

СТАТЬИ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

**Сверхпроводимость в кирально-асимметричной материи
в рамках (2+1)-мерной четырехфермионной модели**

В. Ч. Жуковский^{1,a}, К. Г. Клименко^{2,b}, Т. Г. Хунджуа³

^{1,3}Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
¹кафедра теоретической физики; ³кафедра общей физики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

²ФГБУ «Государственный научный центр Российской Федерации — Институт физики
высоких энергий» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт».
Россия, 142291, Московская обл., Протвино.
E-mail: ^azhukovsk@phys.msu.ru, ^bkklim@ihep.ru

Статья поступила 20.07.2016, подписана в печать 18.08.2016.

В рамках (2+1)-мерной квантово-полевой теории с фермион-антифермионным и фермион-фермионным (или сверхпроводящим) каналами четырехфермионного взаимодействия исследована фазовая структура кирально-асимметричной материи. С этой целью в рамках модели учитываются как химический потенциал числа частиц μ , так и киральный химический потенциал μ_5 , сопряженный с разностью чисел правых и левых фермионов. Построена серия фазовых диаграмм для разных значений химических потенциалов. Показано, что химический потенциал μ способствует образованию фазы сверхпроводимости, тогда как с ростом химического потенциала μ_5 подавляется влияние на систему химического потенциала μ . Результаты исследования могут быть интересны для физики высоких энергий, а также для физики твердого тела и физики графена в частности.

Ключевые слова: четырехфермионная модель, фазовые переходы, киральная материя, сверхпроводимость.

УДК: 530.145. PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz.

Введение

На сегодняшний день хорошо известно, что релятивистские квантово-полевые модели с четырехфермионным взаимодействием служат эффективной теорией для описания реальных физических эффектов. К примеру, в исследованиях по мезонной спектроскопии, физике нейтронных звезд и экспериментах на ускорителях тяжелых ионов часто прибегают к модели с четырехфермионным взаимодействием в (3+1)-мерном пространстве-времени [1–3], известной как модель Намбу–Йона–Лазинио (НЙЛ) [4]. Заметим также, что в последнее время четырехфермионные модели вызывают особенный интерес в качестве теории, описывающей явления в физике твердого тела. В самом деле, физика (квази)одномерного пайерлсовского диэлектрика (наиболее известный представитель — полиацетилен) поддается описанию с помощью (1+1)-мерной четырехфермионной модели Гросса–Невё (ГН) [5–11]. Важно сказать, что (2+1)-мерный вариант модели ГН применяется для описания высокотемпературной сверхпроводимости, а также других эффектов в материалах с планарной кристаллической структурой, включая графен (плоский монокристаллический слой углеродных атомов) [12–18]. Важно, что существуют физические эффекты, которые впервые были обнаружены в рамках моделей

НЙЛ и ГН. В частности, это эффект динамической генерации массы фермионов, который был впервые описан Намбу и Йона–Лазинио [4] как нарушение непрерывной киральной симметрии в рамках четырехфермионной модели. Позднее этот эффект был успешно применен для описания низкоэнергетического спектра мезонов в квантовой хромодинамике (КХД) [1].

Эффект динамического нарушения симметрии также удобно описывать в рамках низкоразмерных ($D = 1 + 1$ и $D = 2 + 1$) моделей четырехфермионных взаимодействий [5, 19, 20]. Следует подчеркнуть, что в (1+1)-мерном пространстве-времени модель является перенормируемой, а в (2+1)-мерном случае она перенормируема в рамках разложения по параметру $1/N$, где N — число фермионных полей [20].

Важно отметить, что последние годы особый интерес также вызывает материя с ненулевым киральным химическим потенциалом μ_5 , т. е. кирально-асимметричная (или просто киральная) материя. В киральных средах плотности лево- (n_L) и правоспиральных фермионов (n_R) различны. Киральная материя может образоваться в результате столкновения тяжелых ионов, в компактных звездах, в конденсированных средах и т. д. [21–25, 28, 29].

Таким образом, важно иметь теоретическую модель киральной материи, которая может образовываться в столь различных условиях.

В настоящей работе мы описываем кирально-асимметричную материю при помощи модели ГН в (2+1)-мерном пространстве, которая учитывает два канала — киральный и сверхпроводящий — четырехфермионного взаимодействия частиц. Мы старались не нарушать общности в формулировке и изучении модели, которая подходит как для описания твердого тела, так и для физики высоких энергий. Однако здесь, в отличие от нашей предыдущей работы [26], мы рассматриваем модель, инвариантную относительно дискретной, а не непрерывной γ_5 -симметрии. Также в настоящей работе мы рассматриваем только одно из двух возможных представлений γ_5 -матрицы, которое наиболее часто используется в физике твердого тела (к данному вопросу мы вернемся в заключении).

Модель и ее эффективный потенциал

Наше исследование основано на (2+1)-мерной модели Гросса–Невё с безмассовыми фермионами, принадлежащими фундаментальному мультиплету флейворной группы $SO(N)$. Ее лагранжиан описывает взаимодействие как в фермион-фермионном (или сверхпроводящем), так и фермион-антифермионном (или киральном) каналах:

$$L = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k [\gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 + \mu_5 \gamma^0 \gamma^5] \psi_k + \frac{G_1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2 + \frac{G_2}{N} \left(\sum_{k=1}^N \psi_k^T C \psi_k \right) \left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T \right), \quad (1)$$

где μ — химический потенциал числа фермионов (сопряженный с плотностью фермионов) и μ_5 — киральный химический потенциал (сопряженный с киральной плотностью $n_5 = n_R - n_L$). Как отмечено выше, все фермионные поля ψ_k ($k = 1, \dots, N$) представляют собой фундаментальный мультиплет флейворной группы $SO(N)$. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам $k = 1, \dots, N$ и $\nu = 0, 1, 2$. Каждое поле ψ_k — четырехкомпонентный (приводимый) дираковский спинор (индекс T обозначает транспонирование); γ^ν ($\nu = 0, 1, 2, 5$) — матрицы, действующие в четырехмерном спинорном пространстве. Их вид в этом приводимом представлении группы $SO(2, 1)$ легко найти в литературе (см., например, [16, приложение А]). В частности, в нашей работе в качестве γ_5 используется матрица вида $\gamma_5 \equiv i \begin{pmatrix} 0, & -I \\ I, & 0 \end{pmatrix}$, где

I — единичная матрица 2×2 . Кроме того, в (1) для матрицы зарядового сопряжения используется обозначение $C \equiv \gamma^2$.

Очевидно, лагранжиан L инвариантен относительно преобразований флейворной группы $SO(N)$, которая введена с целью производить расчеты, пользуясь непертурбативным методом разложения по $1/N$ в случае больших N . Физически более интересно, что модель инвариантна относительно дискретного кирального преобразования $\psi_k \rightarrow \gamma^5 \psi_k$, а также относительно непрерывной группы преобразований $U(1)$: $\psi_k \rightarrow \exp(i\alpha) \psi_k$, которая ответственна за сохранение электрического заряда.

Линеаризованная версия лагранжиана (1), которая содержит вспомогательные бозонные поля $\sigma(x)$, $\Delta(x)$ и $\Delta^*(x)$, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_k [\gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 + \mu_5 \gamma^0 \gamma^5 - \sigma] \psi_k - \frac{N\sigma^2}{4G_1} - \frac{N}{4G_2} \Delta^* \Delta - \frac{\Delta^*}{2} [\psi_k^T C \psi_k] - \frac{\Delta^*}{2} [\bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T]. \quad (2)$$

Очевидно, лагранжианы (1) и (2) эквивалентны, в чем можно убедиться, используя уравнения движения Эйлера–Лагранжа для бозонных полей, которые принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= -2 \frac{G_1}{N} (\bar{\psi}_k \psi_k), \\ \Delta(x) &= -2 \frac{G_2}{N} (\psi_k^T C \psi_k), \\ \Delta^*(x) &= -2 \frac{G_2}{N} (\bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T). \end{aligned} \quad (3)$$

Из уравнений (3) легко видеть, что нейтральное поле $\sigma(x)$ является эрмитовой величиной, т. е. $\sigma(x)^\dagger = \sigma(x)$, где символ \dagger обозначает эрмитово сопряжение. Также из (3) следует, что заряженные дифермионные поля $\Delta(x)$ и $\Delta^*(x)$ удовлетворяют соотношениям $\Delta(x)^\dagger = \Delta^*(x)$ и $\Delta(x)^{* \dagger} = \Delta(x)$. Очевидно, что все поля (3) являются синглетами относительно преобразований флейворной группы $SO(N)$. Более того, относительно преобразования четности P :

$$P: \psi_k(t, x, y) \rightarrow \gamma^5 \gamma^1 \psi_k(t, -x, y), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

поля $\sigma(x)$, $\Delta(x)$ и $\Delta^*(x)$ — четные величины, т. е. скаляры. Если дифермионное поле $\Delta(x)$ имеет ненулевое среднее значение по основному состоянию ($\langle \Delta(x) \rangle \neq 0$), то абелева группа симметрии, отвечающая за сохранение заряда, спонтанно нарушается и в модели реализуется фаза сверхпроводимости. В случае $\langle \sigma(x) \rangle \neq 0$ спонтанно нарушена киральная симметрия, вследствие чего фермионы приобретают массу.

Изучим фазовую структуру модели (1), используя эквивалентный лагранжиан (2). В приближении $N \rightarrow \infty$ эффективное действие $\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*)$ имеет следующий вид [20]:

$$\exp(i\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*)) = \int \prod_{l=1}^N [d\bar{\psi}_l] [d\psi_l] \exp\left(i \int \mathcal{L} d^3x\right), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*) = \\ = - \int d^3x \left[\frac{N}{4G_1} \sigma^2(x) + \frac{N}{4G_2} \Delta(x) \Delta^*(x) \right] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Фермионный вклад в эффективное действие, т. е. член $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}$, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp(i\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}) = \int \prod_{l=1}^N [d\bar{\psi}_l] [d\psi_l] \times \\ \times \exp \left\{ i \int \left[\bar{\psi}_k (\gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 + \mu_5 \gamma^0 \gamma^5 - \sigma) \psi_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Delta^*}{2} (\psi_k^T C \psi_k) - \frac{\Delta}{2} (\bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T) \right] d^3x \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Основное состояние составных бозонных полей $\langle \sigma(x) \rangle$, $\langle \Delta(x) \rangle$ и $\langle \Delta^*(x) \rangle$ определяется из условия стационарности эффективного действия:

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \sigma(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \Delta(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \Delta^*(x)} = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем мы предполагаем, что основное состояние полей не зависит от координат, т. е. $\langle \sigma(x) \rangle \equiv M$, $\langle \Delta(x) \rangle \equiv \Delta$, $\langle \Delta^*(x) \rangle \equiv \Delta^*$, где M , Δ и Δ^* — постоянные величины. В действительности, это координаты точки глобального минимума термодинамического потенциала (ТДП) $\Omega(M, \Delta, \Delta^*)$. В лидирующем порядке по $1/N$ ТДП выглядит так:

$$\begin{aligned} \int d^3x \Omega(M, \Delta, \Delta^*) = \\ = - \frac{1}{N} \mathcal{S}_{\text{eff}} \left\{ \sigma(x), \Delta(x), \Delta^*(x) \right\} \Big|_{\sigma(x)=M, \Delta(x)=\Delta, \dots} \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, для определения основных состояний бозонных полей нам достаточно найти точку глобального минимума ТДП $\Omega(M, \Delta, \Delta^*)$, используя следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(M, \Delta, \Delta^*)}{\partial M} = 0, \\ \frac{\partial \Omega(M, \Delta, \Delta^*)}{\partial \Delta} = 0, \quad \frac{\partial \Omega(M, \Delta, \Delta^*)}{\partial \Delta^*} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая выражения (5), (6) и (9), получим формулу для расчета ТДП:

$$\begin{aligned} \int d^3x \Omega(M, \Delta, \Delta^*) = \int d^3x \left(\frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta \Delta^*}{4G_2} \right) + \\ + \frac{i}{N} \ln \left(\int \prod_{l=1}^N [d\bar{\psi}_l] [d\psi_l] \times \right. \\ \left. \times \exp \left(i \int d^3x \left[\bar{\psi}_k D \psi_k - \frac{\Delta^*}{2} (\psi_k^T C \psi_k) - \frac{\Delta}{2} (\bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T) \right] \right) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $D = \gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 + \mu_5 \gamma^0 \gamma^5 - M$. Для дальнейшего удобства, без ограничения общности, будем счи-

тать Δ , Δ^* действительными величинами¹, так что $\Delta = \Delta^* \equiv \Delta$, где Δ — действительная величина. Неперенормированный ТДП после взятия континуального интеграла по фермионным полям² выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{un}}(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + \\ + \frac{i}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[(p_0^2 - E_{1+}^2) (p_0^2 - E_{1-}^2) (p_0^2 - E_{2+}^2) (p_0^2 - E_{2-}^2) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} E_{1\pm}^2 = (\mu_5 + |\mathbf{p}|)^2 + \mu^2 + M^2 + \Delta^2 \pm \\ \pm 2 \sqrt{M^2 (\mu^2 + \Delta^2) + \mu^2 (\mu_5 + |\mathbf{p}|)}, \\ E_{2\pm}^2 = (\mu_5 - |\mathbf{p}|)^2 + \mu^2 + M^2 + \Delta^2 \pm \\ \pm 2 \sqrt{M^2 (\mu^2 + \Delta^2) + \mu^2 (\mu_5 - |\mathbf{p}|)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) легко увидеть, что без потери общности в дальнейшем можно рассматривать только неотрицательные величины динамических переменных ($M \geq 0$ и $\Delta \geq 0$) и химических потенциалов ($\mu \geq 0$ и $\mu_5 \geq 0$). Проинтегрировав выражение (12) по переменной p_0 , получим

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{un}}(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \\ - \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} (E_{1+} + E_{1-} + E_{2+} + E_{2-}). \end{aligned} \quad (14)$$

Очевидно, что при $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$:

$$E_{1+} + E_{1-} + E_{2+} + E_{2-} = 4|\mathbf{p}| + \frac{2(M^2 + \Delta^2)}{|\mathbf{p}|} + \mathcal{O}(1/|\mathbf{p}|^3). \quad (15)$$

Таким образом, выражение (14) — ультрафиолетово расходящаяся величина, которую необходимо перенормировать. Так как разложение (15) не зависит от μ и μ_5 , можно из подынтегрального выражения в (14) вычесть его же значение при $\mu = \mu_5 = 0$,

$$\begin{aligned} (E_{1+} + E_{1-} + E_{2+} + E_{2-}) \Big|_{\mu=\mu_5=0} = \\ = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + (M + \Delta)^2} + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + (M - \Delta)^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

и таким образом получить сходящийся интеграл. При этом, чтобы преобразование было тождественным, необходимо добавить соответствующий расходящийся интеграл. В результате ТДП (14) примет вид

$$\Omega^{\text{un}}(M, \Delta) = V^{\text{un}}(M, \Delta) - A(M, \Delta), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} V^{\text{un}}(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + (M + \Delta)^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + (M - \Delta)^2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

¹ Фазы комплексных величин Δ , Δ^* могут быть исключены соответствующим преобразованием фермионных полей в континуальном интеграле (11).

² Метод расчета континуального интеграла подробно описан в работе [26], а также в пособии [27].

$$A(M, \Delta) = \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[E_{1+} + E_{1-} + E_{2+} + E_{2-} - 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + (M + \Delta)^2} - 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + (M - \Delta)^2} \right]. \quad (19)$$

Еще раз подчеркнем, что интеграл $A(M, \Delta)$ сходится и вся расходимость содержится в слагаемом $V^{\text{un}}(M, \Delta)$. Чтобы перенормировать $V^{\text{un}}(M, \Delta)$, нужно сначала его регуляризовать, ограничив интегрирование в (18) областью $|p_1| < \Lambda$ и $|p_2| < \Lambda$. Далее необходимо потребовать такую зависимость голых констант связи G_1 и G_2 от Λ , что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ как выражение (18), так и весь ТДП (17) станут конечными величинами, которые мы обозначаем соответственно как $V^{\text{ren}}(M, \Delta)$ и $\Omega^{\text{ren}}(M, \Delta)$. Не вдаваясь в детали¹, приведем выражения для констант связи, которые сокращают расходимость:

$$\frac{1}{4G_1} \equiv \frac{1}{4G_1(\Lambda)} = \frac{2\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi g_1}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{4G_2} \equiv \frac{1}{4G_2(\Lambda)} = \frac{2\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi g_2},$$

где $g_{1,2}$ — конечные и не зависящие от Λ параметры модели, которые имеют размерность обратной массы. Так как голые константы связи G_1 и G_2 инварианты относительно ренорм-группы, этим свойством обладают и константы $g_{1,2}$.

Таким образом, конечное выражение для ТДП получается из (17) путем вычитательной процедуры с учетом (20):

$$\Omega^{\text{ren}}(M, \Delta) = V^{\text{ren}}(M, \Delta) - A(M, \Delta), \quad (21)$$

где $V^{\text{ren}}(M, \Delta)$ — эффективный потенциал модели в вакууме, т. е. при $\mu = \mu_5 = 0$:

$$V^{\text{ren}}(M, \Delta) = \frac{M^2}{2\pi g_1} + \frac{\Delta^2}{2\pi g_2} + \frac{(M + \Delta)^3}{6\pi} + \frac{|M - \Delta|^3}{6\pi}. \quad (22)$$

Численный анализ показывает, что глобальный минимум ТДП (21) может располагаться только на осях M и Δ плоскости (M, Δ) . Поэтому для нахождения точки глобального минимума ТДП (21) достаточно рассмотреть проекции $\Omega^{\text{ren}}(M, \Delta)$ на эти оси, т. е. сравнить между собой наименьшие значения функций $F_1(M) = \Omega^{\text{ren}}(M, 0)$ и $F_2(\Delta) = \Omega^{\text{ren}}(0, \Delta)$, где

$$F_1(M) = \frac{M^2}{2\pi g_1} + \frac{(\mu_5^2 + M^2)^{3/2}}{3\pi} - \frac{\theta(\mu - \sqrt{M^2 + \mu_5^2})}{6\pi} \times$$

$$\times [\mu^3 - 3\mu(M^2 - \mu_5^2) + 2(\mu_5^2 + M^2)^{3/2}] -$$

$$- \frac{\theta(\sqrt{M^2 + \mu_5^2} - \mu)}{2\pi} \times$$

$$\times \left[\mu_5^2 \sqrt{\mu_5^2 + M^2} + \mu_5 M^2 \ln \left(\frac{\mu_5 + \sqrt{\mu_5^2 + M^2}}{M} \right) \right] -$$

$$- \frac{\theta(\mu - M)\theta(\sqrt{M^2 + \mu_5^2} - \mu)}{2\pi} \times$$

$$\times \left[\mu_5 \mu \sqrt{\mu^2 - M^2} - \mu_5 M^2 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2}}{M} \right) \right], \quad (23)$$

$$F_2(\Delta) = \frac{\Delta^2}{2\pi g_2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\eta=\pm} \left\{ \frac{[(\mu + \eta\mu_5)^2 + \Delta^2]^{3/2}}{3} - \right.$$

$$- \frac{(\mu + \eta\mu_5)^2}{2} \sqrt{(\mu + \eta\mu_5)^2 + \Delta^2} -$$

$$\left. - \frac{(\mu + \eta\mu_5)\Delta^2}{2} \ln \left| \frac{\mu + \eta\mu_5 + \sqrt{(\mu + \eta\mu_5)^2 + \Delta^2}}{\Delta} \right| \right\}. \quad (24)$$

Отметим, что при $\mu_5 = 0$ эти выражения совпадают с соответствующими выражениями для ТДП в работе [16].

2. Фазовая структура модели

Для того, чтобы исследовать фазовую диаграмму модели, необходимо решить задачу поиска точки глобального минимума (ТГМ) ТДП (21). Как было отмечено выше, положение точки минимума ТДП может соответствовать трем разным фазам, которые могут быть реализованы в модели:

1) если ТГМ имеет вид $(0, 0)$, то система находится в симметричной фазе;

2) если минимум ТДП (21) располагается в точке вида $(M \neq 0, 0)$, то мы имеем фазу со спонтанным нарушением киральной инвариантности;

3) если ТГМ имеет вид $(0, \Delta \neq 0)$, то система находится в сверхпроводящей фазе.

В рамках нашей модели для нахождения фазовой структуры достаточно сравнить между собой наименьшие значения функций $F_1(M)$ и $F_2(\Delta)$, что в конечном счете и определяет ТГМ ТДП (21). Ниже мы построили несколько (g_1, g_2) -фазовых диаграмм (портретов) модели, которые дают информацию о виде ТГМ ТДП в зависимости от констант связи g_1, g_2 при различных фиксированных значениях химических потенциалов μ и μ_5 .

Начнем с вакуумного случая $\mu = \mu_5 = 0$. Результат поиска точки глобального минимума выражения (22) представлен на фазовом портрете рис. 1. Области, обозначенные на этом рисунке как I, II и III, соответствуют симметричной фазе, фазе с нарушением киральной симметрии, а также фазе сверхпроводимости.

Далее на рис. 2 представлена серия (g_1, g_2) -фазовых диаграмм модели при произвольном фиксированном ненулевом значении μ_5 и при различных значениях химического потенциала μ : $\mu = 0$; $\mu = 0.2\mu_5$; $\mu = 0.5\mu_5$ и $\mu = \mu_5$ соответственно. По осям рис. 2, *a-g* отложены безразмерные величины $g_1\mu_5$ и $g_2\mu_5$. Отметим некоторые характерные

¹ Процедура перенормировки подробно описана в работе [16].

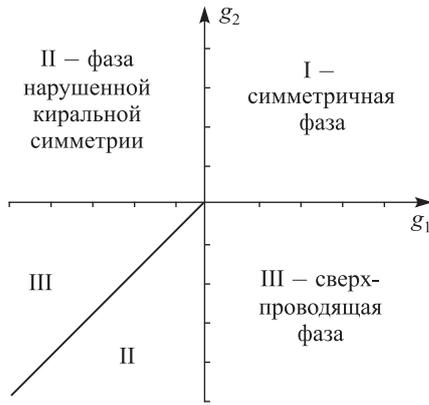


Рис. 1. (g_1, g_2) -фазовый портрет модели при $\mu = \mu_5 = 0$. При $g_{1,2} < 0$ линия l определена соотношением $l \equiv \{(g_1, g_2): g_1 = g_2\}$

свойства модели при данном выборе внешних параметров. Во-первых, видно, что при фиксированном $\mu_5 \neq 0$ и $\mu = 0$ на фазовом портрете рис. 2, а отсутствует симметричная фаза I. Во-вторых, сравнивая фазовые диаграммы рис. 2, б, в, г, можно установить эволюцию сверхпроводящей фазы модели с ростом химического потенциала μ , а именно с ростом μ увеличивается область, занимаемая сверхпроводящей фазой III.

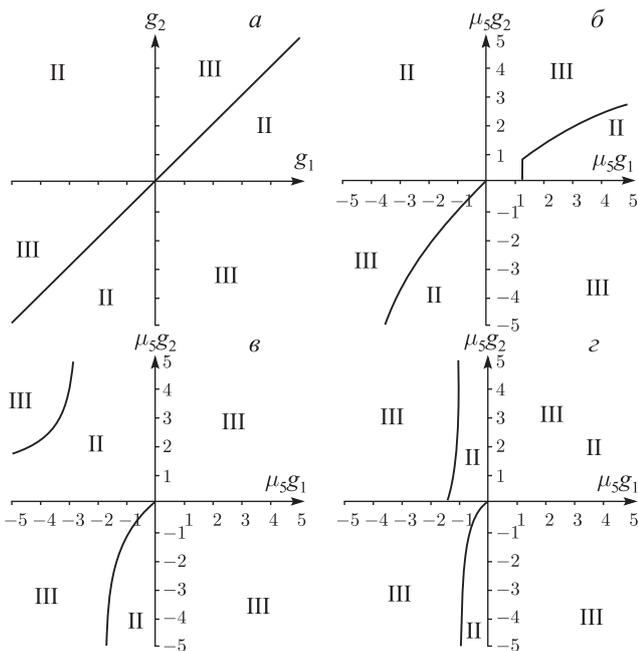


Рис. 2. Серия (g_1, g_2) -фазовых диаграмм модели при произвольном фиксированном ненулевом значении μ_5 и при различных значениях химического потенциала μ : $\mu = 0, 0.2\mu_5, 0.5\mu_5$ и μ_5 соответственно. Используются те же обозначения фаз, что и на рис. 1

Рассмотрим другую серию (g_1, g_2) -диаграмм, которая соответствует одному и тому же произвольному ненулевому фиксированному значению μ при разных, тоже фиксированных значениях μ_5 (рис. 3, а-г). В этом случае оси диаграмм обозначают уже другие безразмерные величины $g_1\mu$ и $g_2\mu$. Значения параметра μ_5 на рис. 3, а-г равно $\mu_5 = 0$;

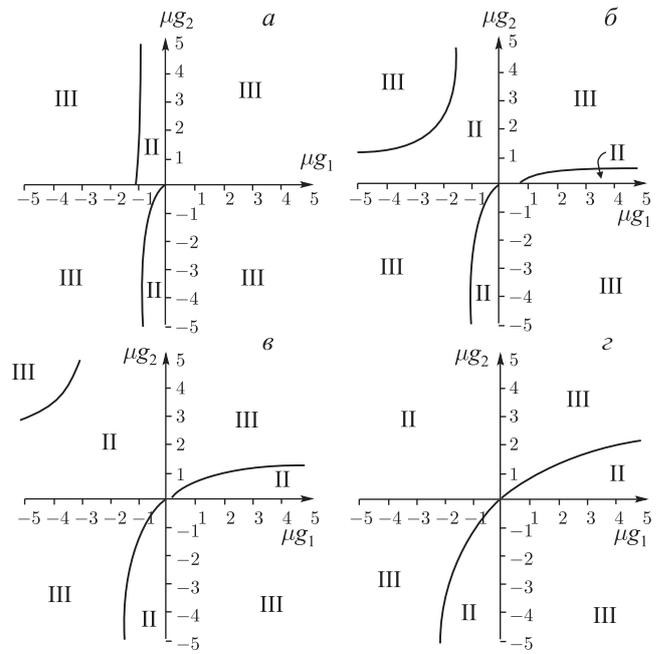


Рис. 3. Серия (g_1, g_2) -фазовых диаграмм модели при произвольном фиксированном ненулевом значении μ и при различных значениях химического потенциала μ_5 : $\mu_5 = 0, 3\mu, 5\mu$ и 10μ соответственно. Используются те же обозначения фаз, что и на рис. 1

$\mu_5 = 3\mu; \mu_5 = 5\mu; \mu_5 = 10\mu$ соответственно. Следует отметить, что в этом случае также отсутствует симметричная фаза. Более важный результат заключается в том, что с ростом значения μ_5 (при фиксированном значении μ) фазовая (g_1, g_2) -диаграмма стремится приобрести вид, как на рис. 2, а. Иными словами, (g_1, g_2) -фазовые портреты модели одинаковы при $\mu_5 \neq 0, \mu = 0$ и при $\mu_5 \rightarrow \infty, \mu \neq 0$, т.е. увеличением кирального химического потенциала μ_5 можно нивелировать влияние на систему фермионного химического потенциала μ .

Заключение

В настоящей работе мы рассмотрели частный случай взаимодействия фермионов, который включает как киральный, так и сверхпроводящий каналы взаимодействия. Взаимодействия такого типа могут наблюдаться в физике высоких энергий и физике твердого тела. Выбранная пониженная размерность пространства продиктована интересом к графеноподобным материалам, а также к высокотемпературным сверхпроводникам, имеющим планарную кристаллическую структуру, которые эффективно описываются в пространстве-времени размерности $(2+1)$.

В работе использовалась четырехфермионная модель взаимодействия, которая применяется сегодня для описания широкой области явлений. Основное внимание направлено на киральность материи, что было обеспечено введением дополнительного химического потенциала μ_5 . Образование данного вида материи ожидается в ходе экспериментов по столк-

новению тяжелых ионов, а также в экспериментах по допированию графеноподобных материалов.

На основе лагранжиана взаимодействия построен термодинамический потенциал и рассчитана серия (g_1, g_2) -фазовых диаграмм для различных значений внешних параметров. Из поведения фазовых диаграмм в зависимости от роста химических потенциалов выявлено, что фермионный химический потенциал μ индуцирует образование фазы сверхпроводимости в большем диапазоне значений констант связи. Рост кирального химического потенциала μ_5 препятствует влиянию фермионного химического потенциала μ на систему. Данный результат с соответствующей интерпретацией может иметь практический интерес в разных областях физики.

Обсудим теперь роль вида матрицы киральных преобразований γ^5 в фазовых превращениях в $(2+1)$ -мерных моделях ГН. Напомним, что именно приводимое четырехмерное представление группы $SO(2, 1)$ для спиноров Дирака позволяет вводить киральные преобразования в таких моделях (в неприводимом представлении группы $SO(2, 1)$ матрицы γ_5 не существует). Тонкость состоит в том, что для приводимого четырехмерного представления группы $SO(2, 1)$ существуют две различные матрицы, которые антикоммутируют со всеми γ^ν -матрицами ($\nu = 0, 1, 2$), а также между собой. Каждая из этих матриц подходит на роль γ^5 -матрицы киральных преобразований. Напомним, в предлагаемой работе используется матрица γ^5 , представленная в разд. 1 сразу после формулы (1). Кроме того, в нашей недавней работе [26], также посвященной изучению влияния химических потенциалов μ и μ_5 на сверхпроводимость в $(2+1)$ -мерных ГН моделях, правда, в контексте дуальности между киральной симметрией и сверхпроводимостью, был использован альтернативный вид γ^5 -матрицы для приводимого четырехмерного представления группы $SO(2, 1)$,

$$\gamma_5 \equiv \begin{pmatrix} 0, & I \\ I, & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } I \text{ — единичная матрица } 2 \times 2.$$

Сравнение результатов настоящей работы и выводов работы [26] показывает, что с увеличением химического потенциала μ (при любых фиксированных значениях параметров g_1, g_2 и μ_5) в системе обязательно появляется сверхпроводимость, независимо от вида матрицы γ^5 . Противоположным свойством обладает киральный химический потенциал μ_5 , если для γ^5 используется представление работы [26]: в этом случае рост μ_5 обязательно приводит к переходу системы в фазу с нарушенной киральной симметрией (эти свойства химических потенциалов μ и μ_5 — частные проявления свойства дуальности между сверхпроводимостью и спонтанным нарушением киральной инвариантности). Если же в качестве γ^5 использовать матрицу, представленную сразу после лагранжиана модели (1), то, как нетрудно видеть из результатов нашей работы, рост μ_5 не обязательно приводит к появлению в си-

стеме фазы с нарушенной киральной симметрией. Действительно, из рис. 2, а, который представляет собой фазовую (g_1, g_2) -диаграмму модели не только при $\mu_5 \neq 0, \mu = 0$, но и при $\mu_5 \rightarrow \infty, \mu \neq 0$, видно, что, например, в области констант связи $\{g_{1,2} > 0, g_2 > g_1\}$ всегда будет фаза сверхпроводимости. Стоит также отметить, что во избежание загромождения настоящей статьи мы исследуем только один из двух видов γ_5 -матриц, а именно тот, который представляет оригинальный результат. Фазовые диаграммы модели (11), но с альтернативным видом γ_5 -матрицы выглядят аналогично исследованным в работе [26].

Подводя итог этого обсуждения, можно сказать, что выбор представления для матрицы γ^5 в $(2+1)$ -мерных теориях ГН не влияет существенно на результаты исследования лишь в случае $\mu_5 = 0$, т.е. когда не учитывается киральная асимметрия модели. В случае же не нулевого значения μ_5 выбор γ_5 -матрицы может существенным образом влиять на результат, как в исследуемом случае дискретной симметрии. Это свойство можно назвать характерной особенностью четырехфермионных моделей в пространстве $(2+1)$.

Список литературы

1. Ebert D., Volkov M.K. // Z. Phys. C. 1983. **16**. P. 205.
2. Ebert D., Reinhardt H., Volkov M.K. // Progr. Part. Nucl. Phys. 1994. **33**. P. 1.
3. Buballa M. // Phys. Rept. 2005. **407**. P. 205.
4. Nambu Y., Jona-Lasinio G. // Phys. Rev. 1961. **122**. P. 345; Phys. Rev. 1961. **124**. P. 246.
5. Gross D.J., Neveu A. // Phys. Rev. 1974. D. **10**. P. 3235.
6. Криве И.В., Рожавский А.С. // УФН. 1987. **152**. P. 33.
7. Heeger A.J., Kivelson S., Schrieffer J.R. et al. // Rev. Mod. Phys. 1988. **60**. P. 781.
8. Chodos A., Minakata H. // Phys. Lett. A. 1994. **191**. P. 39.
9. Caldas H., Kneur J.L., Pinto M.B. et al. // Phys. Rev. B. 2008. **77**. 205109.
10. Schön V., Thies M. // arXiv: hep-th/0008175.
11. Thies M. // J. Phys. A. 2006. **39**. 12707.
12. Semenoff G.W., Shovkova I.A., Wijewardhana L.C.R. // Mod. Phys. Lett. A. 1998. **13**. P. 1143.
13. Жуковский В.Ч., Клименко К.Г., Худяков В.В., Эберт Д. // Письма в ЖЭТФ. 2001. **73**. С. 137.
14. Жуковский В.Ч., Клименко К.Г. // ТМФ. 2003. **134**. С. 289.
15. Marino E.C., Nunes L.H.C.M. // Nucl. Phys. B. 2007. **769**. P. 275.
16. Klimenko K.G., Zhokhov R.N., Zhukovsky V.C. // Phys. Rev. D. 2012. **86**. 105010.
17. Klimenko K.G., Zhokhov R.N., Zhukovsky V.C. // Mod. Phys. Lett. A. 2013. **28**. 1350096.
18. Ebert D., Klimenko K.G., Kolmakov P.B., Zhukovsky V.Ch. // Annals Phys. 2016. **371**. P. 254.
19. Klimenko K.G. // Z. Phys. C. 1988. **37**. P. 457.
20. Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H. // Phys. Rept. 1991. **205**. P. 59.
21. Adrianov A.A., Espriu D., Planells X. // Eur. Phys. J. C. 2013. **73**. P. 2294; Eur. Phys. J. C. 2014. **74**. P. 2776.

22. *Gatto R., Ruggieri M.* // Phys. Rev. D. 2012. **85**. 054013.
 23. *Yu L., Liu H., Huang M.* // Phys. Rev. D. 2014. **90**. 074009.
 24. *Cao G., Zhuang P.* // Phys. Rev. D. 2015. **92**. 105030.
 25. *Braguta V.V., Kotov A.Y.* // Phys. Rev. D. 2016. **93**. 105025.
 26. *Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhukovsky V.Ch.* // Phys. Rev. D. 2016. **93**. 105010.
 27. *Васильев А.Н.* // Функциональные методы в квантовой теории поля и статистической физике. Л., 1976.
 28. *Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G.* // Phys. Rev. D. 2016. **94**. 116016.
 29. *Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N., Zhukovsky V.Ch.* // Phys. Rev. D. 2017 (in print). ArXiv: 1704.01477.

Superconductivity in chiral-asymmetric matter within the (2+1)-dimensional four-fermion model

V. Ch. Zhukovsky^{1,a}, K. G. Klimenko^{2,b}, T. G. Khunjua³

¹Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

²State Research Center of Russian Federation — Institute for High Energy Physics, NRC «Kurchatov Institute, Protvino, Moscow Region 142281, Russia.

³Department of General Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^a zhukovsk@phys.msu.ru, ^b kklim@ihep.ru.

The phase structure of chiral-asymmetric matter has been studied within the (2+1)-dimensional quantum-field theory with the fermion–antifermion and fermion–fermion (or superconducting) channels of four-fermion interaction. For this purpose, the model takes both the chemical potential of the number of particles μ and the chiral chemical potential μ_5 conjugated to the difference between the numbers of right and left fermions into account. A series of phase diagrams was plotted for different chemical potentials. It is shown that the chemical potential μ promotes the appearance of a superconducting phase, while an increase in the chemical potential μ_5 suppresses the effect of the chemical potential μ on a system. The results of this study may be of interest for high-energy physics, condensed matter physics and, in particular, graphene physics.

Keywords: four-fermion model, phase transitions, chiral matter, superconductivity.

PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz.

Received 20 July 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. **72**, No. 3. Pp. 250–256.

Сведения об авторах

1. Жуковский Владимир Чеславович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
2. Клименко Константин Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник; тел.: (496) 774-11-98, e-mail: kklim@ihep.ru.
3. Хунджуа Тамаз Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, физик I к.; тел.: (926) 373-42-25, e-mail: tg.khunjua@physics.msu.ru.