

О свойствах 4-импульса изолированной системы «заряд + поле»

М. Б. Эпендиев

Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН.

Россия, 101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., д. 4.

E-mail: m010148@mail.ru

Статья поступила 07.07.2016, подписана в печать 05.09.2016.

Ставится вопрос об изоляции заряженной частицы вместе с собственным полем, при которой 4-импульс этой системы является 4-вектором. Получены соотношения между характеристиками частицы и поля, имеющие место при такой изоляции. В частности, показано, что в рассмотренных неклассических моделях частицы ее масса должна быть больше $1/3$ массы поля.

Ключевые слова: заряженная частица, электромагнитное поле, изоляция, 4-импульс, 4-вектор.

УДК: 537.8. PACS: 03.30.+p.

Введение

История вопроса начинается с конца XIX в. Сначала Дж. Дж. Томсон, затем в рамках специальной теории относительности (СТО) Х. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, М. Абрагам и др. [1, 2] пытались разрешить так называемый «парадокс $4/3$ ». Суть парадокса заключалась в следующем: отношение импульса поля заряженного объекта, движущегося с небольшой скоростью $\mathbf{v}$, к энергии поля равнялось $4\mathbf{v}/3c^2$ (т.е. не соблюдалось привычное в механике отношение $\mathbf{v}/c^2$). Это дало основание для предположений о том, что классическая электродинамика и СТО противоречат друг другу. В 1933 г. Р. Беккер показал [3], что достаточно связать максвелловские натяжения с упругими напряжениями в заряженном объекте и противоречие исчезает. Тем не менее до последнего времени сохранялось мнение о неразрешимости «парадокса $4/3$ ».

Из современных исследований по этому вопросу следует отметить работы К. Т. Макдональда [4, 5] и В. Б. Морозова [6]. В первых анализировалась роль «скрытого импульса» механического происхождения. В [6] на примере технически реализуемых моделей (конденсатор, заряженная сфера и т.д.) было показано, каким образом упругие напряжения в заряженном теле компенсируют «излишек» импульса поля.

В математическом плане проблема проста. Энергия и импульс системы рассчитываются интегрированием по пространству компонент тензора энергии-импульса (ТЭИ) системы и поэтому в общем случае не представляют 4-вектор в СТО. Отсюда и следуют возможности парадоксальных отношений импульса к энергии. Чтобы избежать этого, ТЭИ свободной (изолированной) системы нужно наделить определенными свойствами. Однако до сих пор это делалось в рамках классической механики в моделях, имеющих макроскопическую иллюстрацию. В настоящей работе задача поставлена в общем виде. Например, ТЭИ заряда представляется некими

полевыми функциями. Это позволяет рассматривать модели, не имеющие макроскопических аналогов (в частности, электрон + его поле).

1. Обозначения и постановка задачи

Латинские индексы пробегуют значения 0, 1, 2, 3. По повторяющимся сверху и снизу индексам производится суммирование. Скорость света $= 1$. Координаты точки пространства Минковского задаются вектором $x^k = (t, \mathbf{r})$ (иногда этот вектор записывается без индекса); g_{kn} — метрический тензор в этом пространстве-времени; e^{kn} — совершенно антисимметричный единичный тензор; 4-вектор скорости $u^k = (u^0, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = u^0 \mathbf{v}$, $u^0 = \sqrt{1 + \mathbf{u}^2}$, где вектор пространственной скорости $\mathbf{v}$ постоянен. Запись $(\dots)_k$ означает взятие частной производной $\partial(\dots)/\partial x^k$. Угловыми скобками обозначается интегрирование по пространству.

Мы будем исследовать заряженную частицу вместе с ее полем как отдельную систему, которую для краткости будем называть Объектом. Заряженную частицу будем называть просто частицей (или зарядом), а ее электромагнитное поле — полем. Частица и поле могут обладать характеристиками, имеющими одинаковый физический смысл. Будем различать их по индексам: у частицы индекс s (charge), у поля — f (field). Говоря, что Объект движется со скоростью $\mathbf{v}$, мы будем подразумевать любой из двух вариантов: Объект реально движется или Объект покоится, а система отсчета движется со скоростью $-\mathbf{v}$.

Допустим, что мы изолировали Объект (разумеется, здесь и ниже речь идет не об идеальной изоляции, а том, что энергия связи Объекта с внешней средой может быть сколь угодно малой). Если в некоторой инерциальной системе отсчета его импульс равен нулю, то мы считаем Объект покоящимся, а его энергию называем массой M ; если Объект движется со скоростью $\mathbf{v}$, то по всем канонам мы должны ожидать, что его энергия равна Mu^0 , а импульс равен $M\mathbf{u}$. Иначе говоря, считаем,

что во всех инерциальных системах отсчета 4-импульс изолированного Объекта равен 4-вектору

$$P^k = Mu^k. \quad (1)$$

Но так ли это? Является ли 4-импульс изолированного Объекта 4-вектором в пространстве Минковского?

На первый взгляд, вопрос праздный. Всякая результативная теоретическая концепция в физике основана на том, что 4-импульс изолированной системы является 4-вектором. Однако в данном случае не все так просто.

Во-первых, поле заряда является дальнодействующим и не ясно, можно ли его изолировать. Во-вторых, при классическом анализе Объекта возникает ряд проблем при расчете его 4-импульса (расходимости, «парадокс 4/3», отрицательные давления и т. д.).

В какой-то мере вопрос снимается, когда заряд представляется точечным. По определению 4-импульс такого заряда является 4-вектором. Остается подобрать лагранжиан поля так, чтобы его 4-импульс был конечным и представлял 4-вектор.

Однако реальный заряд «расплывается». Мы не будем разбираться в природе «расплывания» и просто примем за факт то, что заряд является протяженным. При этом расходимости исчезают [7], однако 4-импульсы частицы и поля по отдельности уже нельзя априори считать 4-векторами. Поэтому в такой модели на статус 4-вектора может претендовать лишь суммарный 4-импульс.

Возможно, что поставленный выше вопрос или не имеет физического смысла (например, 4-импульс не является динамической характеристикой Объекта при его изоляции) или изоляция Объекта невозможна (существует предел малости для энергии связи с внешней средой). Если это так, то, возможно, основы современной электродинамики (как классической, так и квантовой) имеют серьезный изъян, который рано или поздно скажется.

В настоящей работе будем исходить из утвердительного ответа на вопрос, поставленный выше. Протяженность частицы означает, что в ней происходят какие-то процессы. Какие, мы не знаем и будем исходить из следующего.

1. При «выключении» внешних (по отношению к Объекту) сил внутренние процессы в частице в конечном счете приходят в равновесное состояние (например, устанавливаются гармонические колебания), обладающее стационарными характеристиками.

2. Между процессами внутри частицы и характеристиками поля существует связь, которая как минимум обеспечивает устойчивую целостность Объекта.

Теперь мы можем сформулировать задачу, поставленную в настоящей работе.

Какие связи между характеристиками частицы и поля при изоляции Объекта обеспечивают его 4-импульсу статус 4-вектора?

При анализе этой задачи мы будем считать тензор энергии-импульса (ТЭИ) поля зависящим от напряженностей так же, как и в классической линейной электродинамике. Заряженную частицу будем представлять в двух вариантах. В чисто классическом варианте это некое сплошное тело. Во втором варианте ТЭИ частицы будет зависеть от полевых функций. Основное внимание будет уделено второму варианту. При этом мы не будем наделять его определением «квантовый». Дело в том, что в обычном понимании волновые функции квантовой механики представляют некое «поле» невзаимодействующих одинаковых частиц (т. е. по сути имеют статистический смысл). Вводимые же ниже функции представляют внутренние процессы отдельной конкретной частицы.

Будем также считать, что ТЭИ, масса и 4-импульс Объекта являются суммами соответствующих величин поля и частицы:

$$\begin{aligned} T^{kn} &= T_f^{kn} + T_c^{kn}, \\ M &= M_f + M_c, \quad P^k = P_f^k + P_c^k, \\ M_f &= \langle T_{f(0)}^{00} \rangle, \quad M_c = \langle T_{c(0)}^{00} \rangle, \\ P_f^k &= \langle T_f^{0k} \rangle, \quad P_c^k = \langle T_c^{0k} \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее $T_{f(0)}^{kn}$, $T_{c(0)}^{kn}$, $T_{(0)}^{kn}$ — соответствующие ТЭИ в случае покоящегося Объекта, угловыми скобками обозначено интегрирование по пространству:

$$\langle (\dots) \rangle = \int \int \int (\dots) d^3 \mathbf{r}.$$

Чтобы P^k , подобно (1), считать 4-вектором, должно выполняться условие

$$\langle T^{0k} - T_{(0)}^{00} u^k \rangle = 0. \quad (3)$$

Это соотношение и определяет искомую связь. Кроме того, учтем, что законы сохранения 4-импульса изолированной системы вытекают из уравнения

$$T_{,n}^{kn} = 0. \quad (4)$$

Из (3), конечно, не следует (4). Но и из (4), вообще говоря, не следует (3). Однако в наших моделях (4) является достаточным для выполнения (3). Прежде всего, это обязано тому, что ТЭИ покоящегося Объекта не зависит от времени. Но именно это, как будет указано в заключении, и является «слабым звеном» при использовании (4) в неклассических моделях.

2. Классическая модель в условиях сферической симметрии

Чтобы четко выявить физический смысл результатов анализа задачи в рамках классической физики, рассмотрим наиболее простую модель, когда распределение заряда является стационарным и сферически симметричным. В этом случае поле неподвижного заряда определяется одним скалярным

потенциалом $f(r)$. Тогда потенциалы, напряженности и ТЭИ поля движущего заряда имеют вид

$$A^k = u^k f(\sigma), \quad F^{kn} = (q^k u^n - q^n u^k) f', \quad f' = df/d\sigma, \quad (5)$$

$$T_f^{kn} = \frac{(f')^2}{4\pi} \left(u^k u^n - q^k q^n - \frac{1}{2} g^{kn} \right), \quad (6)$$

$$T_{f(0)}^{00} = \frac{1}{8\pi} (f'(r))^2,$$

$$q^k = ((ux)u^k - x^k)/\sigma, \quad \sigma^2 = (ux)^2 - x^2.$$

Если $\mu(r)$ — плотность заряда, то 4-вектор тока $J^k = \mu(\sigma)u^k$ и

$$f'(\sigma) = -\frac{4\pi}{\sigma^2} \int_0^\sigma \tau^2 \mu(\tau) d\tau, \quad T_f^{kn}, n = -f'(\sigma) \mu(\sigma) q^k. \quad (7)$$

Масса, энергия и импульс поля равны

$$M_f = 4\pi \int_0^\infty r \mu(r) dr \int_0^r \tau^2 \mu(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$P_f^0 = M_f \left(\frac{4u^0}{3} - \frac{1}{3u^0} \right), \quad \mathbf{P}_f = \frac{4M_f \mathbf{u}}{3}.$$

Если $|\mu(r)|_{r \rightarrow 0}$ меньше или порядка $\text{const} \cdot r^{-2-\delta}$ ($\delta < 1/2$) и полный заряд

$$e = 4\pi \int_0^\infty r^2 \mu(r) dr \quad (9)$$

ограничен, то масса M_f конечна.

Модель частицы представим как сплошную среду с ТЭИ [8]

$$T_c^{kn} = (\varepsilon(\sigma) + p(\sigma)) u^k u^n - p(\sigma) g^{kn}, \quad \langle \varepsilon(r) \rangle = M_c, \quad (10)$$

где $\varepsilon(r)$ — плотность массы, $p(r)$ — давление в данной точке. При этом

$$P_c^0 = M_c u^0 + \left(u^0 - \frac{1}{u^0} \right) \langle p(r) \rangle, \quad \mathbf{P}_c = (M_c + \langle p(r) \rangle) \mathbf{u}. \quad (11)$$

Тогда 4-импульс Объекта удовлетворяет (3), если

$$\langle p(r) \rangle = -M_f/3. \quad (12)$$

Подставляя в (4) ТЭИ Объекта, получим распределение давления

$$p(r) = -4\pi \int_r^\infty \frac{\mu(r)}{r^2} dr \int_0^r \tau^2 \mu(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что из (13) следует (12).

Таким образом, в данной модели, если $\mu(r)$ — знакоопределенная функция, давление «внутри» частицы должно быть всюду отрицательным. Подобные результаты [3, 6] для технически реализуемых моделей трактовались, не выходя за рамки классической теории. Тем самым как бы снимались некоторые противоречия классической электродинамики. Мы же рассмотрели здесь эту модель как раз с обратной целью. Заряженной частицей может быть любое устойчивое образование, в том числе и микрочастицы, для которых трактовка понятия отрицательного давления лежит вне рамок классиче-

ской статистической механики. Например, в эффекте Казимира [9] речь идет об областях более «разреженного» (по интенсивности виртуальных процессов) вакуума. Таким образом, результат, полученный в данной классической модели, говорит о том, что чисто классических методов недостаточно, чтобы выявить смысл искомой связи между зарядом и его полем.

3. Поле в цилиндрически-симметричной модели

При анализе неклассическими методами расширим класс полей. Пусть для покоящего Объекта ось симметрии задается ортом $\mathbf{n}_z$. Учтем еще варианты образования тока вокруг этой оси. Тогда для характеристик поля движущего Объекта имеем

$$A^k = f(\sigma)u^k - Q(\sigma)b^k, \quad \sigma = \mathbf{r} - [t - (\mathbf{ur})/(u_0 + 1)]\mathbf{u},$$

$$F^{kn} = f^{,k}u^n - f^{,n}u^k + 2b^{k,n}Q + b^k Q^{,n} - b^n Q^{,k},$$

$$T_f^{kn} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{kl} F_l^{,n} - \frac{1}{4} g^{kn} F^{il} F_{il} \right), \quad (14)$$

$$f(\sigma) = f(z, \rho), \quad Q(\sigma) = Q(z, \rho), \quad \rho = (\sigma^2 - z^2)^{1/2},$$

$$z = (Sx) = (\mathbf{n}_z \sigma), \quad b^k = e^{knil} x_n u_i S_l,$$

$$S^0 = -(\mathbf{n}_z \mathbf{u}), \quad \mathbf{S} = -\mathbf{n}_z - (\mathbf{n}_z \mathbf{u})\mathbf{u}/(u_0 + 1).$$

Здесь мы для движущего Объекта обозначили продольную координату z и поперечную ρ теми же символами, что и для неподвижного. Из контекста будет ясно, о каком именно из случаев идет речь.

Отметим, что

$$F^{kn}, n = -4\pi J^k, \quad J^k = \mu(z, \rho)u^k + w(z, \rho)b^k, \quad (15)$$

$$\mu = -\Delta f, \quad w = \Delta Q + \frac{2}{\rho} Q_{,\rho}$$

(здесь и далее $(\dots)_{,\rho}$, $(\dots)_{,z}$ означают соответствующие частные производные). Для покоящего Объекта $J^k = (\mu, w[\mathbf{n}_z \mathbf{r}])$, т.е. в классической интерпретации ток образуется протяженным зарядом, элементы которого вращаются вокруг $\mathbf{n}_z$ с угловой скоростью $\omega(z, \rho) = \frac{w}{\mu}$ (по часовой стрелке, если $\omega > 0$). Однако мы не будем акцентироваться на этом и будем считать μ, w обозначениями функций, зависящих в соответствии с (15) от частных производных функций f, Q .

При интегрировании по пространству учтем, что для любой интегрируемой функции $B(\mathbf{r})$ имеет место равенство

$$u_0 \langle B(\sigma(\mathbf{r})) \rangle = \langle B(\mathbf{r}) \rangle.$$

Далее за исключением $\langle T^{kn} \dots \rangle$ под интегралом будут стоять функции, зависящие от $\mathbf{r}$ (т.е. от z и ρ для покоящего Объекта).

Дивергенция ТЭИ и масса поля равны

$$T_f^{kn}, n = -\mu f^{,k} - w(2Qa^k + \rho^2 Q^{,k}), \quad (16)$$

$$M_f = \frac{1}{8\pi} \langle (\nabla f)^2 + \rho^2 (\nabla Q)^2 \rangle, \quad a^k = (xu)u^k - x^k - zS^k. \quad (17)$$

4. Представление частицы полевыми функциями

В N -мерном пространстве действительных функций определим скалярное произведение векторов $a = (a_1(x), \dots, a_N(x))$ и $b = (b_1(x), \dots, b_N(x))$ в виде симметричной квадратичной формы

$$(a * b) = (b * a) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N a_{\alpha} C_{\alpha\beta} b_{\beta}, \quad C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}. \quad (18)$$

В общем случае собственные значения матрицы $C_{\alpha\beta}$ могут быть разных знаков. Мы здесь ограничимся случаями, когда все они положительные. В этих случаях формы $(a * a)$ являются положительно определенными. При этом подходящим линейным преобразованием векторов можно прийти к диагонализации матрицы и положить $C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

Комплексное представление приводит, конечно, к более компактному выражениям, но мы будем оперировать вещественными функциями, чтобы явно видеть знаки и прочие свойства возникающих выражений. При этом будем считать N четным числом (нечетные размерности, в частности $N = 1$, приводят к не очень ясным в физическом плане картинам).

Итак, пусть внутренняя динамика частицы представляется набором вещественных функций $\psi = (\psi_1(x), \dots, \psi_N(x))$. Мы оставим в стороне вопрос о трансформационных свойствах этого набора. Для нас важно то, что нижеследующие квадратичные формы являются тензорами (скалярами, 4-векторами, ...) в пространстве Минковского. Поэтому для покоящего и движущего Объекта мы будем использовать одинаковые обозначения этих функций (т. е. переход обозначается лишь заменой аргументов функций).

Будем рассматривать модели, в которых лагранжиан частицы в первом приближении имеет вид

$$L = \frac{1}{2} ((\psi^n * \psi_n) - \gamma^2 (\psi * \psi)) \quad (19)$$

(γ — некоторая константа). При этом

$$T_c^{kn} = (\psi^k * \psi^n) - g^{kn} L, \quad (20)$$

$$T_c^{kn}, n = (\psi^k * \phi), \quad \phi = \gamma^2 \psi + \psi_n^n. \quad (21)$$

Положим $N = 4$ (это достаточно общий случай). Так как ТЭИ поля обладает цилиндрической симметрией, то в нашей задаче такой же симметрией должен обладать и ТЭИ (20). Для этого достаточно задать ψ в виде

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{(1)} \cos \varphi_1, \quad \psi_2 = \psi_{(1)} \sin \varphi_1, \quad \varphi_1 = \beta(ux) - m_0 \varphi, \\ \psi_3 &= \psi_{(2)} \cos \varphi_2, \quad \psi_4 = \psi_{(2)} \sin \varphi_2, \quad \varphi_2 = \beta(ux) + m_0 \varphi, \\ \psi_{(\alpha)} &= \psi_{(\alpha)}(z, \rho), \quad \alpha = 1, 2, \quad \varphi_{,k} = \frac{b_k}{\rho^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\beta = \text{const}, \quad m_0 = \text{const}.$$

Для покоящего заряда переменная φ является с точностью до постоянного слагаемого полярным углом

в поперечной плоскости. Это означает, что для однозначности всех квадратичных форм нужно, чтобы m_0 было целым или полуцелым.

С учетом (22) получим

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \left[\psi_{(\alpha),n} \psi_{(\alpha)}^n + \left(\beta^2 - \gamma^2 - \frac{m_0^2}{\rho^2} \right) (\psi_{(\alpha)})^2 \right], \\ T_c^{kn} &= \sum_{\alpha=1,2} \left[\psi_{(\alpha)}^k \psi_{(\alpha)}^n + (\beta^2 u^k u^n + m_0^2 \varphi^k \varphi^n) (\psi_{(\alpha)})^2 \right] + \\ &\quad + (u^k \psi^n + u^n \psi^k) (\psi_{(2)}^2 - \psi_{(1)}^2) - g^{kn} L, \\ T_c^{kn}, n &= \sum_{\alpha=1,2} \psi_{(\alpha)}^k \phi_{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \phi_{(\alpha)} &= \left(\gamma^2 - \beta^2 + \frac{m_0^2}{\rho^2} \right) \psi_{(\alpha)} + \psi_{(\alpha),n}^n, \\ T_{c(0)}^{00} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \left[(\nabla \psi_{(\alpha)})^2 + \left(\gamma^2 + \beta^2 + \frac{m_0^2}{\rho^2} \right) \psi_{(\alpha)}^2 \right], \quad (24) \\ M_c &= \langle T_{c(0)}^{00} \rangle. \end{aligned}$$

Мы не будем здесь рассматривать вопрос о физическом смысле констант γ и β . Их значения нам неизвестны, так как речь идет о «голом» заряде, для массы которой мы имеем лишь оценки порядка физической величины.

5. Соотношения между характеристиками поля и частицы

Наличие связи между полем и внутренней динамикой частицы в нашей модели означает, что вариации потенциалов A^k и вариации функций ψ_{α} являются зависимыми. Мы не знаем, в чем заключается эта зависимость, и поэтому не можем использовать метод Лагранжа, чтобы получить общее уравнение. Здесь мы можем лишь выяснить, к чему приводит положение о том, что 4-импульс Объекта является 4-вектором.

Подставляя в (3) сумму ТЭИ поля (14) и частицы (23), получим равенства

$$\langle f_{,z}^2 + \rho^2 Q_{,p}^2 \rangle = 4\pi \sum_{\alpha=1,2} \langle (\gamma^2 - \beta^2) \psi_{(\alpha)}^2 + (\psi_{(\alpha),z})^2 \rangle, \quad (25)$$

$$\langle f_{,p}^2 + \rho^2 Q_{,z}^2 \rangle = 4\pi \sum_{\alpha=1,2} \langle \left(2\gamma^2 - 2\beta^2 + \frac{m_0^2}{\rho^2} \right) \psi_{(\alpha)}^2 + (\psi_{(\alpha),\rho})^2 \rangle. \quad (26)$$

Отсюда, вспоминая выражения для масс (17) и (24), получим

$$3M_c - M_f = \sum_{\alpha=1,2} \langle \left(3\gamma^2 + \frac{m_0^2}{\rho^2} \right) \psi_{(\alpha)}^2 + (\nabla \psi_{(\alpha)})^2 \rangle, \quad (27)$$

$$M_f - M_c = (\gamma^2 - 2\beta^2) \langle \psi_{(1)}^2 + \psi_{(2)}^2 \rangle. \quad (28)$$

Из (27) следует, что масса частицы больше трети массы поля:

$$3M_c > M_f. \quad (29)$$

А (28) в зависимости от соотношений между γ и β дает

$$\gamma^2 > 2\beta^2 \implies M_f > M_c, \quad \gamma^2 < 2\beta^2 \implies M_f < M_c. \quad (30)$$

Из (4), учитывая (16) и (23), получим

$$\mu f_{,k} + (2a^k Q + \rho^2 Q_{,k}) w = \sum_{\alpha=1,2} \psi_{(\alpha)}^k \phi_{(\alpha)}. \quad (31)$$

Свертывая (31) с a_k и zS_k и интегрируя по пространству, получим два соотношения, полностью эквивалентные (25), (26). В силу цилиндрической симметрии и стационарности, из (31) следуют два (и только два) уравнения

$$\begin{aligned} \mu f_{,\rho} + (2\rho Q + \rho^2 Q_{,\rho}) w &= \sum_{\alpha=1,2} \psi_{(\alpha),\rho} \phi_{(\alpha)}, \\ \mu f_{,z} + \rho^2 Q_{,z} w &= \sum_{\alpha=1,2} \psi_{(\alpha),z} \phi_{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Равенство (4) (в силу симметричности ТЭИ) приводит в нашей модели также и к уравнению неразрывности для вектора $y^k = T^{kn} b_n$

$$y_{,k}^k = T^{kn} b_{n,k} = 0 \quad (b_{n,k} = -b_{k,n}). \quad (33)$$

Отсюда заключаем, что y^0 есть сохраняющаяся величина. Для неподвижного Объекта $\langle y \rangle = 0$, а $\langle y^0 \rangle$ является (с точностью до знака) проекцией полного момента количества движения на ось $\mathbf{n}_z$. Причем

$$\begin{aligned} \langle y^0 \rangle &= \langle T^{kn} u_k b_n \rangle = \\ &= \langle \dot{f}_{,\rho} (\rho^2 Q)_{,\rho} + \dot{f}_{,z} \rho^2 Q_{,z} + \beta m_0 (\psi_{(1)}^2 - \psi_{(2)}^2) \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, если задан полный момент количества движения, то в виде (34) мы имеем еще одну связь между характеристиками поля и частицы.

Если $N = 1$, то в (22) мы должны положить $\psi_{(2)} = 0$ (или $\psi_{(1)} = 0$), $\beta = 0$ и $m_0 = 0$. При этом резко сужаются рамки приложения модели, так как уменьшаются возможности добавления к (32) других связей. Например, величина β по аналогии с квантовой механикой может быть пропорциональна массе частицы. Тогда $\beta = 0$ означает нулевую массу частицы, что противоречит (29). Кроме того, вектор тока может быть как-то связан с квадратичной формой от ψ , которая не имеет смысла при нечетных N .

Заключение

Автор не стал анализировать здесь уравнения (32). И не только потому, что они сложны (даже

в приближении $f = f(r)$, $Q = Q(r)$ они приводят к довольно громоздкой системе уравнений). Дело в том, что нельзя быть уверенным в исходном уравнении (4), если учесть вакуумные флуктуации. Возможно, что уравнение (4) является результатом усреднения по малым областям времени или пространства более точного уравнения, в котором содержится вклад осцилляций в вакууме. В то же время в результатах, полученных интегрированием по пространству, в какой-то степени нивелируются эти осцилляции. Поэтому соотношения (29) и (30) могут иметь гораздо больший смысл, чем уравнения (32).

Отметим еще одно обстоятельство. В рассмотренных моделях мы считали, что поле задано и является электромагнитным. При этом неявно предполагалось, что его масса не намного меньше общей массы. Это позволяло считать, что представление лагранжиана частицы в виде (19) будет корректным для ряда Объектов хотя бы в первом приближении. Однако, например для протона, большее значение имеет сильное взаимодействие. Это говорит о том, что для адронов схему нужно модифицировать. Например, задавать лагранжиан частицы максимально точно, с учетом ее внутренней структуры (кварков, поля глюонов и т. д.).

Автор благодарит профессора МГУ А. В. Борисова за обсуждение результатов и помощь в работе.

Список литературы

1. Jackson J.D. Classical Electrodynamics. New York: Wiley, 1962. (Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.)
2. Hnizdo V. // Amer. J. Phys. 1997. **65**(11), P. 1051.
3. Becker R. Theorie der Elektrizität. Berlin: Teuber, 1933. (Беккер Р. Теория электричества. Л.; М.: Гостехиздат. 1941.)
4. McDonald K.T. Energy, momentum and stress in a belt drive. <http://puhep1.princeton.edu/> October 20, 2007.
5. McDonald K.T. Hidden momentum in a sound wave. <http://puhep1.princeton.edu/> October 31, 2007.
6. Морозов В.Б. // УФН. 2011. **181**, № 4. С. 389.
7. Эпендиев М.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2014. № 6. С. 40. (Ependiev M.B. // Moscow University Phys. Bull. 2014. **69**, N 6, P. 474); Ependiev M.B. // J. of Modern Physics. 2015. N 6. P. 601.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
9. Мостепаненко В.М. // УФН. 1988. **156**, № 3. С. 385.

On the properties of the four-momentum of an isolated charge + field system**M. B. Ependiev***Blagonravov Institute of Machine Science, Russian Academy of Sciences, Moscow 101990, Russia.**E-mail: m010148@mail.ru.*

The question of the isolation of a charged particle along with its field such that the four-momentum of an entire system is a four-vector is raised. The relationships between the characteristics of a particle and a field upon such isolation have been obtained. In particular, it has been demonstrated that within the considered nonclassical models the particle mass should be greater than one-third of the field mass.

Keywords: charged particle, electromagnetic field, isolation, four-momentum, four-vector.

PACS: 03.30.+p.

Received 7 July 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin. 2017. 72, No. 2. Pp. 176–181.*

Сведения об авторах

Эпендиев Магомед Бухадиевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 423-10-97, e-mail: m010148@mail.ru