

СТАТЬИ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Гибридный метод решения уравнения Пуассона в области с металло-диэлектрическими углами

А. Н. Боголюбов, А. И. Ерохин, И. Е. Могилевский, М. И. Светкин^а

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

E-mail: ^а mihail-svetkin@mail.ru

Статья поступила 15.06.2016, подписана в печать 27.06.2016.

Рассматривается двумерная задача для уравнения Пуассона в области, содержащей металло-диэлектрические углы звездного типа, которые могут быть как только металлическими, так и диэлектрическими. В их окрестности решение является ограниченным, а градиент имеет степенную особенность. Предлагается численный алгоритм решения данной задачи, основанный на методе конечных элементов и учитывающий асимптотическое поведение особенности решения в окрестности металло-диэлектрических углов.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, металло-диэлектрический угол, метод конечных элементов.

УДК: 519.632.4, 51-73, 537.213. *PACS:* 02.70.Dh.

Введение

Во многих задачах электростатики и электродинамики требуется найти электромагнитное поле в сложных областях, содержащих металлические или диэлектрические входящие углы. В качестве примера подобных задач можно привести расчет распределения поля внутри многоззорной волноводной системы, заполненной диэлектриками с различными коэффициентами диэлектрической проницаемости.

Наличие особенности электромагнитного поля, заключающееся в неограниченном росте некоторых его компонент вблизи металлического входящего угла, известно как теоретически [1–5], так и экспериментально [6–8]. Особенность поля также имеет место и при наличии диэлектрических углов [9]. В настоящей работе рассматривается случай, когда область содержит металло-диэлектрический угол звездного типа, также приводящий к возникновению особенности поля.

Для расчета задач такого рода используются различные численные методы [10–15]. Однако наличие особенностей существенно ухудшает их скорость сходимости и точность. Одним из самых распространенных способов повышения эффективности численного метода является адаптивное сгущение сетки в окрестности особых точек, но в случае необходимости решения большого количества таких задач, например при решении задачи синтеза, данный подход приводит к значительным вычислительным затратам.

Другой подход заключается в использовании некоторой априорной информации о поведении решения, которая закладывается в численный алгоритм. В качестве примера можно привести метод конечных

элементов [16, 17] с сингулярными элементами, описывающими особенность [18]. Однако добавление новых элементов к базису может приводить к ухудшению свойств его матрицы Грама [16] и снижению эффективности метода.

Численный алгоритм, предложенный в настоящей работе, основан на построении явного вида особенности решения в окрестности металло-диэлектрических углов и его дальнейшем использовании в методе конечных элементов. Однако для преодоления описанных выше проблем дополнительные конечные элементы не добавляются, а заменяют часть базисных функций внутри и на границе малых окрестностей углов, при этом задача решается уже вне этих окрестностей на достаточно грубой сетке. Использование дополнительной информации о поведении решения делает алгоритм быстрым и эффективным и позволяет с высокой точностью находить сингулярную часть градиента решения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим область $\Omega = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i$ с металлической границей, заполненную диэлектриками с различными диэлектрическими проницаемостями в каждой из подобластей Ω_i (рис. 1). В Ω присутствуют угловые точки различных типов: металлический угол (M), внутренние диэлектрические углы (D) и металло-диэлектрические углы (C).

Распределение электрического потенциала u описывается уравнением Пуассона с граничными условиями Дирихле и условиями сопряжения на границе раздела диэлектриков

$$\operatorname{div}(\varepsilon_i \operatorname{grad} u) = -f(M), \quad M \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (1)$$

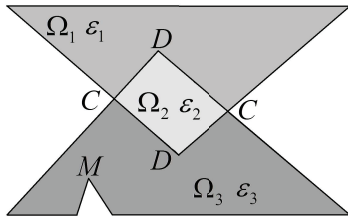


Рис. 1. Область, содержащая металлический (М), диэлектрические (D) и металло-диэлектрические (C) углы

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$u_i|_{\partial\Omega_{ij}} = u_j|_{\partial\Omega_{ij}}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_{ij}} = \varepsilon_j \frac{\partial u_j}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_{ij}}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_i = \text{const}$, $M \in \Omega_i$, $\partial\Omega$ — общая внешняя металлическая граница, $\partial\Omega_{ij}$ — граница между подобластями Ω_i и Ω_j , $f(M)$ — достаточно гладкая функция, выражающаяся через плотность зарядов ρ : $f(M) = 4\pi\rho(M)$.

Для численного решения задачи получим асимптотику решения по гладкости в окрестности всех указанных типов углов.

2.1. Построение асимптотического представления решения в окрестности металло-диэлектрического угла

Построим асимптотику решения задачи (1)–(4) в достаточно малой окрестности Π металло-диэлектрического угла с вершиной M_0 (рис. 2).

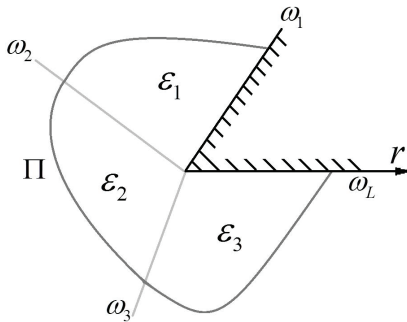


Рис. 2. Геометрия вспомогательной задачи для металло-диэлектрического угла

Пусть из вершины угла выходит L лучей. Пронумеруем их таким образом, чтобы первый и L -й лучи соответствовали металлическим границам. Введем полярную систему координат с центром в этой вершине и направим полярную ось вдоль L -го луча. За ω_i , $i = 1, \dots, L$, $\omega_L = 2\pi$ обозначим углы между лучами и полярной осью.

Разложим в окрестности Π правую часть $f(M)$ уравнения (1) в ряд Тейлора по r . Рассмотрим

частичную сумму ряда, состоящую из $(P + 1)$ слагаемого:

$$\bar{f}(r, \phi) = C_0 + \sum_{n=1}^P r^n C_n(\phi), \quad (5)$$

где $C_0 = \text{const}$. В окрестности Π заменим правую часть уравнения (1) на ее аппроксимацию (5) и рассмотрим вспомогательную задачу: найти частные ограниченные в окрестности нуля решения уравнения

$$\text{div}(\varepsilon(\phi) \text{grad } u) = -\bar{f}(M),$$

$$M \in \{\Pi \setminus M_0 : \omega_i < \phi < \omega_{i+1}, i = 1, \dots, L-1\}, \quad (6)$$

$$\varepsilon(\phi) = \varepsilon_i = \text{const} \quad \text{при} \quad \omega_i < \phi < \omega_{i+1}.$$

На лучах $\phi = \omega_1, \omega_L$ ставятся однородные граничные условия Дирихле

$$u|_{\phi=\omega_1, \phi=\omega_L} = 0. \quad (7)$$

На лучах, соответствующих линиям раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями, ставятся условия сопряжения

$$u|_{\phi=\omega_i+0} = u|_{\phi=\omega_i-0}, \quad (8)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\phi=\omega_i+0} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\phi=\omega_i-0}. \quad (9)$$

На внешней границе окрестности Π в данный момент граничные условия не ставятся. В дальнейшем на ней будут задаваться условия непрерывности решения и его нормальной производной.

Поскольку задача (6)–(9) является линейной и неоднородной, представим ее решение в виде суммы частного решения неоднородной задачи и общего решения однородной задачи, каждое из которых удовлетворяет условиям (7)–(9).

2.2. Сингулярная часть решения. Аддитивное выделение особенности в окрестности угловой точки

В областях строго внутри диэлектриков нетривиальные решения однородной задачи (6)–(9) в полярных координатах с центром в угловой точке будем искать в виде

$$u(r, \phi) = r^\sigma \Phi(\phi). \quad (10)$$

В каждой из подобластей $\varepsilon(\phi)$ является постоянной, поэтому после применения процедуры разделения переменных решение в секторах представляется следующим образом:

$$u_i(r, \phi) = r^\sigma [A_i \sin(\sigma\phi) + B_i \cos(\sigma\phi)], \quad (11)$$

$$\omega_i < \phi < \omega_{i+1}, \quad i = 1, \dots, L-1,$$

где A_i и B_i — некоторые константы. После подстановки решения (11) в условия сопряжения (8), (9) получается однородная СЛАУ относительно этих констант

$$A_1 \sin(\sigma\omega_m) + B_1 \cos(\sigma\omega_m) = 0, \quad (12)$$

$$A_{L-1} \sin(2\pi\sigma) + B_{L-1} \cos(2\pi\sigma) = 0,$$

$$A_i \sin(\sigma\omega_i) + B_i \cos(\sigma\omega_i) = A_{i+1} \sin(\sigma\omega_i) + B_{i+1} \cos(\sigma\omega_i), \quad (13)$$

$$\varepsilon(\omega_i - 0)(A_i \cos(\sigma\omega_i) - B_i \sin(\sigma\omega_i)) = \varepsilon(\omega_i + 0)(A_{i+1} \cos(\sigma\omega_i) - B_{i+1} \sin(\sigma\omega_i)), \quad (14)$$

где $i = 1, \dots, L-1$ и уравнения (12) соответствуют металлической границе, а (13)–(14) — границе раздела двух диэлектриков.

Характеристическое уравнение относительно σ , полученное из условия равенства нулю определителя системы (12)–(14), определяет нетривиальные решения данной системы. В случае если существуют положительные корни характеристического уравнения $\sigma < 1$, то в угловой точке градиент решения будет иметь особенность, что с физической точки зрения соответствует неограниченному росту напряженности электрического поля.

Отдельно следует рассмотреть значение $\sigma_0 = 0$, для которого система (12)–(14) имеет несколько другой вид. В этом случае общее решение будет выражаться через линейную функцию угла:

$$u_i(r, \phi) = A_i \phi + B_i, \quad \omega_i < \phi < \omega_{i+1}, \quad i = 1, \dots, L-1,$$

однако из условий (7)–(9) и того, что $\varepsilon_i > 0$, следует, что существует только тривиальное решение.

Пусть σ_i — положительные корни характеристического уравнения системы (12)–(14), в этом случае решение в точке M_0 будет ограничено. Обозначим соответствующие решения системы (12)–(14) с учетом возможной кратности корня как

$$\chi_i(r, \phi) = r^{\sigma_i} \left[A_j^{(i)} \sin(\sigma_i \phi) + B_j^{(i)} \cos(\sigma_i \phi) \right], \quad (15)$$

$$\omega_j < \phi \leq \omega_{j+1}, \quad j = 1, \dots, L-1.$$

Сингулярная часть решения задачи (6)–(9) представляется как линейная комбинация функций вида (15)

$$u_0(r, \phi) = \sum_i C_i \chi_i(r, \phi). \quad (16)$$

2.3. Решение неоднородной задачи.

Представление решения в окрестности угловой точки

Рассмотрим неоднородную задачу (6)–(9). В силу линейности уравнения (6) получим $(P+1)$ подзадачу:

$$\operatorname{div}(\varepsilon(M) \operatorname{grad} u_n) = -r^n C_n(\phi), \quad n = 0, \dots, P, \quad (17)$$

$$M \in \{(r, \phi) \in \Pi: \omega_i < \phi < \omega_{i+1}, \quad i = 1, \dots, L-1\},$$

с дополнительными условиями (7)–(9). Решение исходной задачи (6) есть сумма решений задач (17), (7)–(9)

$$u = \sum_{n=0}^P u_n.$$

Представляя решение каждой из задач (17), (7)–(9) в виде $u_n = r^s \Phi_n(\phi)$, получим следующее уравнение:

$$s^2 r^{s-2} \Phi_n(\phi) + r^{s-2} \Phi_n''(\phi) = -r^n \frac{C_n(\phi)}{\varepsilon(\phi)},$$

$$\omega_i < \phi < \omega_{i+1}, \quad i = 1, \dots, L-1,$$

откуда следует, что $s = n + 2$, и получается задача для n -й угловой части $\Phi_n(\phi)$:

$$\Phi_n''(\phi) + (n+2)^2 \Phi_n(\phi) = -\frac{C_n(\phi)}{\varepsilon(\phi)},$$

$$\omega_i < \phi < \omega_{i+1}, \quad i = 1, \dots, L-1, \quad (18)$$

$$\Phi_n|_{\phi=\omega_1} = \Phi_n|_{\phi=\omega_L=2\pi} = 0, \quad (19)$$

$$\Phi_n|_{\phi=\omega_i+0} = \Phi_n|_{\phi=\omega_i-0}, \quad \varepsilon \frac{\partial \Phi_n}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\omega_i+0} = \varepsilon \frac{\partial \Phi_n}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\omega_i-0}. \quad (20)$$

Набор задач (18)–(20) решается численно.

Таким образом, приближенное частное решение неоднородной задачи имеет следующий вид:

$$\mu(r, \phi) = \sum_{n=0}^P u_n = \sum_{n=0}^P r^{n+2} \Phi_n(\phi). \quad (21)$$

Решение исходного уравнения (6)–(9) в окрестности угла Π представляется как

$$\bar{u}(r, \phi) = \mu(r, \phi) + \sum_i C_i \chi_i(r, \phi), \quad (22)$$

где первое слагаемое описывает гладкую часть решения, а конечная сумма содержит слагаемое с особенностью в угловой точке.

2.4. Внутренний диэлектрический угол

Получение асимптотики решения для диэлектрического угла, лежащего внутри области Ω , в целом повторяет аналогичный вывод для металлического, за исключением некоторых деталей.

Ось полярной системы координат в данном случае вводится по направлению любой из линий разрыва диэлектрической проницаемости. Граничное условие (7) исключается, а условие сопряжения при $\phi = 0.2\pi$ в соответствии с условиями периодичности принимают следующий вид:

$$u|_{\phi=0+0} = u|_{\phi=2\pi-0}, \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\phi=0+0} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\phi=2\pi-0}.$$

При $\sigma_0 = 0$ однородная задача, в отличие от случая с металлическим углом, имеет нетривиальное решение — константу, которое должно быть учтено в разложении (16).

Для произвольной конфигурации диэлектрического угла ФСР системы (12)–(14) при различных σ_i , как правило, состоит из одного столбца, но при углах, кратных π , возможно появление кратных корней характеристического уравнения и ФСР, состоящих из нескольких столбцов.

Для диэлектрического угла с двумя диэлектриками поведение особенности вблизи вершины было получено в [9] с помощью метода Кондратьева. Показатели σ_i степени r , полученные из характеристического уравнения системы (13), (14), соответствуют значениям, полученным в работе [9].

3. Численный алгоритм

Вернемся к исходной задаче (1)–(4). Пусть в области Ω есть Суглов, в которых имеет место особенность градиента, и для каждого из них получено представление решения в виде (22). Выделим окрестности углов Π_s (рис. 3), в которых приближенное решение задачи (1)–(4) ищется в виде конечной линейной комбинации функций со степенями r не выше L :

$$u(r, \phi) = \mu(r, \phi) + \sum_{i=0}^{I_{\max}} C_i \chi_i(r, \phi), \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

где $I_{\max}$ определяется из условия $\sigma_i < L$. На введенных границах $\partial\Pi_s$ поставим условия сшивания решения, заключающиеся в его непрерывности и непрерывности его нормальной производной.

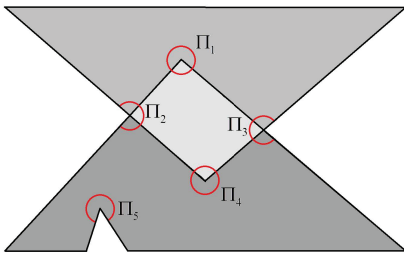


Рис. 3. Введение окрестностей угловых точек

Умножим уравнение (1) на пробную функцию v и проинтегрируем полученное выражение по области $\Omega \setminus \Pi$, где $\Pi = \bigcup_{s=1}^S \Pi_s$:

$$\int_{\Omega \setminus \Pi} \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) v \, ds = - \int_{\Omega \setminus \Pi} f v \, ds. \quad (24)$$

Применяя формулу Грина, получим

$$- \int_{\Omega \setminus \Pi} \varepsilon \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, ds + \oint_{\partial\Omega} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} v \, dl + \sum_{s=1}^S \oint_{\partial\Pi_s} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} v \, dl = - \int_{\Omega \setminus \Pi} f v \, ds. \quad (25)$$

Так как граничное условие (2) является главным, то $v|_{\partial\Omega} = 0$ и первый интеграл по границе $\partial\Omega$ обращается в нуль. Из условия сшивания решения на границах $\partial\Pi_s$ и его представления (23) следует

$$- \int_{\Omega \setminus \Pi} \varepsilon \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, ds + \sum_{s=1}^S \oint_{\partial\Pi_s} \varepsilon \frac{\partial \mu^{(s)}}{\partial n} v \, dl + \sum_{s=1}^S \sum_{i=0}^{I_{\max}} C_i^{(s)} \oint_{\partial\Pi_s} \varepsilon \frac{\partial \chi_i^{(s)}}{\partial n} v \, dl = - \int_{\Omega \setminus \Pi} f v \, ds. \quad (26)$$

Таким образом, исходная задача, решаемая в области Ω , сводится к решению задачи (26) в области $\Omega \setminus \Pi$.

Приближенное решение (26) ищется методом конечных элементов. Обозначим через $\{\omega_i\}_{i=1,\dots,N}$ узлы сетки в области $\Omega \setminus \Pi$, полученной с помощью триангуляции (рис. 4). В качестве базиса берутся лагранжевы элементы первого порядка $\{\psi_i(x, y)\}_{i=1,\dots,N}$. При этом к столбцу неизвестных значений коэффициентов в разложении решения по базису МКЭ, являющихся значениями решения в узлах сетки, добавляются неизвестные коэффициенты $C_i^{(s)}$. Условие сшивания нормальной производной на границе $\partial\Pi$ уже учтено при выводе задачи (26), поэтому при ее решении необходимо удовлетворить только условию непрерывности, являющемуся главным.

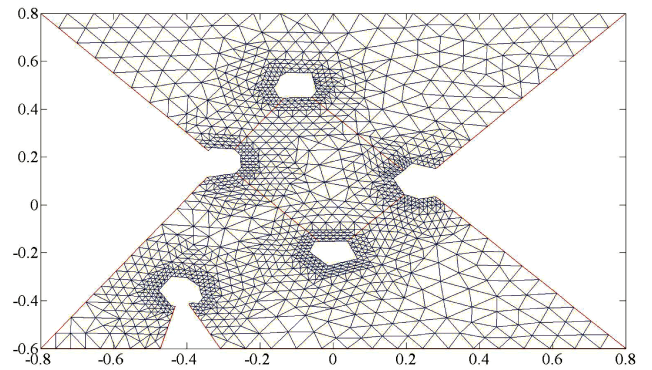


Рис. 4. Сетка в области $\Omega \setminus \Pi$

Условие непрерывности решения на границах $\partial\Pi_s$ реализуется следующим образом. На границу $\partial\Pi_s$ помещается K_s узлов $\{\tilde{\omega}_i\}_{i=1,\dots,K_s}$. Так как решение задачи в подобласти Π_s определяется формулой (23), то вместо стандартных лагранжевых элементов $\{\psi_i(x, y)\}_{i=1,\dots,N}$ с вершинами в $\{\tilde{\omega}_i\}_{i=1,\dots,K}$ на границе берутся их линейные комбинации $\tilde{\psi}_i^{(s)}(x, y)$:

$$\tilde{\psi}_i^{(s)}(x, y) = \sum_{j=1}^K A_{ij}^{(s)} \psi_j(x, y), \quad i = 0, \dots, I_{\max}, \quad (27)$$

где матрица с постоянными коэффициентами $\{A_{ij}^{(s)}\}$ определяется из условия равенства на границе $\partial\Pi_s$ функций $\chi_i^{(s)}(r, \phi)$ и $\tilde{\psi}_i^{(s)}(x, y)$. Неизвестные коэффициенты перед введенными функциями выбираются равными $C_i^{(s)}$. Дополнительно из стандартных конечных элементов на границе строится функция $\tilde{\mu}^{(s)}(x, y)$

$$\tilde{\mu}^{(s)}(x, y) = \sum_{j=1}^K B_j^{(s)} \psi_j(x, y), \quad (28)$$

где коэффициенты $B_j^{(s)}$ определяются из условия ее равенства гладкой части решения $\mu^{(s)}(r, \phi)$ на границе $\partial\Pi_s$. Таким образом, в методе конечных элементов решение в области $\Omega \setminus \Pi$ ищется в виде разложения

$$\hat{u}(x, y) = \sum_{s=1}^S \left(\tilde{\mu}^{(s)}(x, y) + \sum_{i=0}^{I_{\max}} C_i^{(s)} \tilde{\psi}_i^{(s)}(x, y) \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-K} A_j \psi_j(x, y), \quad (29)$$

где последняя сумма содержит $N - K = N - \sum_{s=1}^S K_s$ исходных базисных функций с вершинами строго внутри области $\Omega \setminus \Pi$. Поскольку на границах $\partial \Pi_s$ все $\psi_j(x, y) = 0$, то для построенного решения из конечных элементов условие непрерывности на $\partial \Pi_s$ выполняется автоматически.

Сохранив старые обозначения, объединим два семейства базисных функций $\{\tilde{\psi}_i^{(s)}(x, y)\}_{s=1, \dots, S}$ и $\{\psi_j(x, y)_{j=1, \dots, N-K}\}$ в $\{\psi_i(x, y)\}_{i=1, \dots, \tilde{N}}$ и соответствующие им столбцы неизвестных коэффициентов $C_i^{(s)}$ и A_j в $\{C_i\}_{i=0, \dots, \tilde{N}}$, где $\tilde{N} = N - K + I_{\max} + 1$ — общее количество базисных функций. Приближенное решение (29) запишется в виде

$$\hat{u}(x, y) = \sum_{s=1}^S \tilde{\mu}^{(s)}(x, y) + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} C_i \psi_i(x, y). \quad (30)$$

В качестве пробных функций используются элементы того же базиса

$$\nu(x, y) = \psi_j(x, y). \quad (31)$$

После подстановки (30) и (31) в (26) получается система уравнений относительно столбца неизвестных коэффициентов $\mathbf{C} = \{C_i\}_{i=0}^{\tilde{N}}$, которая имеет вид

$$-\mathbf{K}^{ij} \mathbf{C}_i + \mathbf{Q}^{ij} \mathbf{C}_i = -\mathbf{F}^j + \mathbf{M}^j - \mathbf{G}^j, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{ij} &= \int_{\Omega \setminus \Pi} \varepsilon \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j ds, \\ \mathbf{M}^j &= \int_{\Omega \setminus \Pi} \varepsilon \operatorname{grad} \tilde{\mu} \operatorname{grad} \psi_j ds, \quad \mathbf{G}^j = \sum_{s=1}^S \oint_{\partial \Pi_s} \varepsilon \frac{\partial \mu^{(s)}}{\partial n} \psi_j dl, \\ \mathbf{Q}^{ij} &= \sum_{s=1}^S \oint_{\partial \Pi_s} \varepsilon \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \psi_j dl, \quad \mathbf{F}^j = \int_{\Omega \setminus \Pi} f \psi_j ds. \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что при решении полученной задачи (32)–(33) также находятся коэффициенты при функциях, описывающих сингулярную часть решения в каждой окрестности Π_s .

4. Численный эксперимент и проверка результатов

Для проверки предложенного метода задача (1)–(4) дополнительно решалась во всей области с помощью стандартного метода конечных элементов без учета особенности в угловых точках на более густой сетке.

На рис. 5 представлено решение задачи (1)–(4) для $f(x, y) = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_3 = 3$ стандартным методом конечных элементов на сетке из 11 992 узлов с сильным сгущением в окрестности рассматриваемых угловых точек.

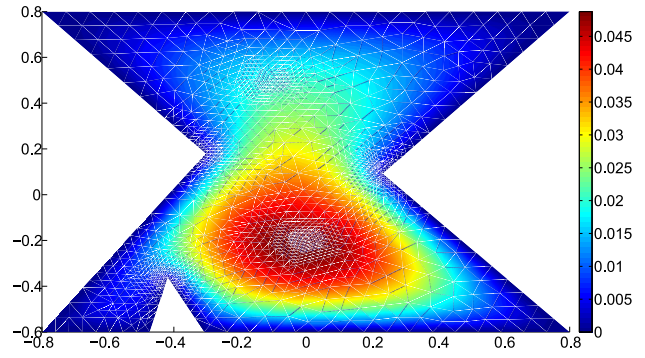


Рис. 5. Решение задачи (1)–(4), $f(x, y) = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_3 = 3$

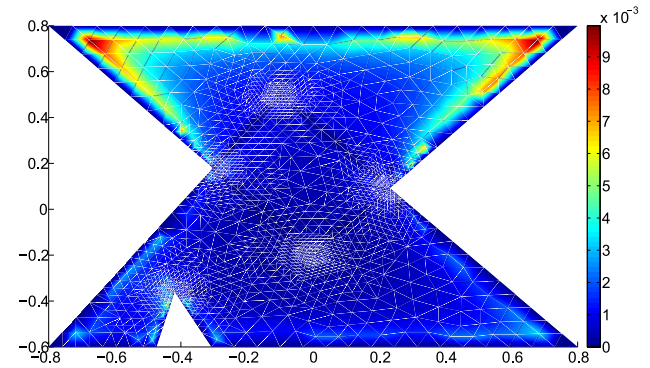


Рис. 6. Относительная погрешность решения, полученного на грубой сетке с учетом особенностей, к решению на мелкой сетке без их учета

На рис. 6 представлена относительная погрешность решения на мелкой сетке без выделения особенности к решению, полученному предложенным методом на грубой сетке с 1264 узлами. Расхождение в окрестности углов не превышает 0.4%. При использовании такой же грубой сетки в обычном методе конечных элементов без выделения сингулярной части решения погрешность в окрестности углов достигает 20%, что при вычислении градиента приводит к существенным ошибкам в значении напряженности электрического поля.

Заключение

В настоящей работе представлен алгоритм расчета электростатической задачи для уравнения Пуассона в области, содержащей металло-диэлектрические углы. Предложенный алгоритм обладает высокой эффективностью и позволяет с хорошей точностью получить распределение электрического поля вблизи угловых точек. Также данный метод обладает хорошей гибкостью, позволяя единообразно обрабатывать металлические, диэлектрические и металло-диэлектрические углы с различными конфигурациями без существенных изменений в способе решения.

Метод может быть использован для решения широкого класса задач электростатики и электродинамики, таких как задачи анализа и синтеза

в областях со сложной геометрией и заполнением, содержащих угловые точки различных типов.

Работа М. И. Светкина выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00690 А). Работа А. И. Ерохина выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-31-60084-мол_а_дк). Работа А. Н. Боголюбова и И. Е. Могилевского выполнена при финансовой поддержке РФФИ (15-01-03524 А).

Список литературы

1. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
2. Кондратьев В.А., Олейник О.А. // УМН. 1983. **38**, № 2. С. 3.
3. Боголюбов А.Н. // Журн. радиоэлектроники (электронный журнал). 2001. № 8. <http://jre.cplire.ru>
4. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. // Радиотехника и электроника. 2003. **48**, № 7. С. 1.
5. Кондратьев В.А. // Дифференц. уравнения. 1977. **13**, № 11. С. 2026.
6. Дегтярев С. А., Устинов А. В., Хонина С.Н. // Компьютерная оптика. 2014. **38**. № 4.
7. Зограби М. // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Матем. Физ. 2014. **37**. № 25.
8. Tsarin Y.A. // Радиофизика и радиоастрономия. 2013. **6**, № 4. С. 323.
9. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2011. **51**, № 12. С. 2253.
10. Jin J. M. The Finite Element Method in Electromagnetics. John Wiley & Sons, 2014.
11. Davydov O., Oanh D.T. // J. Comput. Phys. 2011. **230**, № 2. С. 287.
12. Ciarlet P., He J. // Comptes Rendus Mathematique. 2003. **336**, № 4. С. 353.
13. Bedrossian J. et al. // J Comput. Phys. 2010. **229**, № 18. С. 6405.
14. Igarashi H., Honma T. // Appl. Mathem. Modelling. 1996. **20**, № 11. С. 847.
15. Elliotis M., Georgiou G., Xenophontos C. // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2002. **18**, № 3. С. 213.
16. Johnson C. Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Cambridge, UK, 1987.
17. Gallager R.H. Finite Element Analysis: Fundamentals // Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975. **1**.
18. Georgiou G.C., Schultz W.W., Olson L.G. // International journal for numerical methods in fluids. 1990. **10**, № 4. С. 357.

A hybrid method for the solution of the Poisson equation in the domain of metal–dielectric corners

A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, I. E. Mogilevsky, M. I. Svetkin

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.

Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^a mihail-svetkin@mail.ru.

The Poisson's equation in a two-dimensional domain that contains star metal–dielectric corners is considered. The corners can be only metal or only dielectric. In their neighborhood, the solution is bounded, but the gradient has power-law singularities. A numerical algorithm for solving this problem is proposed. The algorithm is based on the finite-element method and takes the asymptotic behavior of the solution in the neighborhood of metal-dielectric corners into account.

Keywords: Poisson equation, metal–dielectric corner, finite-element method.

PACS: 02.70.Dh.

Received 27 June 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **71**, No. 1. Pp. 16–22.

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Ерохин Александр Игоревич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: forlector@mail.ru.
3. Могилевский Илья Ефимович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, доцент; e-mail: mogilev@phys.msu.ru.
4. Светкин Михаил Игоревич — аспирант; e-mail: mihail-svetkin@mail.ru.