ищется следующим образом. Сначала записываются условия равенства нулю производных Φ'_a и Φ'_b:

$$\begin{gathered} a\left(\sum_{r_i \leqslant R_c} r_i^4 + R_c^4 \sum_{r_i > R_c}\left(2 - \frac{R_c^2}{r_i^2}\right)^2\right) - \\ - b\left(\sum_{r_i \leqslant R_c} r_i^2 + R_c^2 \sum_{r_i > R_c}\left(2 - \frac{R_c^2}{r_i^2}\right)\right) = \\ = \sum_{r_i \leqslant R_c} y_i r_i^2 + R_c^2 \sum_{r_i > R_c} y_i \left(2 - \frac{R_c^2}{r_i^2}\right), \end{gathered} \tag{24}$$

$$a\left(\sum_{r_i \leqslant R_c} r_i^2 + R_c^2 \sum_{r_i > R_c}\left(2 - \frac{R_c^2}{r_i^2}\right)\right) - Nb = \sum_{i=1}^{N} y_i,$$

где N — количество измерительных точек.

Затем система (24) аналитически разрешается относительно a и b, которые оказываются выраженными через измерительные данные и неизвестный параметр R_c. После чего эти величины подставляются (в аналитическом виде) в функционал (23), который оказывается функцией лишь одного параметра R_c. И наконец, численным варьированием R_c достигается минимум функционала. Параметры a и b вычисляются после определения значения величины R_c. Расчет проводится отдельно для формы границы раздела «примесь–воздух» и полной границы «вода–воздух, примесь». Вычисленные величины a, b и R_c обозначаются символами a_o, b_o и R_c^o для примеси и a_w, b_w и R_c^w для воды.

Здесь необходимо отметить важную особенность вычисления коэффициентов функционала (23). Так как расчеты проводили для каждой из поверхностей в отдельности, то соответствие результатов реальному физическому течению достигалось тем, что налагались дополнительные требования. Во-первых, вычисленные значения радиуса твердотельного вращения R_c для различных областей должны совпадать в пределах относительной погрешности не более 10%. Во-вторых, значения коэффициентов a и b должны обеспечивать соответствие аналитическим соотношениям (21). Это означает, например, что в выражении для поверхности $\eta(r)$ отношение второго члена к коэффициенту при r^2 определяется величиной $2\alpha^2 R_c^2 + (1-\alpha^2)R_o^2$ (величина H известна заранее, а R_o с достаточной точностью определяется экспериментально). Данное условие относится и к поверхностям $\theta(r)$, $\zeta(r)$ из (21).

В случае невыполнения этих условий соответствие аналитической модели эксперименту необходимо признать недостоверным. Однако проведенные расчеты для нескольких реализаций эксперимента при разных режимах вращения активатора показали хорошее удовлетворение выдвинутым условиям.

На рис. 3, *б* представлены зафиксированные в эксперименте границы раздела фаз, дополненные наложенными аппроксимирующими кривыми в соответствии с полученными аналитическими формулами и значениями параметров.

По результатам расчета (общий вид течения приведен на рис. 3, *а*) получены следующие значения: $a_o = 0.13$, $b_o = 1.99$ и $R_c^o = 2.158$, $a_w = 0.91$, $b_w = 7.65$ и $R_c^w = 2.160$. Совпадение значений R_c^w и R_c^o свидетельствует в пользу применимости предложенного представления формы границ раздела фаз. Полученная аналитически форма нулевого приближения для поверхности составного вихря, образованного вращением внутри цилиндрического контейнера, с заданным объемом легкой несмешивающейся примеси на ее поверхности показывает хорошее совпадение с экспериментальными данными во всем исследованном диапазоне параметров эксперимента.

Заключение

Впервые рассмотрена задача аналитического определения формы масляного тела в составном вихре на основе анализа уравнений механики разноплотных жидкостей с физически обоснованными граничными условиями. Получены зависимости, отражающие форму границ раздела фаз в вихревом течении жидкости, состоящей из двух компонент.

Особенности полученных аналитических выражений для формы границ раздела фаз в вихревом течении накладывают существенные ограничения на свойства используемых несмешивающихся добавок, так как для точного определения всех параметров гранц раздела фаз необходима низкая оптическая плотность, и на применяемые средства визуализации, которые должны обеспечивать необходимое разрешение изображения для проведения измерений формы поверхностей раздела.

Полученные аналитические выражения, характеризующие форму нулевого приближения для границ раздела фаз в составном вихре, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ 14-01-00015а.

Список литературы

1. *Utikar R., Darmawan N., Tade M.* et al. Hydrodynamic Simulation of Cyclone Separators Computational Fluid Dynamics. 2010.
2. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. (*Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. 1973.)
3. *Renardy Y., Joseph D.* // J. Fluid Mech. 1985. **150**, P. 381.
4. *Merkulov A.P.* Vortex Effect and Its Application in Engineering. M., 1969.
5. *Jansson T.R., Haspang M.P., Jensen K.H.* et al.// Phys. Rev. Let. 2006. **96**.
6. *Hirsa A.H., Lopez J.M., Miraghaie R.* // Phys. Fluids. 2002. **14**, N 6. P. 29.
7. *Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: ИТФ СО РАН, 2003.
8. *Fujimoto S., Murai Y., Tasaka Y., Takeda Y.* // J. Visualization. 2010. **13**, N 1. P. 17.
9. *Чаплина Т.О., Степанова Е.В., Чашечкин Ю.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 4. С. 69. (*Chaplina T.O., Stepanova E.V., Chashechkin Yu.D.* // Moscow University Phys. Bull. **67**, N 4, P. 391.)
10. *Fujimoto S., Takeda Y.* // Phys. Rev. 2009. **80**. 015304.
11. *Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В.* // Доклады РАН. 2010. **432**, № 1. С. 50. (*Chashechkin Yu.D., Kistovich A.V.* // Dokl. Phys. 2010. **55**, N 5. P. 233.)
12. *Чаплина Т.О., Степанова Е.В., Чашечкин Ю.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2014. № 6. С. 122. (*Chaplina T.O., Stepanova E.V., Chashechkin Yu.D.* // Moscow University Phys. Bull. **69**, N 6. P. 565.)
13. *Чашечкин Ю.Д., Байдулов В.Г., Бардаков Р.Н.* и др. // Механика жидкостей. М.: Наука, 2010. С. 277.

Theoretical and experimental studies of the boundaries between two immiscible liquids in a vortex flow with a free surface

T. O. Chaplina[1,2,a], **A. V. Kistovich**[2,b], **E. V. Stepanova**[2]

[1] *Department of Marine and Inland Water Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[2] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow 119526, Russia.*
E-mail: [a] *chaplina_to@inbox.ru,* [b] *kavmendeleevo@mail.ru.*

This paper discusses an analytical representation of phase boundaries in a composite vortex that result from the circular motion of a given volume of water with a given volume of a light immiscible admixture (oil) on its surface in a cylindrical container. The vortex structure consists of a vortex cavity in the center of a container and an oil body inside the vortex. Under the assumption of axial symmetry, analytical expressions were first derived describing the shape of the phase boundaries. A series of experiments was carried out and numerical calculations were compared with the experimental data. The calculated and measured phase boundary shapes were found to be satisfactorily consistent with each other. Requirements were determined regarding the experimental study of the shape of an oil body in a composite vortex and its stability depending on the governing parameters.

Keywords: composite vortex, admixture, free surface, phase boundary, exact solution.
PACS: 92.05.Bc.
Received 23 November 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 4. Pp. 447–453.

Сведения об авторах

1. Чаплина Татьяна Олеговна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; e-mail: tanya75.06@mail.ru.
2. Кистович Анатолий Васильевич — докт. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, доцент; тел.: (495) 434-14-87, e-mail: kavmendeleevo@mail.ru.
3. Степанова Евгения Вячеславовна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 434-41-60, e-mail: step@ipmnet.ru.