

РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

О влиянии разброса электронов пучка по скоростям на механизм черенковского пучково-плазменного взаимодействияИ. Н. Карташов^a, М. В. Кузелев^b*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физической электроники. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: ^a kartashov@ph-elec.phys.msu.ru, ^b kuzelev@mail.ru*

Статья поступила 25.05.2016, подписана в печать 09.06.2016.

В линейном потенциальном приближении рассмотрена неустойчивость электронного пучка в холодной плазме для различных функций распределения электронов пучка по скоростям. Показано, что при увеличении разброса электронов пучка по скоростям происходит изменение механизма пучковой неустойчивости в плазме: гидродинамический одночастичный режим неустойчивости переходит в гидродинамический коллективный режим или в одночастичный кинетический режим. Аналитически и численно определены инкременты неустойчивости в различных режимах.

Ключевые слова: эффект Черенкова, пучково-плазменные неустойчивости, дисперсионное уравнение, инкремент неустойчивости.

УДК: 533.951. PACS: 52.35.-g.

Введение

Разброс электронов пучка по скоростям при описании явления черенковской пучковой неустойчивости в плазме может не учитываться при выполнении неравенства

$$|\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}| \gg kv_{\text{ТБ}}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}$ — скорость направленного движения электронов пучка, $v_{\text{ТБ}}$ — разброс скоростей («тепловая» скорость электронов пучка), ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор волны, возбуждаемой электронным пучком в плазме, $k = |\mathbf{k}|$. Поскольку при черенковской пучковой неустойчивости $\omega \approx \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$, неравенству (1) можно придать следующий вид:

$$|\delta\omega/\omega| \gg v_{\text{ТБ}}/u. \quad (2)$$

Здесь $\delta\omega$ — инкремент неустойчивости, $u = |\mathbf{u}|$. Неравенство (2) имеет простой смысл: за время развития неустойчивости перемещение электрона пучка за счет «теплого» движения мало по сравнению с длиной волны. При выполнении неравенств (1) или (2) пучковую неустойчивость называют гидродинамической. Если же выполнены противоположные неравенства, то говорят о кинетической пучковой неустойчивости. На самом деле, как будет показано ниже, пучковая неустойчивость может быть гидродинамической и при выполнении неравенств, противоположных неравенствам (1) или (2), — все зависит от вида функции распределения электронов пучка по скоростям. В настоящей работе рассмотрены некоторые вопросы линейной теории черенковских пучковых неустойчивостей в плазме в условиях, когда неравенства (1) и (2) не выполнены. Большое внимание уделено зависимости механизма

пучковой неустойчивости в плазме от функции распределения электронов пучка по скоростям.

Со времени открытия явления пучковой неустойчивости в плазме в 1949 г. [1, 2] написано громадное количество работ, посвященных ее исследованию. Результаты этих исследований подытожены в известнейших учебных пособиях и монографиях [3–6]. Множество работ посвящено и кинетической теории пучково-плазменных неустойчивостей [7–10]. В частности, кинетические эффекты при развитии пучковой неустойчивости учитываются в астрофизических приложениях [11]. Пучковые неустойчивости проявляются и в неравновесной плазме газового разряда [12–13], при этом характерные тепловые скорости могут оказаться одного порядка с направленной скоростью электронов. Возникает вопрос: зачем авторы настоящей работы опять обращаются к этой, казалось бы, исчерпанной теме? Дело в том, что некоторые аспекты гидродинамического и кинетического режимов пучково-плазменного взаимодействия до сих пор не привлекли, как нам кажется, должного внимания исследователей. Кроме того, дополнительное рассмотрение взаимодействия пучка и плазмы в условиях, когда неравенства (1) или (2) нарушены, обусловлено потребностями плазменной СВЧ-электроники [14]. Исходным пунктом большинства экспериментальных и теоретических работ по плазменной СВЧ-электронике является предположение о том, что неравенства (1) или (2) выполнены с большим запасом. И это действительно так, если речь идет о плазменных СВЧ-излучателях на релятивистских сильноточных электронных пучках, работающих в сантиметровом и субсантиметровом диапазонах длин волн. Проблемы возникают в более коротковолновом диапазоне: при увеличе-

нии частоты ω инкремент неустойчивости может уменьшаться¹, что приводит к нарушению неравенства (2).

1. Основные соотношения. Случай моноскоростного пучка

Рассмотрим безграничную холодную электронную плазму, пронизываемую безграничным нерелятивистским электронным пучком малой плотности. Направим координатную ось z вдоль вектора скорости направленного движения пучка, т.е. $\mathbf{u} = \{0, 0, u\}$, и ограничимся рассмотрением потенциальных волн, распространяющихся вдоль оси z , т.е. положим $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$. Частотный спектр $\omega(k)$ волн в такой плазменно-пучковой системе определяется из известного дисперсионного уравнения [15, 16]

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{k} \int \frac{\partial f_{0b}(\mathbf{v})}{\partial v_z} \frac{1}{\omega - kv_z} d\mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Здесь ω_p — ленгмюровская частота электронов плазмы, ω_b — ленгмюровская частота электронов пучка, $f_{0b}(\mathbf{v})$ — нормированная на единицу невозмущенная функция распределения электронов пучка по скоростям $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$, $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$. Заметим, что разброс электронов плазмы по скоростям можно учесть без труда, но здесь в этом нет необходимости. В отличие от пучка условие, при котором тепловым движением электронов плазмы можно пренебречь, имеет вид $|\omega| \gg kv_{Tp}$ (v_{Tp} — тепловая скорость электронов плазмы), что при черенковской пучковой неустойчивости в плазме сводится к легко выполнимому неравенству $v_{Tp}/u \ll 1$. В соответствии с правилом Ландау [17] интегрирование по dv_z в уравнении (3) осуществляется по контуру на комплексной плоскости $v_z = v'_z + iv''_z$, обходящему особую точку ω/k снизу. Малость плотности электронов пучка означает, что выполнено неравенство

$$\omega_b^2 \ll \omega_p^2. \quad (4)$$

В случае моноскоростного электронного пучка с функцией распределения

$$f_{0b}(\mathbf{v}) = \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z - u) \quad (5)$$

дисперсионное уравнение (3) приводится к следующему виду [15]:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - ku)^2} = 0. \quad (6)$$

При выполнении неравенства (4) решения дисперсионного уравнения (6) определяются извест-

ными формулами [15] (для определенности полагаем $k > 0$)

$$ku \neq \omega_p: \begin{cases} \omega_{1,2} = ku \pm \begin{cases} i \frac{\omega_b}{\sqrt{\omega_p^2 - k^2 u^2}} ku, & ku < \omega_p, \\ \frac{\omega_b}{\sqrt{k^2 u^2 - \omega_p^2}} ku, & ku > \omega_p, \end{cases} \\ \omega_3 = \omega_p, \\ \omega_4 = -\omega_p, \end{cases} \quad (7)$$

$$ku = \omega_p: \begin{cases} \omega_{1,2} = ku + \left(-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\omega_b^2}{2\omega_p^2} \right)^{1/3} \omega_p, \\ \omega_3 = ku + \left(\frac{\omega_b^2}{2\omega_p^2} \right)^{1/3} \omega_p, \\ \omega_4 = -\omega_p. \end{cases} \quad (8)$$

Формулы (8) описывают резонансную черенковскую пучковую неустойчивость в плазме ($\text{Im } \omega_1 > 0$). Ее также называют неустойчивостью при одночастичном вынужденном эффекте Черенкова [18]². Формулы (7) при $ku < \omega_p$ описывают аperiодическую (нерезонансную) пучковую неустойчивость в плазме. Согласно известной классификации [19] она относится к неустойчивостям типа неустойчивостей отрицательной массы.

Дисперсионное уравнение (6) можно переписать в виде

$$(\omega^2 - \omega_p^2) [(\omega - ku)^2 - \omega_b^2] = \omega_p^2 \omega_b^2. \quad (9)$$

При такой форме записи явно выделены две взаимодействующие подсистемы: пучковая — с дисперсионным уравнением $(\omega - ku)^2 - \omega_b^2 = 0$ и плазменная — с дисперсионным уравнением $\omega^2 - \omega_p^2 = 0$. В точках резонанса пучковых и плазменной волн решение уравнения (9) следует искать в виде

$$\omega = \omega_p + \delta\omega = ku \pm \omega_b + \delta\omega, \quad (10)$$

где $\delta\omega$ — поправка к частоте, обусловленная взаимодействием волн. Оказывается, что при выполнении неравенства (4) будет $\omega_b \ll |\delta\omega|$. Поэтому условие резонанса волн сводится к условию черенковского резонанса $\omega = ku$, а $\delta\omega$ берется из формул (8). Таким образом, в случае моноскоростного пучка малой плотности (4) возможен только одночастичный вынужденный эффект Черенкова. Ниже будет показано, что при наличии разброса электронов пучка по скоростям оказывается возможным и коллективный вынужденный эффект Черенкова.

¹ В случае черенковских излучателей на поверхностных (кабельных) плазменных волнах при увеличении частоты экспоненциально уменьшается связь между пучком и плазменной волной, что приводит к изменению режима пучковой неустойчивости в плазме — одночастичный (комптоновский) режим трансформируется в коллективный (рамановский), что и влечет резкое уменьшение инкремента.

² В иностранной литературе эту неустойчивость называют также вынужденным эффектом Комптона.

2. Пучковая неустойчивость в гидродинамическом приближении с учетом газокинетического давления

Зададим функцию распределения электронов пучка по скоростям в виде

$$f_{0b}(v) = \delta(v_x) \delta(v_y) \Delta(v_z - u), \quad (11)$$

$$\Delta(v_z - u) = (2v_{Tb})^{-1} \begin{cases} 1, & v_z \in [u - v_{Tb}, u + v_{Tb}], \\ 0, & v_z \notin [u - v_{Tb}, u + v_{Tb}]. \end{cases}$$

Подставляя распределение (11) в уравнение (3) и выполняя элементарное интегрирование, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - ku)^2 - k^2 v_{Tb}^2} = 0. \quad (12)$$

При $v_{Tb} = 0$ уравнение (12) переходит в уравнение (6) и эффекты, связанные с разбросом электронов пучка по скоростям, исчезают. Перепишем уравнение (12) в виде, аналогичном (9):

$$(\omega^2 - \omega_p^2)[(\omega - ku)^2 - k^2 v_{Tb}^2 - \omega_b^2] = \omega_p^2 \omega_b^2. \quad (13)$$

Такая форма записи позволяет рассматривать пучково-плазменную неустойчивость как неустойчивость в системе связанных волн плазмы и пучка. Правую часть в (13) можно трактовать как коэффициент связи между этими волнами. Если связи нет ($\omega_b \rightarrow 0$), то уравнение (13) сводится к произведению двух независимых сомножителей. Равенство нулю первого сомножителя определяет спектр плазменных волн, равенство нулю второго сомножителя — спектр пучковых волн. В условиях резонанса плазменных и пучковых волн, т.е. при ω и k , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \omega = \omega_p, \\ \omega = ku \pm \sqrt{k^2 v_{Tb}^2 + \omega_b^2}, \end{cases} \quad (14)$$

решение уравнения (13) следует искать в виде $\omega = \omega_p + \delta\omega$ (см. (10)), что после подстановки в (13) приводит к следующему уравнению:

$$\delta\omega^2 \left(\delta\omega \pm 2\sqrt{k^2 v_{Tb}^2 + \omega_b^2} \right) = \frac{\omega_b^2 \omega_p}{2}. \quad (15)$$

Верхний знак в (15) должен быть взят при резонансе плазменной волны с быстрой пучковой волной, нижний знак — при резонансе плазменной волны с медленной волной пучка. При выполнении неравенства

$$|\delta\omega| \gg \sqrt{k^2 v_{Tb}^2 + \omega_b^2} \quad (16)$$

решения уравнения (15) $\delta\omega_{1,2,3}$ приведены в формулах (8) — поправки к основному слагаемому ku в выражениях для $\omega_{1,2,3}$. Если выполнено неравенство противоположное (16), то неустойчивость возникает только при резонансе плазменной волны

с медленной пучковой волной — нижний знак в уравнении (15). При этом

$$\delta\omega_{1,2} = \pm i \frac{\omega_b \omega_p^{1/2}}{2(k^2 v_{Tb}^2 + \omega_b^2)^{1/4}}. \quad (17)$$

Неустойчивость с инкрементом $\delta\omega_1$ (17) соответствует неустойчивости при коллективном вынужденном эффекте Черенкова [18]¹. Условие применимости решения (17) — неравенство, противоположное (16), — сводится к условию

$$\omega_b^2 \omega_p \ll (k^2 v_{Tb}^2 + \omega_b^2)^{3/2}. \quad (18)$$

При отсутствии разброса электронов пучка по скоростям, при выполнении неравенства (4), условие (18) удовлетворено быть не может. Однако если разброс по скоростям велик, то (18) сводится к неравенству $\omega_b^2 \omega_p \ll k^3 v_{Tb}^3$, которое вполне выполнимо. Таким образом, при увеличении разброса электронов плазмы по скоростям происходит изменение механизма резонансной черенковской пучковой неустойчивости в плазме — одночастичный режим неустойчивости трансформируется в коллективный режим.

Результаты численного решения дисперсионного уравнения (13) представлены на рис. 1, 2. Для расчетов здесь и далее взято следующее отношение плотностей электронного пучка и плазмы: $\omega_b^2/\omega_p^2 = 0.01$. В случае рис. 1 $v_{Tb}/u = 0.02$, а в случае рис. 2 $v_{Tb}/u = 0.2$. Сплошными кривыми показаны вещественные значения частоты (шкала на левой вертикальной оси), штриховыми (шкала на правой оси) — мнимые части частоты (инкременты неустойчивости), пунктирная прямая — линия черенковского резонанса $\omega = ku$. Между рис. 1 и 2 имеется кардинальное различие. Значение $v_{Tb}/u = 0.02$ соответствует почти моноскоростному пучку: неравенство (16), хотя и не сильное, выполнено, а поэтому в резонансе реализуется одночастичный вынужденный эффект Черенкова. При этом область неустойчивости простирается от $k = 0$ до значения, несколько превосходящего $k = \omega_p/u$. Дисперсионные кривые на рис. 1 хорошо согласуются с формулами (7) и (8). Структура дисперсионных кривых на рис. 2 качественно иная: область неустойчивости сузилась, поскольку длинноволновые возмущения являются устойчивыми. При $v_{Tb}/u = 0.2$ выполнено неравенство, обратное (16), поэтому реализуется коллективный вынужденный эффект Черенкова, что и сказывается на структуре дисперсионных кривых. Максимум инкремента по рис. 2 неплохо согласуется со значением (17).

Неустойчивости, которые мы рассмотрели выше, являются гидродинамическими неустойчивостями. Это относится и к неустойчивости с инкрементом (17), хотя для развития данной неустойчивости требуется наличие достаточно большого разброса

¹ В иностранной литературе эту неустойчивость называют также вынужденным эффектом Рамана.

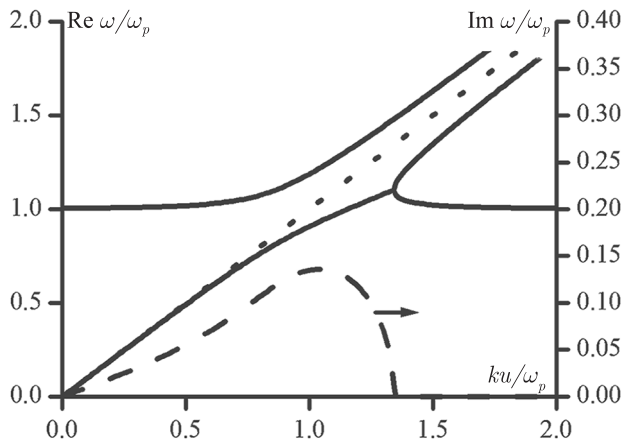


Рис. 1. Дисперсионные кривые пучково-плазменной системы с учетом газокINETического давления в пучке при $v_{Tb}/u = 0.02$: вещественная часть частоты (сплошные линии, левая ось) и инкремент неустойчивости (штриховая линия, правая ось). Пунктирная линия — прямая $\omega = ku$

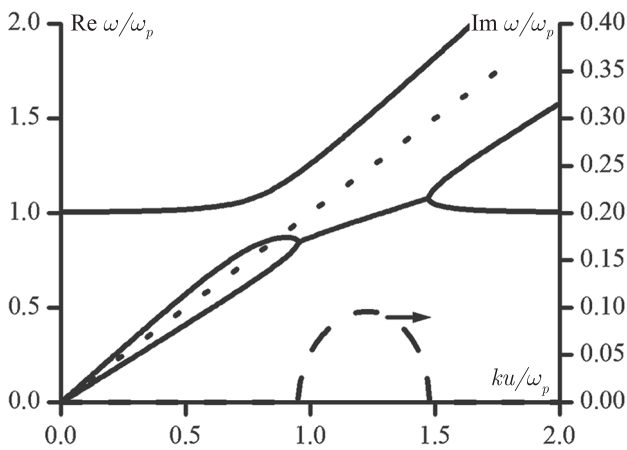


Рис. 2. Дисперсионные кривые пучково-плазменной системы с учетом газокINETического давления в пучке при $v_{Tb}/u = 0.2$: вещественная часть частоты (сплошные линии, левая ось) и инкремент неустойчивости (штриховая линия, правая ось). Пунктирная линия — прямая $\omega = ku$

электронов пучка по скоростям. Дело в том, что интеграл по dv_z в дисперсионном уравнении (3) из-за наличия особой точки, вообще говоря, является комплексным. Поэтому и дисперсионное уравнение (3) может в явном виде содержать мнимую часть. О кинетической неустойчивости следует говорить только тогда, когда инкремент неустойчивости получается именно из мнимой части дисперсионного уравнения¹. В противном случае неустойчивость следует считать гидродинамической. Легко видеть, что в случае распределения (11) особая точка вкладывает в интеграл не дает. В результате дисперсионное уравнение (12) оказывается алгебраическим уравнением с вещественными коэффициентами.

К дисперсионному уравнению (12) можно также прийти, если взять следующую функцию распреде-

ления электронов пучка по скоростям:

$$f_{0b}(v) = \frac{m}{4\pi v_{Tb}} \delta\left(\frac{m[v_x^2 + v_y^2 + (v_z - u)^2]}{2} - \frac{mv_{Tb}^2}{2}\right). \quad (19)$$

Функция распределения (19) соответствует ситуации, когда пучок получается в результате ускорения изотропно распределенных электронов, имеющих одинаковую энергию $mv_{Tb}^2/2$. Более того, дисперсионное уравнение (12) получается и в гидродинамической модели, когда для описания электронов пучка используются уравнения гидродинамики с газокINETическим давлением $P = \rho v_{Tb}^2$, где ρ — плотность электронного газа.

3. Неустойчивость пучка с максвелловской функцией распределения электронов по скоростям

Рассмотрим теперь электронный пучок со «сдвинутой» максвелловской функцией распределения электронов по скоростям

$$f_{0b}(v) = (2\pi v_{Tb}^2)^{-3/2} \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + (v_z - u)^2}{2v_{Tb}^2}\right). \quad (20)$$

Подстановка распределения (20) в общее уравнение (3) приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{k^2 v_{Tb}^2} \left(1 - J_+ \left(\frac{\omega - ku}{kv_{Tb}}\right)\right) = 0. \quad (21)$$

Здесь введена известная функция [15, 20]

$$J_+(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_C \frac{\exp(-\xi^2/2)}{x - \xi} d\xi, \quad (22)$$

а контур C начинается и заканчивается на вещественной оси ξ при $\xi = \mp\infty$ и проходит ниже особой точки $\xi = x$.

Исследуем с помощью дисперсионного уравнения (21) переход к пределу моноскоростного электронного пучка ($v_{Tb} \rightarrow 0$). Воспользуемся известным асимптотическим разложением [15, 20]: при $|x| \gg 1$ и $\text{Im } x > 0$ имеем

$$J_+(x) \approx 1 + 1/x^2. \quad (23)$$

Если же $\text{Im } x < 0$, то формула (23) верна только, если $|\text{Re } x| > |\text{Im } x|$. С учетом формулы (23) несложно видеть, что при выполнении неравенства (1) дисперсионное уравнение (21) переходит в уравнение (6). Однако не все решения уравнения (6) могут быть получены из решений уравнения (21) предельным переходом к моноскоростному пучку. В случае решений с положительной и нулевой мнимой частью ($\omega_{1,3,4}$ в формулах (7) и (8)) никаких сложностей нет: эти решения получаются из уравнения (21) при $v_{Tb} \rightarrow 0$ (см. далее). Для применимости решения ω_1

¹ Не следует путать с диссипативными неустойчивостями, типа неустойчивости системы с отрицательным трением.

из формул (8) требуется выполнение неравенства (см. (2))

$$v_{Tb}/u \ll (\omega_b^2/2\omega_p^2)^{1/3}, \quad (24)$$

а условие применимости решения ω_1 из формул (7) оказывается более жестким:

$$v_{Tb}/u \ll \omega_b/\omega_p. \quad (25)$$

Что касается решений с отрицательной мнимой частью (ω_2 в формулах (7) и (8)), то они в пределе $v_{Tb} \rightarrow 0$ из уравнения (21) не следуют. Действительно, если положить $x = (\omega_2 - ku)/kv_{Tb}$, то будет $|\operatorname{Re} x| < |\operatorname{Im} x|$, а потому асимптотическая формула (23) неверна. Таким образом, применительно к решениям дисперсионных уравнений, описывающих нарастающие при пучковой неустойчивости волны, никаких проблем нет. Проблемы возникают только в отношении решений, описывающих затухающие волны. Казалось бы, проблемы теории, связанные с затухающими волнами, вообще не стоит обсуждать. Это не совсем так, поскольку при решении начальных и граничных задач, для удовлетворения начальных и граничных условий требуется корректный учет всех волн как нарастающих, так и затухающих [21]. Понятно, что определенная нестыковка при переходе от кинетического к гидродинамическому описанию пучка заслуживает дополнительного исследования, что в задачи настоящей работы не входит.

Пусть теперь выполнено неравенство, противоположное неравенству (1). Тогда, используя асимптотическое разложение [15, 20]

$$J_+(x) \approx -i\sqrt{\pi/2}x, \quad |x| \ll 1, \quad (26)$$

преобразуем дисперсионное уравнение (21) к следующему виду:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{k^2 v_{Tb}^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_b^2(\omega - ku)}{k^3 v_{Tb}^3} = 0. \quad (27)$$

Решая уравнение (27) методом последовательных приближений, находим $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, где

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_p^2}{1 + \omega_b^2/(k^2 v_{Tb}^2)}, \quad \delta\omega = -i\sqrt{\frac{\pi}{8}}(\omega_0 - ku) \frac{\omega_b^2 \omega_0^3}{\omega_p^2 k^3 v_{Tb}^3}. \quad (28)$$

Видно, что при $ku > \omega_0$ мнимая часть частоты положительна, т.е. имеет место пучковая неустойчивость. Неустойчивость эта кинетическая, что следует из того, что дисперсионное уравнение (27) является алгебраическим уравнением с комплексными коэффициентами (в отличие, например, от уравнений (6) и (12)).

Уравнение (27) и формулы (28) применимы только при выполнении неравенств, противоположных (1) и (2). В общем случае получение аналитических результатов не представляется возможным. Поэтому проанализируем численные решения уравнения (21) для $\omega_b^2/\omega_p^2 = 0.01$, варьируя отношение v_{Tb}/u . На рис. 3 представлены численные решения

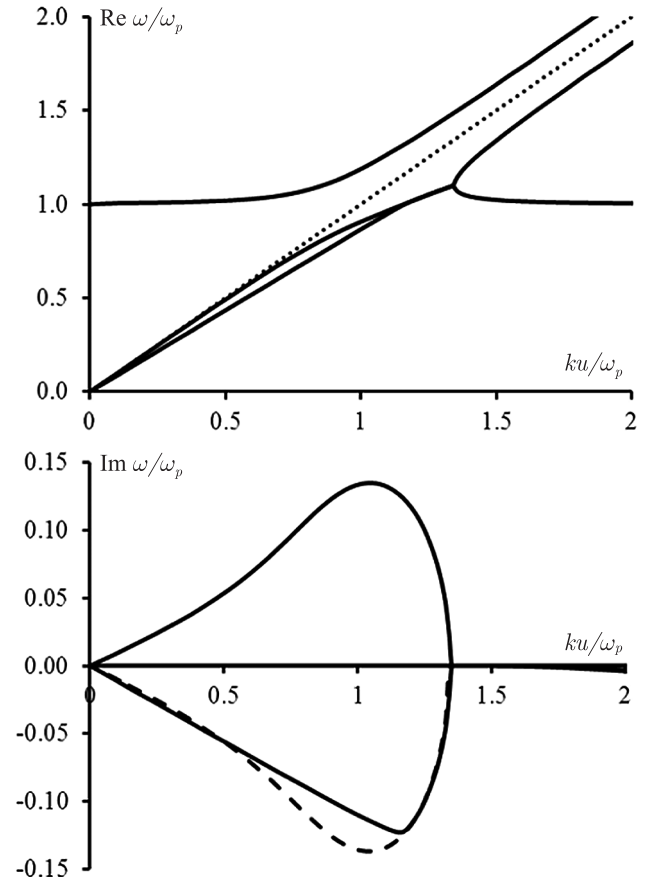


Рис. 3. Дисперсионные кривые пучково-плазменной системы с максвелловским распределением электронов пучка по скоростям при $v_{Tb}/u = 0.02$: вещественная часть частоты (верхний график) и мнимая часть частоты (нижний график). Пунктирная линия — прямая $\omega = ku$

дисперсионного уравнения (21) при малом значении $v_{Tb}/u = 0.02$. Эти решения согласуются с предельными решениями $\omega_{1,2,3}$, представленными в формулах (7) и (8). Максимум инкремента достигается при условии резонанса $\omega_p \approx ku$ и соответствует значению, даваемому формулами (8). В целом численные результаты при $v_{Tb}/u = 0.02$ совпадают с аналитическими результатами в пределе холодного электронного пучка. Исключение составляет ветвь с $\operatorname{Im} \omega < 0$, соответствующая затухающим колебаниям (штриховой линией на рис. 3 изображено решение дисперсионного уравнения (6) с $\operatorname{Im} \omega < 0$). Это отличие сохраняется при любом сколь угодно малом отличии v_{Tb}/u от нуля и связано с невозможностью использования асимптотического разложения (23) при $\operatorname{Im} x < 0$ и $|\operatorname{Re} x| < |\operatorname{Im} x|$.

При дальнейшем увеличении разброса по скоростям в пучке, начиная со значений $v_{Tb}/u = 0.1$, дисперсионное уравнение (6) уже неприменимо. На рис. 4 представлены зависимости инкремента неустойчивости от волнового числа для различных значений v_{Tb}/u . С увеличением разброса по скоростям максимум инкремента понижается и сдвигается в коротковолновую область. При этом область

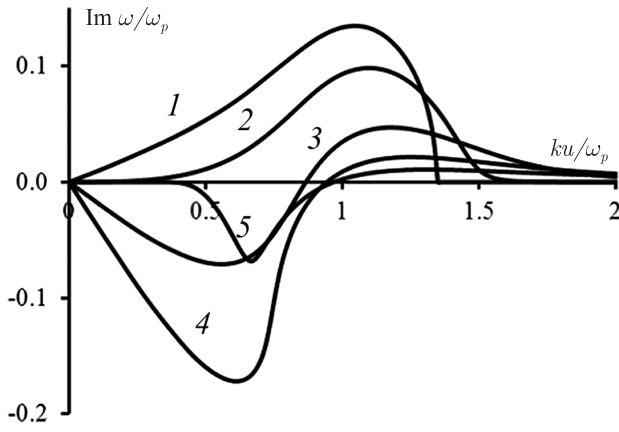


Рис. 4. Инкремент пучковой неустойчивости системы с максвелловским распределением электронов пучка по скоростям для различных значений v_{Tb}/u : 0.02 (кривая 1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.3 (4), 0.4 (5)

неустойчивости расширяется и также смещается в область больших значений волнового числа, а при малых значениях ku/ω_p неустойчивость исчезает.

4. Неустойчивости пучка с модифицированными максвелловскими функциями распределения электронов по скоростям

Из экспериментальных работ по плазменной СВЧ-электронике трудно извлечь достаточную информацию о функции распределения электронов пучка по скоростям. Однако для дальнейшего развития теории пучковых неустойчивостей в плазме такая информация весьма желательна. Дело в том, что комплексные частоты волн в пучково-плазменной системе сильно зависят от вида функции распределения электронов пучка. Это подтверждается вышеизложенными результатами, а также видно из следующих двух примеров. Рассмотрим вначале электронный пучок с «полумаксвелловской» функцией распределения электронов по скоростям

$$f_{0b}(v) = 2(2\pi v_{Tb}^2)^{-3/2} \times \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + (v_z - u)^2}{2v_{Tb}^2}\right) \theta(v_z - u), \quad (29)$$

где $\theta(\xi)$ — ступенчатая функция Хевисайда (она равна единице при $\xi > 1$ и нулю в противном случае). В системах, основанных на взаимодействии ускоренного потока электронов с плазмой, длина свободного пробега электронов пучка может оказаться больше, чем характерные продольные размеры системы. В этом случае реализуется бесстолкновительный режим пролета электронов и вполне обоснованным является предположение о том, что функция распределения электронов имеет вид (29). Вопросы, связанные с развитием пучковых неустойчивостей в космосе, в частности, когда функция распределения содержит особенности типа ступеньки, рассматривались в [22].

Подставляя функцию (29) в дисперсионное уравнение (3) и проделывая вычисления аналогичные проделанным при получении уравнения (21), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{k^2 v_{Tb}^2} \times \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \int_0^\infty \frac{\exp(-\xi^2/2)}{x - \xi} d\xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x}\right) = 0, \quad (30)$$

где $x = (\omega - ku)/(kv_{Tb})$, а интегрирование подразумевается по контуру, проходящему вдоль положительной полуоси и огибающему особую точку $\xi = x$ снизу. Преобразуя интеграл в уравнении (30), имеем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} x \int_0^\infty \frac{\exp(-\xi^2/2)}{x - \xi} d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \int_0^\infty \frac{\exp(-\xi^2/2)}{x^2 - \xi^2} d\xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \int_0^\infty \frac{\xi \exp(-\xi^2/2)}{x^2 - \xi^2} d\xi. \quad (31)$$

Как легко проверить, первое слагаемое в правой части соотношения (31) есть функция $J_+(x)$. Второе слагаемое с помощью замены переменной интегрирования может быть выражено через интегральную экспоненциальную функцию

$$\text{Ei}(x) = -\text{V.p.} \int_{-x}^\infty \xi^{-1} \exp(-\xi) d\xi. \quad (32)$$

В результате дисперсионное уравнение (30) перепишется в виде

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{k^2 v_{Tb}^2} \left(1 - J_+(x) - \frac{x \exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} (\text{Ei}(x^2/2) - i\pi) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x}\right) = 0. \quad (33)$$

При больших значениях $|x|$, т.е. в пределе монотонного пучка (1), дисперсионное уравнение (33) переходит в уравнение (6). В обратном предельном случае доминирующим является последнее слагаемое в круглых скобках в (33) и дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_b^2}{(\omega - ku)kv_{Tb}} = 0. \quad (34)$$

Последнее уравнение можно представить в форме взаимодействия пучковой и плазменной волн

$$(\omega^2 - \omega_p^2) \left(\omega - ku + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_b^2}{kv_{Tb}}\right) = -\omega_p^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_b^2}{kv_{Tb}}. \quad (35)$$

Решения уравнения (35), описывающие нарастающие при неустойчивости волны, следует искать в виде

$$\omega = \omega_p + \delta\omega, \quad |\delta\omega| \ll \omega_p. \quad (36)$$

Причем неравенство в (36) означает, что при неустойчивости пучком возбуждается (излучается)

плазменная волна, а не какое-то сложное плазменно-пучковое возмущение. На языке теории связанных волн это неравенство означает, что связь между плазменной волной и волной пучка является слабой [21, 23].

Подставляя (36) в уравнение (35), преобразуем его к виду

$$\delta\omega(\delta\omega + \Delta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\omega_p \frac{\omega_b^2}{kv_{Tb}} = 0, \quad (37)$$

где

$$\Delta = \omega_p - ku + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_b^2}{kv_{Tb}} \quad (38)$$

— расстройка резонанса волн. Из уравнения (37) имеем

$$\delta\omega = -\frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\omega_p \frac{\omega_b^2}{kv_{Tb}}}. \quad (39)$$

Максимальный инкремент

$$\delta\omega = i \frac{\omega_b}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\omega_p}{kv_{Tb}} \right)^{1/2} \quad (40)$$

реализуется при нулевой расстройке, причем неравенство в (36) сводится к следующему:

$$\frac{\omega_b}{\omega_p} \ll \left(\frac{kv_{Tb}}{\omega_p} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{v_{Tb}}{u} \right)^{1/2}. \quad (41)$$

При написании оценки (41) было использовано неравенство (4).

Согласно принятой нами классификации неустойчивость с инкрементами (39) и (40) относится к гидродинамическим неустойчивостям. Она обусловлена тем, что взаимодействующая с плазменной волной волна пучка $\omega = ku - \sqrt{2\pi}^{-1}\omega_b^2/(kv_{Tb})$ имеет отрицательную энергию. Вместе с тем следует отметить, что для описания волны пучка использовалось кинетическое описание.

Результаты численного решения дисперсионного уравнения (33) для $\omega_b^2/\omega_p^2 = 0.01$ представлены на рис. 5. При $v_{Tb}/u = 0.02$ инкремент неустойчивости (кривая 1) практически не отличается от инкремента неустойчивости при взаимодействии холодного пучка с плазмой. С увеличением разброса скоростей электронов в пучке область неустойчивости сужается, положение максимума инкремента практически не меняется, а его величина незначительно понижается. При достаточно большом разбросе $v_{Tb}/u > 0.4$ результаты численного решения совпадают с тем, что получается из аналитических формул (39), (40).

Наконец, рассмотрим развитие пучково-плазменных неустойчивостей в бесстолкновительных системах, в которых эмитированный с поверхности катода электронный пучок ускоряется приложенной разностью потенциалов. Эмитированный пучок имеет функцию распределения

$$f_{0b}(\mathbf{v}) = A \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2v_{Tb}^2}\right) \theta(v_z), \quad (42)$$

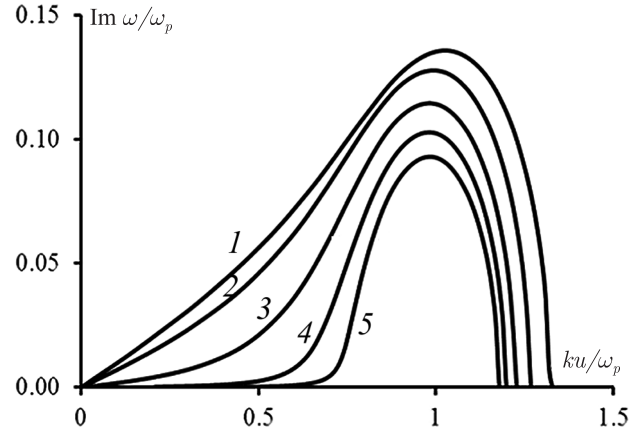


Рис. 5. Инкремент пучковой неустойчивости системы с полумаксвелловским распределением электронов пучка по скоростям для различных значений v_{Tb}/u : 0.02 (кривая 1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.3 (4), 0.4 (5)

в которой нормировочную постоянную определим позже, исходя из параметров пучка в пространстве взаимодействия с плазменной волной. Проходя ускоряющий промежуток с разностью потенциалов V , электрон приобретает дополнительную энергию $mu^2/2 = eV$ и функция распределения трансформируется к виду

$$f_{0b}(\mathbf{v}) = A \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - u^2}{2v_{Tb}^2}\right) \theta(v_z - u). \quad (43)$$

В реальных системах плазменной СВЧ-электроники выполняется соотношение $v_{Tb} \ll u$, что означает сильную локализацию функции распределения вблизи $v_z = u$ и позволяет приближенно записать (43) в виде

$$f_{0b}(\mathbf{v}) = A \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + 2u(v_z - u)}{2v_{Tb}^2}\right) \theta(v_z - u). \quad (44)$$

Считая, что в области взаимодействия пучка с плазменной волной концентрация электронов в пучке равна n_b , определяем нормировочную постоянную A и окончательно записываем функцию распределения электронов пучка в виде

$$f_{0b}(\mathbf{v}) = \sqrt{2\pi} \frac{u}{v_{Tb}} (2\pi v_{Tb}^2)^{-3/2} \times \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + 2u(v_z - u)}{2v_{Tb}^2}\right) \theta(v_z - u). \quad (45)$$

Подставляя функцию (45) в дисперсионное уравнение (3) и проделывая вычисления, аналогичные проделанным при получении уравнения (30), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{k^2 v_{Tb}^2} \frac{u^2}{v_{Tb}^2} \left(-e^{-x} (\text{Ei}(x) - i\pi) + \frac{1}{x} \right) = 0, \quad (46)$$

где $x = (\omega - ku)u/(kv_{Tb}^2)$, а функция $\text{Ei}(x)$ определена соотношением (32).

В пределе моноскоростного пучка, т. е. при больших значениях $|x|$, дисперсионное уравнение (46)

переходит в уравнение (6). В обратном предельном случае доминирующим является слагаемое $1/x$ в (46), и дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{u}{v_{Tb}} \frac{\omega_b^2}{(\omega - ku)kv_{Tb}} = 0. \quad (47)$$

С точностью до обозначений (47) совпадает с проанализированным выше уравнением (34). Отличие состоит в эффективном увеличении плотности пучка за счет фактора u/v_{Tb} . Фактически повторяя приведенные выше рассуждения, получим в условиях (36) значение инкремента неустойчивости

$$\delta\omega = -\frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \omega_p \frac{u}{2v_{Tb}} \frac{\omega_b^2}{kv_{Tb}}} \quad (48)$$

с расстройкой

$$\Delta = \omega_p - ku + \frac{u}{v_{Tb}} \frac{\omega_b^2}{kv_{Tb}}. \quad (49)$$

Максимальный инкремент реализуется при $\Delta = 0$ и составляет

$$\delta\omega = i\omega_b \left(\frac{u}{2v_{Tb}} \frac{\omega_p}{kv_{Tb}} \right)^{1/2}. \quad (50)$$

Условие (36) при этом сводится к более жесткому неравенству

$$\frac{\omega_b}{\omega_p} \ll \frac{v_{Tb}}{u}. \quad (51)$$

Сравнивая дисперсионные уравнения (34) и (47), а также выражения для инкрементов (40) и (50), видим, что в случае пучка с функцией распределения (45) тепловые эффекты проявляются при меньшем значении плотности электронного пучка.

Заключение

В работе проведен анализ влияния разброса электронов пучка по скоростям при его неустойчивости в плазме. Традиционным для плазменной СВЧ-электроники является приближение моноскоростного электронного пучка, справедливое при выполнении условия (2). При нарушении указанного условия необходим учет отличия функции распределения электронов от δ -образного вида. Точный вид функции распределения в большинстве случаев неизвестен, поэтому нами проведен сравнительный анализ различных функций распределения, построенных из простых физических соображений. В частности, описание моноскоростного электронного пучка модифицировано посредством учета газокINETического давления. Кроме того, рассмотрены полностью термализованный электронный пучок с максвелловской функцией распределения и пучок с модифицированными максвелловскими распределениями электронов по скоростям. Последнее приближение является более адекватным для описания бесстолкновительных пучково-плазменных систем плазменной СВЧ-электроники.

Во всех рассмотренных приближениях можно выделить два режима пучковой неустойчивости: одночастичный и коллективный. Одночастичный режим неустойчивости реализуется при малом разбросе электронов пучка по скоростям и характеризуется широкой областью волновых чисел (от нуля до значения вблизи ω_p/u), где проявляется неустойчивость. При увеличении разброса по скоростям область неустойчивости локализуется вблизи резонансного значения волнового числа ($\sim \omega_p/u$), длинноволновые возмущения стабилизируются и режим неустойчивости становится коллективным. С увеличением разброса электронов пучка по скоростям значения инкрементов неустойчивости понижаются. Однако их зависимости от параметров системы существенно различны для различных функций распределения. Так, в полностью термализованном электронном пучке при увеличении температуры значения инкремента неустойчивости убывают существенно быстрее, чем в случае пучка с полумаксвелловским распределением. Более того, механизмы неустойчивостей пучков с максвелловским и полумаксвелловским распределениями при большом разбросе электронов пучка по скоростям существенно различаются. Если в первом случае неустойчивость кинетическая (взаимодействие волна-частица), то во втором механизмом неустойчивости является коллективное взаимодействие волна-волна.

Список литературы

1. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. // ДАН СССР. 1949. **69**, № 4. С. 555.
2. Bohm D., Gross E.P. // Phys. Rev. 1949. **75**, N 12. P. 1864.
3. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. М.: Атомиздат, 1975.
4. Иванов А.А. Физика сильнонеравновесной плазмы. М.: Атомиздат, 1977.
5. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. (Kuzelev M.V., Rukhadze A.A. Basics of Plasma Free Electron Lasers. Paris: Editions Frontieres, 1995.)
6. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
7. Misra K.D., Singh B.D., Mishra S.P. // Plasma Physics. 1978. **20**. P. 1113.
8. Amein W.H., Sayed Y.A. // Physica Scripta. 1994. **50**. P. 147.
9. Sauer K., Sydora R.D. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2012. **54**. P. 124045.
10. Bret A., Gremillet L. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2006. **48**. P. B405.
11. Karlicky M. // The Astrophysical Journal. 2009. **690**. P. 189.
12. Berezina G.P., Us V.S. // Plasma Physics Reports. 2011. **37**, N 13. P. 1156.
13. Клыков И.Л., Тараканов В.П., Шустин Е.Г. // Физика плазмы. 2012. **38**, № 3. С. 290. (Klykov I.L., Tarakanov V.P., Shustin E.G. // Plasma Physics Reports. 2012. **38**, N 3, P. 263.)

14. Стрелков П.С., Тараканов В.П., Иванов И.Е., Шумейко Д.В. // Физика плазмы. 2015. **41**, № 6. С. 533. (Strelkov P.S., Tarakanov V.P., Ivanov I.E., Shumeiko D.V. // Plasma Physics Reports, 2015. **41**, N 6. P. 492.)
15. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. (Aleksandrov A.F., Bogdankevich L.S., Rukhadze A.A. Principles of Plasma Electrodynamics. Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.)
16. Ахиезер А.И. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
17. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1946. **16**. С. 574. (Landau L.D. // J. Phys. USSR. 1946. **10**. P. 25.)
18. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // УФН. 1987. **152**. С. 285. (Kuzelev M.V., Rukhadze A.A. // Sov. Phys. Usp. 1987. **30**. P. 507.)
19. Богданов В.В., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // Физика плазмы. 1984. **10**, № 6. С. 548.
20. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Атомиздат, 1961.
21. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Методы теории волн в средах с дисперсией. М.: Физматлит, 2007. (Kuzelev M.V., Rukhadze A.A. Methods of Waves Theory in Dispersive Media. Zürich: World Publisher, 2009.)
22. Трахтенгерц В.Ю., Райкрофт М.Дж. Свистовые и альфвеновские циклотронные мазеры в космосе. М.: Физматлит, 2011. (Trakhtengerts V.Yu., Rycroft M.J. Wistler and Alfvén Mode Cyclotron Masers in Space. Cambridge University Press, 2008.)
23. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. (Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P. Physical Kinetics. Pergamon Press, 1981.)

On the influence of the electron-velocity spread in a beam on the mechanism of Cherenkov beam-plasma interaction

I. N. Kartashov^a, M. V. Kuzelev^b

Department of Physical Electronics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^akartashov@ph-elec.phys.msu.ru, ^bkuzelev@mail.ru.

The instability of an electron beam in cold plasma is considered in the linear potential approximation with different velocity-distribution functions of beam electrons. It is demonstrated that the mechanism of beam instability in plasma changes as the electron-velocity spread is increased: the hydrodynamic singleparticle instability mode evolves into the hydrodynamic collective mode or the single-particle kinetic one. Instability growth rates in different modes are determined analytically and numerically.

Keywords: Cherenkov effect, beam-plasma instabilities, dispersion equation, instability growth rate.

PACS: 52.35.-g.

Received 25 May 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 6. Pp. 537–544.

Сведения об авторах

1. Карташов Игорь Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-25-47, e-mail: igorkartashov@ph-elec.phys.msu.ru.
2. Кузелев Михаил Викторович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-25-47, e-mail: kuzelev@mail.ru.