

О Б З О Р

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Пертурбативность и непертурбативность в эффектах больших Z для водородоподобных атомов

К. А. Свешников^{1,a}, Д. И. Хомовский^{2,b}

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,

¹*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий;*

²*кафедра квантовой статистики и теории поля.*

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^acosta@bog.msu.ru, ^bkhomovskij@physics.msu.ru

Статья поступила 12.04.2016, подписана в печать 16.06.2016.

Для нижних уровней водородоподобного атома в рамках чисто пертурбативного и существенно непертурбативного по α/π подходов рассмотрены эффекты, обусловленные взаимодействием $\Delta U_{\text{АММ}}$ аномальной компоненты магнитного момента электрона с кулоновским полем ядра при $Z\alpha > 1$. При этом в непертурбативном случае в силу специфических особенностей оператора $\Delta U_{\text{АММ}}$ для точечного кулоновского источника распределение заряда по объему ядра задается на уровне кварковой структуры через валентные (конституентные) u - и d -кварки. В работе показано, насколько нетривиальным оказывается такой непертурбативный анализ и как меняются его результаты при переходе от центральной задачи со сферической симметрией к учету вклада от периферии. Показано также, что для всех значений Z , вплоть до критических, оба метода приводят к совпадающим с точностью не менее 0.1% результатам для сдвига уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$. Таким образом подтверждается, что теория возмущений по α/π в сверхтяжелых атомах приводит к корректному результату, если при этом с самого начала учитывается полная зависимость волновой функции от $Z\alpha$.

Ключевые слова: аномальный магнитный момент электрона, взаимодействие Дирака–Паули, водородоподобный атом, большие Z , радиационные поправки.

УДК: 539.182. PACS: 31.30.Jv.

Введение

В связи с новыми лабораторными и астрофизическими экспериментами по спектроскопии и столкновениям тяжелых ионов и синтезу новых сверхтяжелых элементов [1–6] особую актуальность приобретает вопрос о том, насколько теория возмущений способна описывать КЭД-эффекты в области $Z > 137$, когда $Z\alpha > 1$ не является более малым параметром [7–10]. Отметим, что на данный момент удалось экспериментально синтезировать только сверхтяжелые ядра с зарядом, не превышающим $Z = 118$, которые представляют так называемый остров стабильности (Z от 114 до 126), и выдвинута гипотеза о существовании второго острова стабильности вокруг $Z = 164$ ([1, 3] и цит. лит.). Тем не менее область $Z > 137$ активно обсуждается как в квантовой химии, где наиболее важным, имеющим принципиальное общетеоретическое значение, является вопрос о последнем элементе Периодической системы [3, 10], а также в планируемых экспериментах по столкновениям тяжелых ионов типа $U + Pb$, $U + Th$, $U + U$, $U + Cm$ и т. д., на вводимых в ближайшее время и строящихся коллайдерах тяжелых ионов FAIR (Дармштадт) и NICA (Дубна), когда на короткое время $\sim 10^{-19}$ – 10^{-21} с возможно образование компактных ядерных квазимолекул с суммарным

зарядом, превышающим $Z_{\text{сг}} \simeq 170$. В последнем случае КЭД предсказывает непертурбативную перестройку вакуума, которая должна сопровождаться целым рядом нетривиальных эффектов, в частности испусканием вакуумных позитронов ([4, 5] и цит. лит.), однако многолетние эксперименты на установках GSI ((Дармштадт)) и в Аргоннской национальной лаборатории так и не привели к однозначному выводу о статусе закритической области, что придает вопросу о возможной роли непертурбативности в КЭД-эффектах при $Z > 137$ особую значимость [4, 5, 7, 9].

В общем виде ответ на этот вопрос пока отсутствует, поэтому представляет интерес исследование отдельных КЭД-эффектов, которые допускают детальный непертурбативный анализ и сравнение результатов с теорией возмущений (ТВ). Таким эффектом является взаимодействие аномалии Δg магнитного момента (АММ) дираковского фермиона с кулоновским полем протяженного источника (атомного ядра) с большим Z , которое описывается оператором Дирака–Паули

$$\Delta U_{\text{АММ}} = \frac{\Delta g}{2} \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H})$, а $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическая и магнитная компоненты электромагнитного

тензора $F_{\mu\nu}$. Такое взаимодействие представляет интерес как в случае частиц с АММ по крайней мере частично неэлектромагнитной природы (адроны), так и для электрона и других лептонов, у которых основной вклад в АММ дают радиационные КЭД-эффекты. В частности, для атомного электрона общее выражение для гиромагнитного отношения имеет вид [11–13]

$$g_{\text{bound}}(Z) = g_D + \Delta g_{\text{rec}} + \Delta g_{\text{rad}}. \quad (2)$$

При этом для $Z \ll 137$ главным слагаемым в (2) является g_D , которое определяется из уравнения Дирака по линейному отклику на внешнее магнитное поле. Аналитическое выражение для g_D -фактора электрона в $1s_{1/2}$ -состоянии водородоподобного атома в приближении неподвижного точечного ядра

$$g_D(Z) = \frac{2}{3} \left(1 + 2\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} \right) \quad (3)$$

было получено Дж. Брейтом еще в 1928 г. [14]. Поправка Δg_{rec} обусловлена эффектом отдачи, возникающей за счет конечности массы ядра [15–17] и является функцией двух безразмерных параметров $Z\alpha$ и m/M_N , где M_N — масса ядра. Аналитическое выражение для Δg_{rec} для $1s$ -состояния, точное в первом порядке по m/M_N , имеет вид

$$\Delta g_{\text{rec}}(Z) = \frac{m}{M_N} (Z\alpha)^2 \left(1 - \frac{(Z\alpha)^2}{3 \left(1 + \sqrt{1 - (Z\alpha)^2} \right)^2} \right). \quad (4)$$

В данной работе, однако, основное внимание уделяется большим Z , для которых эффекты отдачи по крайней мере в первом приближении неактуальны из-за малости m/M_N .

Δg_{rad} описывает радиационный вклад в гиромагнитное отношение связанного электрона и представляется в виде двойного ряда по степеням параметров α/π , отвечающего за процессы излучения–поглощения виртуальных фотонов электроном, и $Z\alpha$, что учитывает взаимодействие между электроном и атомным ядром. К настоящему времени в рамках пертурбативной КЭД надежно установлена структура Δg_{rad} в порядке $(Z\alpha)^2$ с учетом всех поправок по α/π [18, 19]

$$\Delta g_{\text{rad}} = (g_{\text{free}} - 2) \left[1 + (Z\alpha)^2/6 \right] + O((\alpha/\pi)(Z\alpha)^4), \quad (5)$$

где $g_{\text{free}} = 2 + \Delta g_{\text{free}}$ — гиромагнитное отношение для свободного электрона, которое известно с большой точностью как в теории, так и в эксперименте [20–23].

Следует отметить, что поправки порядка $(Z\alpha)^2$ к Δg_{rad} имеют прежде всего кинематическую природу [15–17, 24, 25]. Такие КЭД-эффекты, как поляризация вакуума и рассеяние света на свете, проявляются только в порядке $O((\alpha/\pi)(Z\alpha)^4)$. В то же время из (5) следует, что в таком «кинематическом» приближении Δg_{free} является параметром, не зависящим от конкретного электронного состо-

яния, и при определении характеристик атомного электрона может рассматриваться как отдельный динамический фактор. Таким образом возникает мотивация к непертурбативному учету вклада от Δg_{free} в свойства электронного состояния в атомах с большим Z непосредственно через уравнение Дирака (УД) с дополнительным членом (1), поскольку при этом за счет структуры оператора Дирака–Паули сохраняются все основные свойства картины Фарри. Подчеркнем, что АММ электрона возникает в КЭД как одна из радиационных поправок к вершинному формфактору в пределе малых переданных импульсов [26, 27] и поэтому для атомного электрона $\Delta U_{\text{АММ}}$ есть только один из видов эффективного взаимодействия, обусловленного радиационными поправками к затравочному лагранжиану. В то же время для адронов $\Delta U_{\text{АММ}}$ имеет полноценный статус дополнительного члена взаимодействия с внешним электромагнитным полем, при этом эффект от $\Delta U_{\text{АММ}}$ для нуклонов по величине будет сравним с эффектом для электрона, поскольку в обоих случаях АММ оказывается одного порядка по абсолютной величине.

$\Delta U_{\text{АММ}}$ имеет ряд специфических особенностей, в частности для точечного кулоновского источника оператор (1) обладает максимально допустимой для УД сингулярностью $\sim 1/r^2$. В свою очередь, это приводит к тому, что для любых Z волновая функция (ВФ) дираковской частицы становится всюду регулярной, имеющей в кулоновской особенности нули бесконечной кратности для обеих компонент биспинора. Поэтому оператор (1) одновременно является и способом регуляризации дираковского гамильтониана для точечного источника с зарядом $Z > 137$, альтернативным к стандартному способу обрезания кулоновского потенциала при $r < \delta$, который фактически означает приписывание источнику ненулевого размера [9, 28]. С другой стороны, поскольку фактическими источниками электрического заряда в атомном ядре следует считать валентные (конституентные) u - и d -кварки, которые как носители (дробного) заряда проявляют себя как те же атомные электроны, т.е. их заряд всегда локализован в некоторой точке, то полностью непертурбативный анализ вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ в силу его специфики требует учета кварковой структуры ядра. В настоящей работе будет показано, насколько нетривиальным оказывается такой анализ и как меняются его результаты при переходе от центральной задачи со сферической симметрией к учету вклада от периферии.

Отметим также, что взаимодействие дираковского фермиона с кулоновским полем точечного источника с учетом АММ через член Дирака–Паули рассматривалось в свое время в [29] с целью исследования возможности возникновения резонансов на масштабах порядка адронных размеров и масс за счет возрастания роли магнитных эффектов на

предельно малых расстояниях. В настоящей работе мы рассматриваем принципиально другой аспект наличия у частицы АММ, а именно общую задачу о спектре и свойствах стационарных состояний при наличии взаимодействия (1) в зависимости от величины заряда и размеров кулоновского источника, для чего используются другие методы, как аналитические, так и численные, а полученные результаты явно демонстрируют всю нетривиальность результатов непертурбативного учета КЭД-эффектов при больших Z .

1. Эффекты от $\Delta U_{\text{АММ}}$ для центральных кварков

Общий вид УД для частицы с АММ в кулоновском поле ядра имеет вид ($\hbar = c = 1$)

$$(\alpha \mathbf{p} + \beta m + U(r) + \Delta U_{\text{АММ}})\psi = E\psi, \quad (6)$$

где $U(r)$ — кулоновский потенциал ядра, в котором кварковая структура никакой специальной роли не играет и поэтому $U(r)$ выбирается в стандартном виде потенциала равномерно заряженного шара радиуса R

$$\begin{aligned} U(r) &= -\frac{Z\alpha}{2R}(3 - (r/R)^2), \quad r < R, \\ U(r) &= -Z\alpha/r, \quad r \geq R, \end{aligned} \quad (7)$$

а радиус ядра определяется через Z (упрощенной) формулой $R = 1.228935(2.5Z)^{1/3}$ Фм. Коэффициент в этой формуле выбран таким образом, чтобы в чисто кулоновской задаче с потенциалом $U(r)$ уровень $1s_{1/2}$ почти достигал порога отрицательного континуума при $Z = 170$ с энергией связи $1.99999m$. Более корректное соотношение $R = 1.2A^{1/3}$, $A = 0.00733Z^2 + 1.3Z + 63.6$ для нашего случая будет превышением точности, поскольку уже кулоновский потенциал ядра в виде (7) является приближением, особенно при $Z > 137$.

$\Delta U_{\text{АММ}}$ задается с учетом плотности носителей заряда в ядре $\rho(\mathbf{r})$

$$\Delta U_{\text{АММ}} = -i\Delta g \frac{\alpha}{4m} \gamma \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') = i\lambda \gamma \cdot \nabla U_\rho(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где

$$\lambda = \frac{\alpha}{4m} \Delta g, \quad U_\rho(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (9)$$

и далее будем рассматривать случай атомного электрона, тогда

$$\Delta g = \Delta g_{\text{free}} = \alpha/\pi - 0.656958(\alpha/\pi)^2 + O((\alpha/\pi)^3). \quad (10)$$

Сначала рассмотрим случай u - и d -кварков в центре ядра. Тогда в единицах массы электрона и его комптоновской длины волны из уравнения (6) для верхней и нижней компонент дираковского биспинора φ и χ следует

$$\begin{aligned} (\alpha \mathbf{p} + iZ_q \lambda \sigma \mathbf{n}/r^2) \varphi &= (\epsilon + 1 - U(r))\chi, \\ (\alpha \mathbf{p} - iZ_q \lambda \sigma \mathbf{n}/r^2) \chi &= -(\epsilon - 1 - U(r))\varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

где Z_q — заряд кварка, $\lambda = \alpha \Delta g_{\text{free}}/4 \simeq \alpha^2/4\pi$, $\epsilon = E/m$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Для центральных кварков при наличии $\Delta U_{\text{АММ}}$ будут по-прежнему сохраняться полный момент j электрона и оператор $k = \beta(\sigma \mathbf{l} + 1)$, поэтому в стандартном представлении для матриц Дирака верхний и нижний спиноры электронной ВФ будут содержать шаровые спиноры Ω_{jlm_j} и $\Omega_{jl'm_j}$ различной четности и радиальные функции $f_j(r)$ и $g_j(r)$

$$\psi_{jm_j} = \begin{pmatrix} f_j(r)\Omega_{jlm_j} \\ g_j(r)\Omega_{jl'm_j} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

При этом $f_j(r)$ и $g_j(r)$ вещественны и $l + l' = 2j$. Определение сферических гармоник и шаровых спиноров следует [30], при этом $\Omega_{jl'm_j} = \sigma \mathbf{n} \Omega_{jlm_j}$. Далее состояния с фиксированным j и различными четностью, которую будем отождествлять с четностью верхнего спинора, и собственными значениями k будем рассматривать по отдельности. Если $j = l + 1/2$, то при четности $(-1)^l$ и $k = j + 1/2$

$$\psi_{jm_j} = \begin{pmatrix} u_l(r)\Omega_{jlm_j} \\ q_l(r)\sigma \mathbf{n} \Omega_{jlm_j} \end{pmatrix} \quad (13)$$

и радиальные функции $u_l(r)$, $q_l(r)$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{cases} \partial_r u_l - (l/r + Z_q \lambda/r^2) u_l = (\epsilon + 1 - U(r))q_l, \\ \partial_r q_l + ((l+2)/r + Z_q \lambda/r^2) q_l = -(\epsilon - 1 - U(r))u_l, \end{cases} \quad (14)$$

а если четность равна $(-1)^{l+1}$ и $k = -(j + 1/2)$, то

$$\psi_{jm_j} = \begin{pmatrix} v_l(r)\sigma \mathbf{n} \Omega_{jlm_j} \\ p_l(r)\Omega_{jlm_j} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

при этом уравнения для пары $v_l(r)$, $p_l(r)$ принимают вид

$$\begin{cases} \partial_r v_l + ((l+2)/r - Z_q \lambda/r^2) v_l = (\epsilon + 1 - U(r))p_l, \\ \partial_r p_l - (l/r - Z_q \lambda/r^2) p_l = -(\epsilon - 1 - U(r))v_l. \end{cases} \quad (16)$$

В (14), (16) член Дирака–Паули доминирует на предельно малых расстояниях $r \sim O(\alpha^2/4\pi)$ от центра, за счет чего асимптотика радиальных функций при $r \rightarrow 0$ становится регулярной для всех Z и вне зависимости от четности уровня с точностью до степенного множителя будет описываться экспоненциально быстро убывающими функциями с нулями бесконечной кратности, которые для u -кварка ($Z_u = 2/3$) имеют вид [9, 29]

$$\begin{aligned} f_j(r) &\rightarrow \exp(-Z_u \lambda/r), \\ g_j(r) &\rightarrow -\frac{\epsilon - 1 + 3Z\alpha/2R}{2Z_u \lambda} r^2 \exp(-Z_u \lambda/r), \end{aligned} \quad (17a)$$

а для d -кварка ($Z_d = -1/3$)

$$\begin{aligned} g_j(r) &\rightarrow \exp(Z_d \lambda/r), \\ f_j(r) &\rightarrow -\frac{\epsilon + 1 + 3Z\alpha/2R}{2Z_d \lambda} r^2 \exp(Z_d \lambda/r). \end{aligned} \quad (17b)$$

Из вида асимптотик (17a), (17b) очевидно, что $\Delta U_{\text{АММ}}$ является существенно непертурбативным

эффектом, поскольку (17) не имеет разложения по степеням α при $r \rightarrow 0$. В свою очередь это приводит к тому, что в поведении радиальных компонент электронной ВФ возникают существенные изменения на малых расстояниях от центра по сравнению с чисто кулоновской задачей. На рис. 1, 2 и 3, 4 показано поведение радиальных компонент нормированной ВФ для двух нижних уровней различной четности $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ для чисто кулоновской задачи, а также с u - и d -кварками в центре ядра. Заряд ядра соответствует критическому $Z = 170$ для $1s_{1/2}$ и $Z = 183$ для $2p_{1/2}$. Для детализации графиков на рис. 2, а, б и 4, а, б использованы координаты $\xi = 40r + \ln r$. На рис. 2, в и 4, в расстояние задается в Фм. Из рис. 2, в четко видно, что нижняя компонента биспинора для уровня $1s_{1/2}$ становится локализованной на масштабе $O(\alpha^2/4\pi) \sim 10^{-3}$ Фм, если в центре ядра находится d -кварк. Аналогичная ситуация на рис. 4, в для уровня $2p_{1/2}$, когда в центре помещен u -кварк.

Численное решение с асимптотиками (17а), (17б) показывает, что для ядра с критическим зарядом $Z = 170$ уровень $1s_{1/2}$, которому соответствует уравнение (14) при $l=0$, за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ с центральными кварками будет сдвинут относительно чисто кулоновского случая с потенциалом (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(u)}(1s_{1/2}) &= 244.1 \text{ эВ}, \\ \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}(1s_{1/2}) &= 10.0 \text{ эВ}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если теперь учесть, что в этом случае средний радиус электронной ВФ будет порядка $O(1) \gg R$, вероятность нахождения электрона внутри ядра составляет всего $\simeq 0.02$, то на первый взгляд вклад от кварков со смещением из центра ядра может отличаться от (18) только на поправки. А поскольку область исчезновения электронной ВФ на каждом кварке в соответствии с асимптотиками (17а), (17б) будет иметь размеры $\sim \alpha^2/4\pi \ll R$, то в первом приближении результирующий сдвиг электронного уровня может быть вычислен как прямая сумма

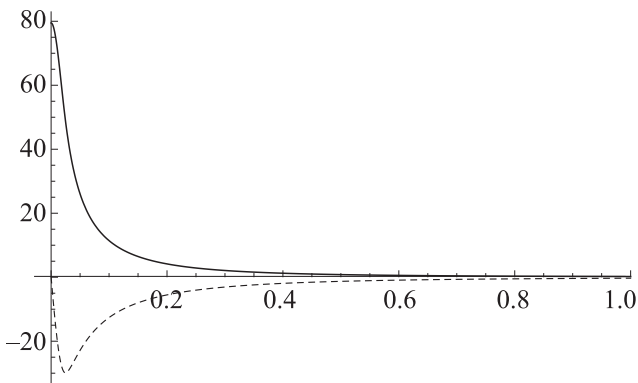


Рис. 1. Поведение верхней (сплошная линия) и нижней (пунктир) радиальных компонент нормированной кулоновской ВФ уровня $1s_{1/2}$ с $\epsilon = -0.99999$ при однородном распределении заряда в ядре с $Z = 170$ и радиусом $R = 1.228935 (2.5Z)^{1/3}$ Фм

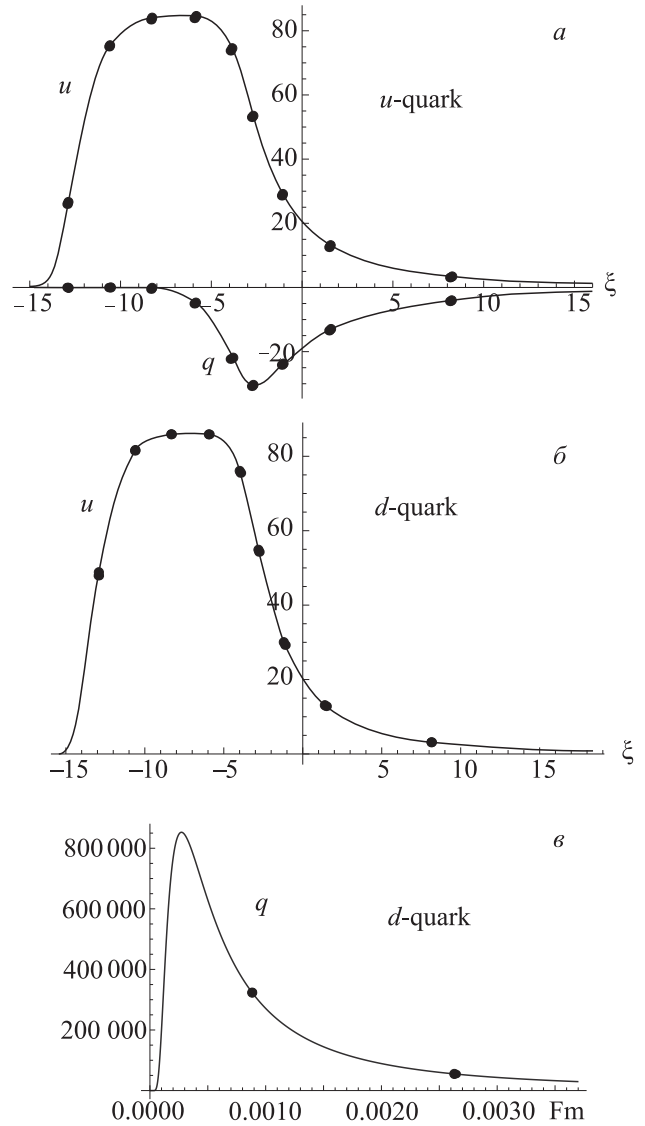


Рис. 2. Поведение верхней и нижней радиальных компонент нормированной ВФ уровня $1s_{1/2}$ для однородного распределения заряда $Z = 170$ в ядре с u -кварком в центре — график а. С d -кварком в центре — для верхней компоненты график б, для нижней график в. Точками отмечены следующие расстояния от центра ядра: на графиках а и б слева направо $10^{-4}R$, $10^{-3}R$, $10^{-2}R$, $10^{-1}R$, $R/2$, R , $2R$, $4R$, $10R$; на графике в точки $10^{-4}R$, $3 \cdot 10^{-4}R$

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}} = (2Z + N) \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(u)} + (Z + 2N) \Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}, \quad (19)$$

где Z — число протонов, N — число нейтронов. В результате для сдвига уровня $1s_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ при ядре с $Z = 170$, $N = 1.5Z = 255$ получаем

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}}(1s_{1/2}) = 152.0 \text{ кэВ}. \quad (20)$$

Подчеркнем, что этот результат для вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ в сдвиг уровня является полностью непертурбативным как по α/π , так и по $Z\alpha$. Этот результат следует прежде всего сравнить с оценкой сдвига по ТВ, когда $\Delta U_{\text{АММ}}$ рассматривается как возмущение кулоновского потенциала (7). В этом случае сдвиг уровней с квантовыми числами nj

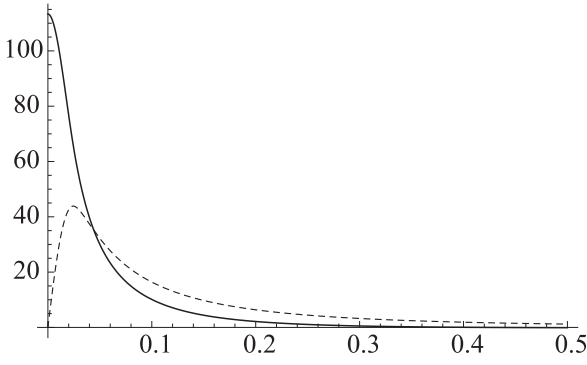


Рис. 3. Поведение нижней (сплошная линия) и верхней (пунктир) радиальных компонент нормированной кулоновской ВФ уровня $2p_{1/2}$ с $\epsilon = -0.99947$ при однородном распределении заряда в ядре с $Z = 183$ и радиусом $R = 1.228935 (2.5Z)^{1/3}$ Фм. Нижняя компонента имеет нуль в окрестности 0.4 Фм

за счет центральных кварков находится по формуле

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\epsilon}_{\text{АММ}}(nj) &= \langle \psi_{nj}^{(0)} | \Delta U_{\text{АММ}} | \psi_{nj}^{(0)} \rangle = \\ &= -2Z_q \lambda \int_0^\infty dr f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r), \quad (21) \end{aligned}$$

где $f_{nj}^{(0)}(r)$, $g_{nj}^{(0)}(r)$ — радиальные компоненты ВФ невозмущенного кулоновского уровня определенной четности $\psi_{nj}^{(0)}$. Результат для сдвига уровня $1s_{1/2}$ при этом оказывается существенно другим:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\epsilon}_{\text{АММ}}^{(u)}(1s_{1/2}) &= 244.26 \text{ эВ}, \\ \Delta \bar{\epsilon}_{\text{АММ}}^{(d)}(1s_{1/2}) &= -122.13 \text{ эВ}, \\ \Delta \bar{\epsilon}_{\text{АММ}}(1s_{1/2}) &= 62.3 \text{ кэВ}. \end{aligned} \quad (22)$$

Причина такой разницы между (18), (20) и (22) в том, что (21) за счет радиальных кулоновских компонент $f_{nj}^{(0)}$, $g_{nj}^{(0)}$ полностью учитывает зависимость от $Z\alpha$, но при этом является эффектом первого порядка по $Z_q\lambda$, т.е. фактически по Δg_{free} и тем самым по α/π , в то время как (18) вычисляется полностью непертурбативным образом как по $Z\alpha$, так и по α/π . Как показано было выше, в последнем случае для точечных кварков $\Delta U_{\text{АММ}}$ приводит к экспоненциально быстрому убыванию ВФ при $r \rightarrow 0$ на фоне максимальной амплитуды последней (см. рис. 2, 4) и тем самым его учет по ТВ и должен приводить к другому результату. Заметим также, что для атомного электрона $\Delta U_{\text{АММ}}$, как это уже отмечалось во введении, является лишь одним из видов эффективного взаимодействия за счет радиационных КЭД-эффектов и поэтому суммарный сдвиг $1s_{1/2}$ -уровня (20) за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ сам по себе не является наблюдаемым эффектом, а представляет собой лишь отдельный вклад в полный радиационный сдвиг уровня.

Еще более нетривиальные результаты возникают в таком подходе для оценки сдвига уровня $2p_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$. Для $Z = 183$ численный расчет через

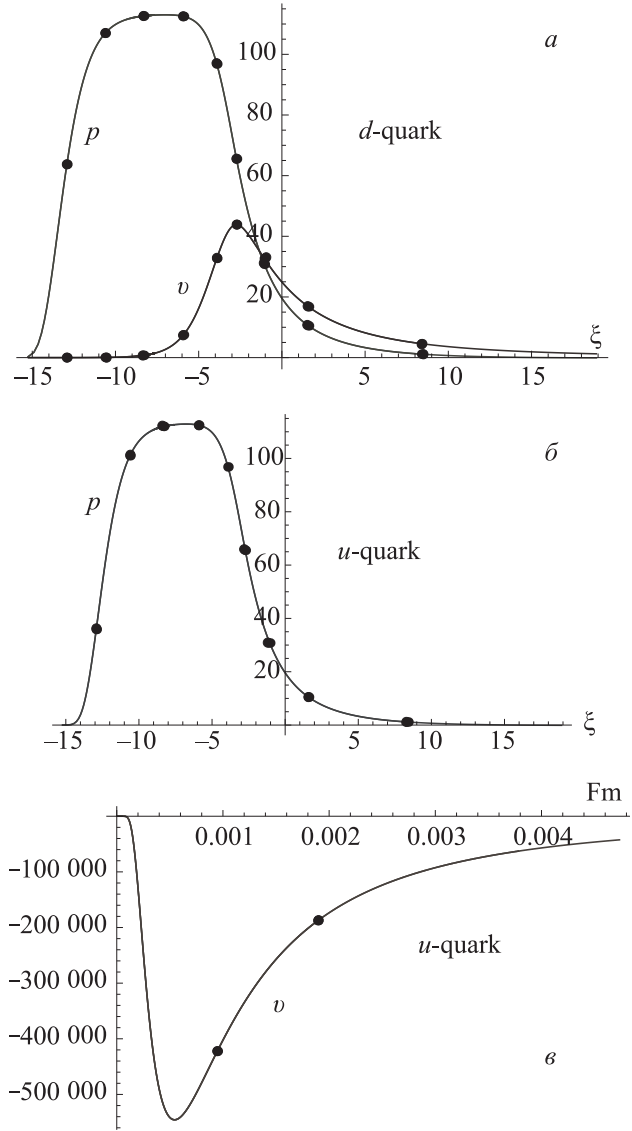


Рис. 4. Поведение верхней и нижней радиальных компонент нормированной ВФ уровня $2p_{1/2}$ для однородного распределения заряда $Z = 183$ в ядре с d -кварком в центре — график а. С u -кварком в центре — для верхней компоненты график б, для нижней график в. Точками отмечены следующие расстояния от центра ядра: на графиках а и б слева направо $10^{-4}R$, $10^{-3}R$, $10^{-2}R$, $10^{-1}R$, $R/2$, R , $2R$, $4R$, $10R$; на графике в точки $10^{-4}R$, $2 \cdot 10^{-4}R$

уравнение (16) с асимптотиками (17) дает

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{\text{АММ}}^{(u)}(2p_{1/2}) &= 74.7 \text{ эВ}, \\ \Delta \epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}(2p_{1/2}) &= 194.8 \text{ эВ}, \end{aligned} \quad (23)$$

в результате чего суммарный сдвиг уровня $2p_{1/2}$ в приближении центральных кварков оказывается положительным и такого же порядка, что и $1s_{1/2}$,

$$\Delta \epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}) = 190.7 \text{ кэВ}, \quad (24)$$

а при оценке вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ по ТВ результаты для $2p_{1/2}$ оказываются существенно другими:

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{\text{АММ}}^{(u)}(2p_{1/2}) &= -179.7 \text{ эВ}, \\ \Delta \epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}(2p_{1/2}) &= 89.9 \text{ эВ}, \\ \Delta \bar{\epsilon}_{\text{АММ}}(2p_{1/2}) &= -49.3 \text{ кэВ}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим также характерную особенность в обоих случаях: для $1s_{1/2}$ сдвиг за счет u -кварка, а для $2p_{1/2}$ сдвиг от d -кварка оказываются положительными и практически одинаковыми при расчетах непertурбативным и пертурбативным методами, в то время как сдвиги за счет d -кварка для $1s_{1/2}$ и от u -кварка для $2p_{1/2}$ существенно различаются вплоть до знака.

2. Учет вклада от периферии

Непертурбативные результаты (20), (24) для $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, хотя и не являются сами по себе наблюдаемыми эффектами как лишь одна из составляющих полного радиационного сдвига, в любом случае задают возможный масштаб радиационных эффектов вне рамок ТВ. Этот масштаб оказывается порядка 10–20% от полной энергии связи и тем самым мог бы существенно влиять на положение уровня и как следствие на величину критического заряда. Однако (20), (24) выводятся в предположении, что все кварки в ядре можно рассматривать как центральные. Неperтурбативность $\Delta U_{\text{АММ}}$ проявляется в том, что поправки за счет смещения кварков оказываются весьма существенными, несмотря на малость размеров ядра по сравнению с областью локализации электронной ВФ порядка комптоновской длины волны. Для этого достаточно учесть вклад от кварков на периферии, рассматривая смещение кварков из центра ядра как возмущение, поскольку при этом нулевое приближение будет соответствовать центральным кваркам и тем самым невозмущенные ВФ, приведенные на рис. 2, 4, теперь будут включать неperтурбативную зависимость как от $Z\alpha$, так и от α/π . Тем самым ответ для такой ТВ будет также неperтурбативен сразу по обоим параметрам.

Чтобы учесть смещение, рассмотрим сначала модель, в которой заряд центрального кварка Z_q «размазан» по объему ядра. $\Delta U_{\text{АММ}}$, соответствующий равномерно распределенной плотности этого заряда, содержит электрическую напряженность $\mathbf{E}$, равную $Z_q e \mathbf{r}/R^3$ при $r \leq R$ и $Z_q e \mathbf{r}/r^3$ при $r > R$. По отношению к задаче с точечным кварком в центре напряженность внутри ядра изменяется на $\delta \mathbf{E} = Z_q e \mathbf{r}(1/R^3 - 1/r^3)$, а вне ядра остается прежней. Если такое изменение электрического поля внутри ядра считать возмущением к центральной задаче (11), то связанное с этим изменение потенциала $\delta U_{\text{АММ}} = (\partial \Delta U_{\text{АММ}} / \partial \mathbf{E})|_{\mathbf{E}=0} \delta \mathbf{E}$ в первом порядке ТВ дает следующую поправку к энергии уровня:

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_{\text{АММ}}^{(q)}(nj) &= \langle \psi_{nj}^{(q)} | \delta U_{\text{АММ}} | \psi_{nj}^{(q)} \rangle = \\ &= 2Z_q \lambda \int_0^R dr f_{nj}^{(q)}(r) g_{nj}^{(q)}(r) (1 - (r/R)^3), \end{aligned} \quad (26)$$

при этом в (26) $\psi_{nj}^{(q)}$, $f_{nj}^{(q)}$, $g_{nj}^{(q)}$ — ВФ задач (14), (16) с кварком q в центре ядра.

Формулу (26) можно получить другим способом: по ТВ находим поправку, вызванную смещением на

вектор $\mathbf{a}$ центрального кварка, используя в качестве невозмущенных $\psi_{nj}^{(q)}$, затем усредняем полученную поправку по всем векторам, для которых выполняется условие $|\mathbf{a}| \leq R$. Приведем вывод для уровня $1s_{1/2}$. Изменение оператора Дирака–Паули, обусловленное смещением центрального кварка, и ВФ уровня имеют вид

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a}) &= -iZ_q \lambda \left(\frac{\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} - \frac{\gamma \mathbf{r}}{r^3} \right), \\ |1s_{1/2}\rangle &= \begin{pmatrix} iu_0^{(q)}(r)\Omega_0 \\ q_0^{(q)}(r)\sigma \mathbf{n} \Omega_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Матричный элемент от $\delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a})$ вычисляется следующим образом (далее в этом выводе индекс кварка (q) будем опускать):

$$\begin{aligned} \langle 1s | \delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a}) | 1s \rangle &= \\ &= -Z_q \lambda \int d\mathbf{r} u_0(r) q_0(r) \times \\ &\quad \times \left(\Omega_0^+ \frac{\sigma(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} \sigma \mathbf{n} \Omega_0 + \Omega_0^+ \sigma \mathbf{n} \frac{\sigma(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} \Omega_0 \right) + \\ &\quad + Z_q \lambda \int d\mathbf{r} u_0(r) q_0(r) \left(\Omega_0^+ \frac{\sigma \mathbf{r}}{r^3} \sigma \mathbf{n} \Omega_0 + \Omega_0^+ \sigma \mathbf{n} \frac{\sigma \mathbf{r}}{r^3} \Omega_0 \right) = \\ &= -2Z_q \lambda \int d\mathbf{r} u_0(r) q_0(r) \Omega_0^+ \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} \Omega_0 + \\ &\quad + 2Z_q \lambda \int_0^\infty dr u_0(r) q_0(r). \end{aligned} \quad (28)$$

Далее используем

$$\frac{\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} = -\mathbf{n} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \quad (29)$$

и интегрируем по частям первый интеграл в правой части (28) с учетом того, что радиальные компоненты исчезают при $r = 0$ и при $r \rightarrow \infty$. В результате

$$\langle 1s | \delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a}) | 1s \rangle = 2Z_q \lambda \int_0^a dr u_0(r) q_0(r). \quad (30)$$

Теперь усредняем полученную поправку по объему ядра:

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_{\text{АММ}}^{(q)}(1s_{1/2}) &= 2Z_q \lambda \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R 4\pi a^2 da \int_0^a dr u_0(r) q_0(r) = \\ &= 2Z_q \lambda \frac{3}{R^3} \int_0^R dr u_0(r) q_0(r) \int_r^R a^2 da = \\ &= 2Z_q \lambda \int_0^R dr u_0(r) q_0(r) (1 - (r/R)^3), \end{aligned} \quad (31)$$

что полностью соответствует (26).

В результате с учетом усреднения по объему ядра сдвиг уровней за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ от кварка типа q имеет следующий вид

$$\mathcal{D}_{\text{АММ}}^{(q)}(nj) = \Delta \epsilon_{\text{АММ}}^{(q)}(nj) + \delta \epsilon_{\text{АММ}}^{(q)}(nj), \quad (32)$$

где $\Delta\epsilon_{\text{АММ}}^{(q)}(nj)$ — сдвиг для центрального кварка, который рассматривался в предыдущем разделе, а полный сдвиг уровня определяется аналогично (19):

$$\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}} = (2Z + N)\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}^{(u)} + (Z + 2N)\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}^{(d)}. \quad (33)$$

Для $1s_{1/2}$ - и $2p_{1/2}$ -уровней результаты расчета приведены в табл. 1, 2 для некоторых значений Z . На рис. 5 и 6 эти же результаты показаны графически.

Как следует из приведенных результатов, учет вклада от периферии ядра существенно изменяет величину полного сдвига уровней за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$, причем не только по величине, но и по знаку. Это связано со специфическим поведением невозмущенных ВФ в интеграле (26) при малых r , обусловленным непertурбативным учетом центральных кварков. Для $1s_{1/2}$ верхняя и нижняя радиальные компоненты для u -кварка противоположны по знаку и интеграл (26) оказывается отрицательным, а для d -кварка, наоборот, радиальные компоненты совпадают по знаку, интеграл (26) положителен, но заряд $Z_d = -1/3$ отрицательный. И в обоих случаях область перекрытия ненулевых значений радиальных компонент оказывается такова, что интеграл принимает достаточно большое значение, причем в случае

d -кварка эта область смещена в сторону предельно малых $r \sim \alpha^2/4\pi$, но амплитуда нижней компоненты оказывается настолько большой, что полностью компенсирует малость области перекрытия. Аналогичная картина имеет место и для $2p_{1/2}$ -уровня, только теперь u - и d -кварки и верхняя и нижняя компоненты ВФ меняются местами.

Теперь рассмотрим, насколько эти результаты для сдвига уровней за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ согласуются с пертурбативным подходом. Поскольку в (33) кварки равномерно распределяются по объему ядра, то пертурбативным аналогом (33) будет матричный элемент от оператора Дирака–Паули (6), в котором $U_\rho(\mathbf{r})$ соответствует однородному распределению заряда по ядру, что в уравнении (11) соответствует замене

$$Z_q \lambda / r^2 \rightarrow Z \lambda r / R^3, \quad r \leq R, \quad Z_q \lambda / r^2 \rightarrow Z \lambda / r^2, \quad r > R. \quad (34)$$

В результате получим

$$\mathcal{D}\bar{\epsilon}_{\text{АММ}}(nj) = -2Z\lambda \left[\frac{1}{R^3} \int_0^R dr r^3 + \int_R^\infty dr \right] \bar{f}_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r), \quad (35)$$

где $\bar{f}_{nj}^{(0)}(r)$, $g_{nj}^{(0)}(r)$ определены так же, как и в (21).

Таблица 1

**Полный сдвиг уровня $1s_{1/2}$ (эВ) за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$
в зависимости от заряда ядра Z**

Z	$\Delta\epsilon_u$	$\delta\epsilon_u$	$\mathcal{D}\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_d$	$\delta\epsilon_d$	$\mathcal{D}\epsilon_d$	$\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}$
90	1.77	-0.05	1.72	-0.6	-0.3	-0.9	232
100	3.1	-0.1	3.0	-1.0	-0.5	-1.5	444
110	5.5	-0.3	5.2	-1.5	-1.1	-2.6	855
120	10.1	-0.8	9.3	-2.3	-2.4	-4.7	1683
130	19.5	-2.1	17.4	-3.3	-5.4	-8.7	3406
140	38.9	-5.4	33.5	-4.4	-12.3	-16.7	7030
150	77.4	-13.8	63.6	-4.4	-27.4	-31.8	14314
160	145.1	-31.7	113.4	-0.7	-56.0	-56.7	27223
169	233.1	-59.5	173.6	8.6	-95.4	-86.8	44026
170	244.1	-63.2	180.9	10.0	-100.5	-90.5	46096

Таблица 2

**Полный сдвиг уровня $2p_{1/2}$ (эВ) за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$
в зависимости от заряда ядра Z**

Z	$\Delta\epsilon_u$	$\delta\epsilon_u$	$\mathcal{D}\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_d$	$\delta\epsilon_d$	$\mathcal{D}\epsilon_d$	$\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}$
110	-0.34	-0.11	-0.45	0.233	-0.008	-0.225	-74.5
120	-0.7	-0.4	-1.1	0.58	-0.03	0.55	-196.6
130	-1.5	-1.5	-3.0	1.6	-0.1	1.5	-596
140	-3.4	-6.4	-9.8	5.6	-0.7	4.9	-2067
150	-5.8	-26.2	-32.0	19.4	-3.4	16.0	-7214
160	-2.3	-81.1	-83.4	53.5	-11.8	41.7	-20027
170	18.1	-177.5	-159.4	108.4	-28.7	79.7	-40623
180	59.0	-300.9	-241.9	174.4	-53.4	121.0	-65270
183	74.7	-340.2	-265.5	194.8	-62.0	132.8	-72823

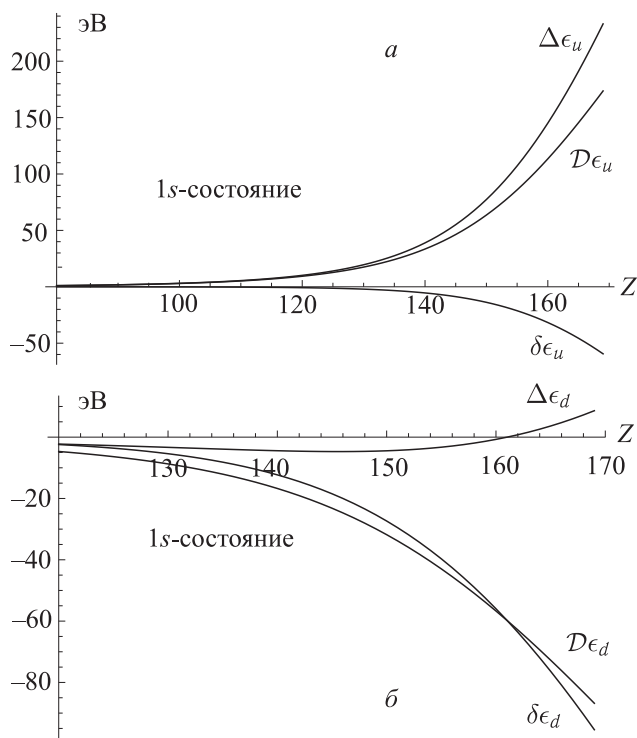


Рис. 5. $\Delta\epsilon_q$, $\delta\epsilon_q$, $D\epsilon_q$ как функции заряда ядра Z для $1s_{1/2}$: а — u -кварк; б — d -кварк

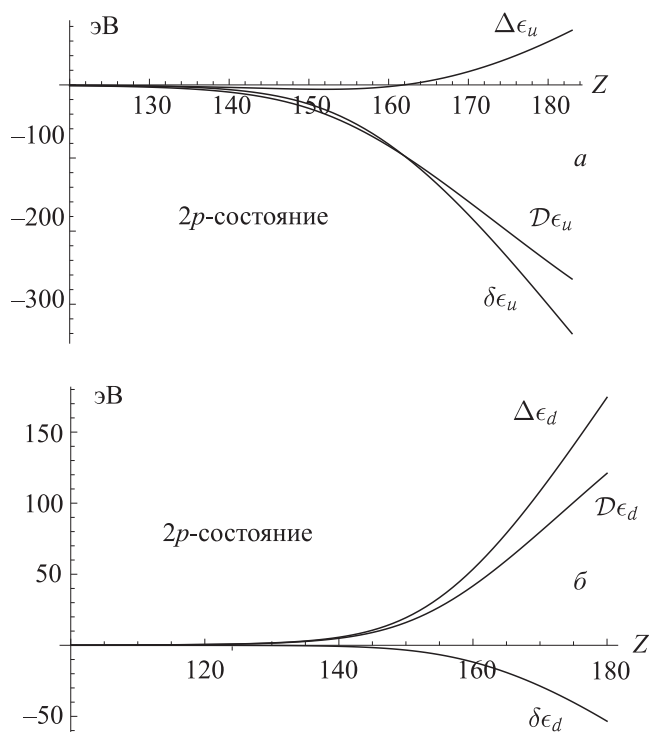


Рис. 6. $\Delta\epsilon_q$, $\delta\epsilon_q$, $D\epsilon_q$ как функции заряда ядра Z для $2p_{1/2}$: а — u -кварк; б — d -кварк

Другой (почти) пертурбативный подход к оценке сдвига за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ состоит в численном решении уравнения (11) при замене (34). При этом оба способа объединяет переход к однородной плотности заряда ядра, что игнорирует наиболее существенное непертурбативное свойство оператора Дирака–Паули, которое проявляется в асимптотиках (17а), (17б) для точечного кулоновского источника.

Результаты таких пертурбативных расчетов приведены в табл. 3. Из нее следует, что оба способа дают близкие в пределах 10 % результаты, но при этом чисто пертурбативный матричный элемент (35) и непертурбативный расчет через среднее по кваркам (33) совпадают с точностью не менее 0.1 %, причем как для $1s_{1/2}$, так и для $2p_{1/2}$, так что случайным совпадением это считать нельзя. Такое совпадение само по себе является нетривиальным

результатом, поскольку одинаковый ответ дают два существенно различных подхода к вычислению вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$. Решение уравнения (11) с заменой (34) оказывается при этом менее точным, причем практически одинаково для $1s_{1/2}$, так и для $2p_{1/2}$, что свидетельствует о неполной самосогласованности такого способа, поскольку из-за перехода к однородной плотности заряда в решении исчезает основное непертурбативное свойство оператора Дирака–Паули — нули бесконечной кратности в асимптотике ВФ на точечном источнике заряда. Как следствие в этом случае $\Delta U_{\text{АММ}}$ становится несингулярным возмущением кулоновского гамильтониана и в последовательном подходе должен учитываться по ТВ как поправка через (35).

Еще одной критической характеристикой КЭД-эффектов является их степень роста как функция Z .

Таблица 3

Пертурбативный сдвиг уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$: расчет по формуле (35), а также через решение уравнения (11) при замене (34) и с непертурбативным расчетом через формулу (33).

Для $2p_{1/2}$ при $Z = 183$ расчет через формулы (11), (34) опускает уровень в нижний континуум, поэтому средняя нижняя клетка остается пустой

$1s_{1/2}$				$2p_{1/2}$			
Z	(35)	(11), (34)	(33)	Z	(35)	(11), (34)	(33)
140	7 031	6 727	7 030	160	−20 040	−21 539	−20 027
150	14 317	13 594	14 314	170	−40 661	−43 065	−40 623
160	27 223	25 802	27 223	180	−65 344	−68 227	−65 270
169	44 017	41 886	44 026	181	−67 877	−70 773	−67 799
170	46 136	43 927	46 096	183	−72 908		−72 823

В пертурбативной КЭД степень роста собственно энергетического вклада в лэмбовский сдвиг уровня nj описывается формулой

$$\Delta E_{nj}^{SE}(Z\alpha) = \frac{Z^4 \alpha^5}{\pi n^3} F_{nj}(Z\alpha), \quad (36)$$

где $F_{nj}(Z\alpha)$ по известным данным для различных Z аппроксимируется достаточно плавной и медленно меняющейся функцией от $Z\alpha$ [10, 27, 31, 32]. Для электрона $\Delta U_{\text{АММ}}$ является составной частью собственной энергии, но степень роста энергетического сдвига за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ ведет себя существенно иначе. Если степень роста определяется стандартным образом по логарифмической производной

$$n(Z) = Z \frac{\partial}{\partial Z} \ln(\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}), \quad (37)$$

то для $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ получим кривые, показанные на рис. 7. При этом кривые для (33) и (35) практически совпадают. Различие между ними показано на рис. 8 и снова составляет не более 0.1 %.

Из рис. 7 следует, что в данном случае поведение $n(Z)$ в соответствии с (36), т. е. рост КЭД-эффектов $\sim Z^4$, имеет место вплоть до $Z \sim 60-80$, но далее сдвиг от $\Delta U_{\text{АММ}}$ показывает существенное увеличение степени роста, которое достигает максимума при $Z \simeq 147$ как для $1s_{1/2}$, так и для $2p_{1/2}$, причем этот максимум скорости роста значительно более выражен для $2p_{1/2}$. Вообще говоря, такое поведение для КЭД-эффектов достаточно естественно, поскольку при $Z\alpha > 1$ следует ожидать существенный рост непертурбативности по $Z\alpha$. А поскольку как (33),

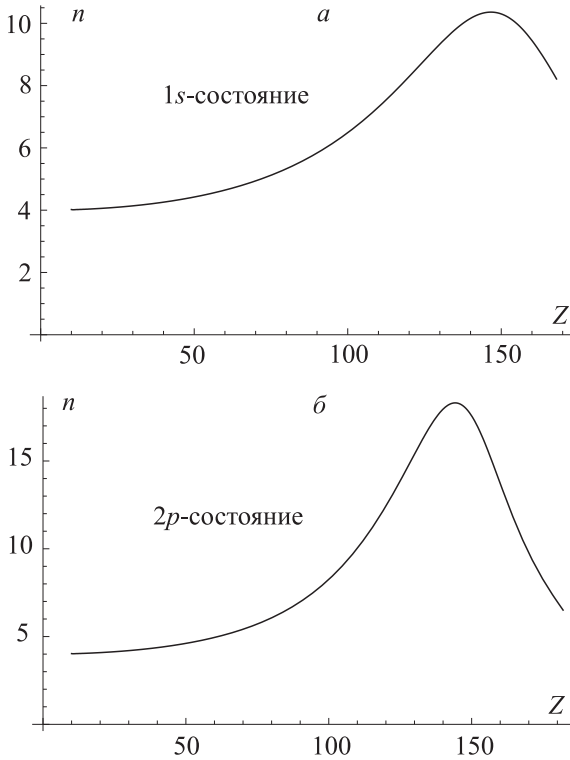


Рис. 7. Степень роста вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ как функция заряда ядра Z : а — для уровня $1s_{1/2}$; б — для уровня $2p_{1/2}$

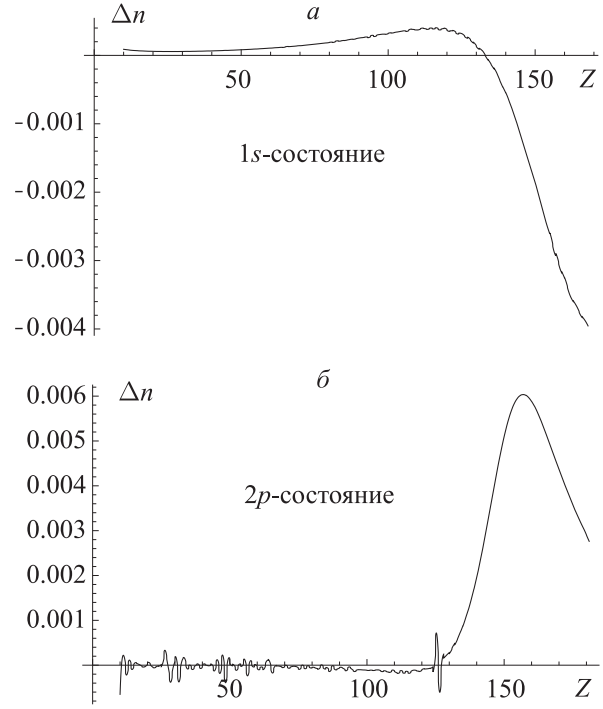


Рис. 8. Разность степеней роста для вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ для (33) и (35): а — $1s_{1/2}$; б — $2p_{1/2}$

так и (35) практически одинаково учитывают всю зависимость от $Z\alpha$ через электронные ВФ, то совпадение их результатов для энергетического сдвига за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ означает, что главную роль в этом эффекте играет максимально полный учет зависимости от $Z\alpha$, в то время как роль второго параметра α/π как в чисто пертурбативном подходе (35), так и при непертурбативном решении через (33) сводится к первому порядку диаграммной ТВ.

Заключение

В работе были рассмотрены два существенно различных по α/π способа вычисления КЭД-эффектов за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ при больших Z — пертурбативный (35) и существенно непертурбативный (33), когда разложение по α/π из-за асимптотик (17) невозможно в принципе. Основной результат состоит в том, что для $Z\alpha > 1$ оба способа с высокой точностью приводят к одинаковому результату. Это подтверждает общий вывод работ [10, 32], что расчеты по ТВ в сверхтяжелых атомах приводят к правильному результату, если при этом с самого начала учитывается полная зависимость ВФ от $Z\alpha$. Следует отдельно подчеркнуть роль ненулевого размера ядра. Для точечного заряда различие между пертурбативным и непертурбативным подходами проявляется вполне наглядно на вкладе от центра ядра (20), (24) и (22), (25). Более того, для точечного ядра при $Z\alpha > 1$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ самосопряженность гамильтониана сохраняется, но поведение уровней становится существенно другим [9, 33]. Но для ненулевого R последующее усреднение заряда ядра по объему приводит оба подхода в соответствие, хотя учет периферии по (26)

и по (35) существенно различаются — в первом случае смещается точечный заряд, а во втором полный заряд задается через однородную плотность распределения по объему ядра. Заметим также, что в непertурбативном подходе возможен и более сложный учет распределения кварков по ядру, когда с самого начала рассматриваются многокварковые конфигурации (несколько точечных кварков на одном диаметре или на кольце с последующим усреднением по положению диаметра или кольца внутри ядра), которые приводят к аналогичному окончательному выводу, но такой анализ содержит значительно больше аналитических и численных деталей и поэтому будет рассмотрен в отдельной работе.

Еще раз отметим, что для атомного электрона сдвиг за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ является частью собственно энергетического вклада в полный радиационный сдвиг уровней. Расчеты для $1s$ -электрона при $Z = 170$ и таком же соотношении между R и Z , выполненные в [34, 35] в первом порядке по α/π с полным учетом зависимости от $Z\alpha$, приводят к $\Delta E_{SE}(1s_{1/2}) \simeq 11.0$ кэВ. Это означает, что вклад от $\Delta U_{\text{АММ}}$, который возникает как одна из радиационных поправок к вершинному форм-фактору в пределе малых переданных импульсов, в значительной степени компенсируется другими составляющими собственной энергии, которые тем самым также должны вести себя по отдельности существенно сложнее, чем окончательный ответ. Но по сравнению с другими радиационными поправками учет аномалии Δg занимает выделенное положение, поскольку описывается оператором Дирака–Паули, который сохраняет все необходимые для картины Фарри свойства гамильтониана (самосопряженность, лоренц-ковариантность, дискретные симметрии и уравнение непрерывности), поэтому полученные таким образом результаты могут быть непосредственно связаны с характеристиками электронного состояния, что и было использовано в настоящей работе.

Список литературы

1. Nucl. Phys. A. **944**, Dec. 2015. Special Issue on Superheavy Elements.
2. Volotka A., Plunien G. // Phys. Rev. Lett. 2014. **113**. P. 023002.
3. Theoretical Chemistry and Physics of Heavy and Superheavy Elements / Ed. by U. Kalder and S. Wilson. Springer, 2013.
4. Ruffini R., Vereshchagin G., Xue S.-S. // arXiv: 0910.097403 [astro-ph.HE].
5. Greiner W., Schramm S. // Amer. J. Phys. 2008. **76**. P. 509.
6. Czarnecki A., Dawling M., Mondejar J., Piclum J.H. // arXiv: 1007.1176v1 [hep-ph].
7. Schwerdtfeger P., Pasteka L.F., Punnett A., Bowman P.O. // Nucl. Phys. A. 2015. **944**. P. 551.
8. Volotka A., Clazow D., Plunien G., Shabaev V. // Ann. der Phys. 2013. **525**. P. 636.
9. Sveshnikov K., Khomovskii D. // Phys. Part. Nucl. Lett. 2013. **10**. P. 119.
10. Indelicato P., Bieron J., Joensson P. // Theor. Chem. Accounts. 2011. **129**. P. 495.
11. Beier T. // Phys. Rep. 2000. **339**. P. 79.
12. Mohr P.J., Taylor B.N. // Rev. Mod. Phys. 2000. **72**. P. 351; 2005. **77**. P. 1.
13. Pachuki K., Czarnecki A., Jentschura U.D., Yerokhin V.A. // Phys. Rev. A. 2005. **72**. P. 022108.
14. Breit G. // Nature. 1928. **122**. P. 649.
15. Faustov R.N. // Phys. Lett. B. 1970. **422**; Nuovo Cim. A. 1970. **69**. P. 37.
16. Grotch H. // Phys. Rev. A. 1970. **2**. P. 1605.
17. Martynenko A.P., Faustov R.N. // JETP. 2001. **93**. P. 471.
18. Grotch H. // Phys. Rev. Lett. 1970. **24**. P. 39.
19. Czarnecki A., Melnikov K., Yelkhovsky A. // Phys. Rev. A. 2001. **63**. P. 012509.
20. Beier T., Lindgren I., Persson H. et al. // Phys. Rev. A. 2001. **62**. P. 032510.
21. Odom B., Hanneke D., Urso B.D., Gabrielse G. // Phys. Rev. Lett. 2006. **97**. P. 030801.
22. Hanneke D., Fogwell Hoogerheide S., Gabrielse G. // arXiv: 1009.4831v1 [physics.atom-ph].
23. Kinoshita T., Nio M. // Phys. Rev. D. 2006. **73**. P. 013003.
24. Каршенбойм С.Г., Иванов В.Г., Шабеев В.М. // ЖЭТФ. 2001. **120**. P. 546.
25. Shabaev V.M. et al. // arXiv: 0510083v1 [physics.atom-ph].
26. Schwinger J. // Phys. Rev. 1948. **73**. P. 416.
27. Reinhardt J., Greiner W. // Quantum Electrodynamics. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
28. Воронов Б.Л., Гутман Д.Т., Тютин И.В. // ТМФ. 2007. **150**. P. 41.
29. Barut A.O., Kraus J. // Phys. Lett. B. 1975. **59**. P. 175; J. Math. Phys. 1976. **17**. P. 506.
30. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Vol. 1. N. Y.: McGraw-Hill, 1953.
31. Mohr P.J., Plunien G., Soff G. // Phys. Rep. 1998. **293**. P. 227.
32. Pyrkko P. // Chem. Rev. 2011. **112**. P. 371.
33. Свешников К.А., Хомовский Д.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 5. С. 18. (Sveshnikov K.A., Khomovskii D.I. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2012. **67**. P. 429.)
34. Cheng K.T., Johnson W.R. // Phys. Rev. A. 1976. **14**. P. 1943.
35. Soff G., Schlueter P., Mueller B., Greiner W. // Phys. Rev. Lett. 1982. **48**. P. 1465.

Perturbativity and nonperturbativity in large- Z effects for hydrogen-like atoms**K. A. Sveshnikov^{1,a}, D. I. Khomovskiy^{2,b}**¹*Department of Quantum Theory and High-Energy Physics;*²*Department of Quantum Statistics and Field Theory,**Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.**E-mail: ^acosta@bog.msu.ru, ^bkhomovskij@physics.msu.ru.*

The effects induced by the interaction $\Delta U_{\text{АММ}}$ of the anomalous component of the electron magnetic moment with the Coulomb field of a nucleus at $Z\alpha > 1$ are examined for the lower levels of a hydrogenlike atom within purely perturbative and essentially nonperturbative in α/π approaches. Owing to the specific features of the $\Delta U_{\text{АММ}}$ operator for a point-like Coulomb source, the distribution of the charge over the volume of the nucleus is set in the nonperturbative case at the quark structure level using valence (constituent) u and d quarks. It is demonstrated that such nonperturbative analysis turns out to be nontrivial as well as the manner in which its results are altered in the transition from the central problem with spherical symmetry to the inclusion of the peripheral contribution. It is also demonstrated that these methods yield matching (with an accuracy no worse than 0.1%) results for the shift of levels $1s_{1/2}$ and $2p_{1/2}$ due to $\Delta U_{\text{АММ}}$ at all values of Z through to critical ones. Thus, it is confirmed that the perturbation theory in α/π provides correct results for superheavy atoms if the complete dependence of the wave function on $Z\alpha$ is taken into account from the beginning.

Keywords: anomalous electron magnetic moment, Dirac–Pauli interaction, hydrogen-like atom, large Z values, radiative corrections.

PACS: 31.30.Jv.

Received 12 April 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 5. Pp. 465–475.

Сведения об авторах

1. Свешников Константин Алексеевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: costa@bog.msu.ru.
2. Хомовский Дмитрий Игоревич — науч. сотрудник; e-mail: khomovskij@physics.msu.ru.