

Об асимптотическом поведении пакетов линейных волн в многомерном случае. Эталонные решения

В. Г. Гневывшев^{1,a}, С. И. Бадулин^{1,2,b}

¹ *Институт океанологии имени П. П. Шишова Российской академии наук.
Россия, 117997, Москва, Нахимовский пр., д. 36.*

² *Новосибирский государственный университет.
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2.*

E-mail: ^a avi9783608@gmail.com, ^b badulin@ioran.ru

Статья поступила 12.09.2016, подписана в печать 14.10.2016.

Рассматривается классическая задача о распространении линейных волновых пакетов в диспергирующих средах. В терминах интегралов Фурье для волновых пакетов, имеющих в начальный момент времени гауссово распределение, построены асимптотики задачи Коши для случая двух пространственных измерений. Построенные асимптотики регулярны на каустике и описывают новые физические свойства пакетов — повороты в пространстве и формирование аномально слабо диспергирующего (квазидиспергирующего) волнового фронта.

Ключевые слова: линейные волны, волновая дисперсия, метод стационарной фазы, метод наискорейшего спуска, метод перевала, дисперсия волновых пакетов.

УДК: 532.591. PACS: 47.35.-i, 92.10.-H.

Введение

Задача о распространении линейных диспергирующих волн считается хорошо изученной. Мощный арсенал математических средств базируется на представлении общего решения в виде разложения по собственным функциям задачи, что позволяет решать разнообразные задачи распространения волн в неоднородной и нестационарной среде. Асимптотические методы стационарной фазы и перевала были предложены еще в XIX в. (П.-С. Лаплас, Дж. Г. Стокс, У. Кельвин) как подходы, существенным образом учитывающие волновые свойства: осциллирующий характер решений и/или локализацию этих решений в физическом пространстве или в пространстве волновых векторов. Именно эти методы дают возможность анализа основного физического эффекта, определяющего эволюцию пакетов линейных волн, — волновой дисперсии.

Случай одномерного распространения волн представляет особый интерес, поскольку позволяет сформулировать ряд важных результатов в виде явных аналитических выражений. Прежде всего, это результаты об асимптотическом поведении волновых пакетов при больших временах или на большом удалении от источника волн. Асимптотический анализ предсказывает затухание амплитуды как корня квадратного времени в системе координат, связанной с максимумом волнового возмущения, для волн произвольной физической природы за исключением особых случаев вырождения дисперсионного соотношения — обращения в нуль второй производной частоты по волновому числу. Естественное решение проблемы вырождения, включение в анализ высших дифференциалов дисперсионной зависимости приводит к решению в терминах функции Эйри и более

медленному дисперсионному затуханию амплитуды волны как $A \sim t^{-1/3}$.

Обобщение асимптотических методов на многомерный случай довольно часто проводится «по аналогии», без должного учета многомерности задачи. Очень часто считается, что преобразованием системы координат можно свести задачу к одномерной и далее следовать рецепту одномерной задачи буквально. Вырождение квадратичной формы, связанной со вторым дифференциалом, трактуется в том же духе: собственный вектор, связанный с нулевым собственным значением, определяет направление, в котором задача может быть сведена к одномерной с привычными решениями в виде функции Эйри. Во многих волновых задачах подобная вольность не является существенной, а проведение математически строгого рассмотрения может рассматриваться как излишество, не имеющее отношения к решаемым физическим вопросам. Ниже мы покажем, что уже в двумерной задаче математически строгое рассмотрение обнаруживает важные физические эффекты и даже при вырождении квадратичной формы обращение к более высоким (кубическим) членам асимптотического разложения не является необходимым. При этом решением оказывается не степенная зависимость $A \sim t^{-1/3}$, а $A = \text{const}$.

Геофизическая гидродинамика предлагает богатейший ряд задач распространения волн в среде, анизотропия которой связана с эффектами вращения и стратификации. Именно в этих задачах корректное применение асимптотических методов обнаруживает целый ряд замечательных эффектов, определяемых именно неоднородностью волновых пакетов и конечностью их объема. В настоящей работе рассмотрены основные эффекты, связанные с многомерностью, и примеры, в которых эти эффекты возникают.

Статья открывает серию исследований эффектов многомерности в волновых задачах.

1. Асимптотические методы в теории распространения точечных пакетов линейных волн

Рассмотрим классическую задачу о развитии возмущения в анизотропной, пространственно-однородной среде, допускающей существование волн малой амплитуды. Случаи пространственной неоднородности и нестационарности среды здесь не рассматриваются и будут представлены в последующих работах. Пусть источники волн и затухание отсутствуют, а начальное возмущение локализовано в некоторой области физического пространства (достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности). Предположим, что в процессе решения задачу удалось свести к многомерному интегралу Фурье вида

$$f_n(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n/2} \int F_n(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t) d\mathbf{k}, \quad (1)$$

где n — размерность пространства; $F_n(\mathbf{k})$ — фурье-образ функции f_n в момент времени $t=0$; $\mathbf{k}$ — многомерный волновой вектор; $\omega(\mathbf{k})$ — дисперсионное соотношение, которое определяется типом рассматриваемых волн малой амплитуды и полагается известным. Действительная часть (1) $\text{Re } f_n(\mathbf{x}, t)$ является решением физической задачи.

В общем случае интеграл (1), очевидно, аналитически вычислен быть не может. В то же время асимптотические методы могут быть эффективно использованы именно для интегралов вида (1). В современной литературе математический аппарат асимптотических методов изложен достаточно полно [1–4]. Многомерный метод стационарной фазы (см. классическую книгу Дж. Лайтхилла [4]) отражает особенности этих методов наиболее ярко. Большой параметр (время или расстояние) приводит к вычислению интеграла (1) от быстро осциллирующей функции. Старший член соответствующего асимптотического разложения связан с вкладами окрестностей точек экстремумов, стационарности фазы (отсюда название метода). Разложение в ряд Тейлора фазы $\theta = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t$ с точностью до квадратичных членов оказывается достаточным для вычисления старшего члена разложения. В том или ином виде соответствующая квадратичная форма используется в различных асимптотических подходах (например, классический метод стационарной фазы [2], метод канонического оператора Маслова [1]).

Присутствие формально большого параметра в фазе θ (1) означает медленность изменения функции $F_n(\mathbf{k})$, т.е. сильную локализацию волновой функции в физическом пространстве. В этом случае имеет смысл говорить о *точечных волновых пакетах* и *точечных же асимптотиках решений* (1). Разложение фазовой функции $\theta = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t$ в этом случае связывается с точкой-максимумом волнового возмущения в физическом пространстве. При вы-

рождении квадратичной формы в выделенной таким образом точке возникает сингулярность в асимптотическом выражении.

В настоящей работе мы исходим из иных физических предпосылок и предлагаем *метод эталонных решений*. Мы полагаем пакет локализованным в пространстве волновых векторов, а значит, рассматриваем волновые пакеты конечного размера, слабо модулированные в физическом пространстве. Такой подход также приводит к анализу поведения квадратичной формы для разложения фазовой функции $\theta = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t$, но не относительно текущего максимума волновой амплитуды, а относительно несущей гармоники модулированного волнового пакета. Говоря об *эталонных функциях и решениях* мы лишь меняем способ описания кинематики пакета, переходя от волновой функции в координатном пространстве (аналогия с эйлеровым описанием в гидродинамике), к описанию волнового пакета-квазичастицы, маркированного волновым вектором несущей волновой гармоники (лагранжев подход). Заметим, что очень близкий подход с использованием эталонных (модельных) гауссовых пакетов широко используется, например, в задачах радиофизики и волоконной оптики. Для обоих подходов исключительно важным является вопрос о пределах их применимости, который здесь не рассматривается. Физические аргументы, приведенные выше, представляются достаточными для широкого круга задач распространения волн.

Рассмотрим разложение Тейлора для частоты $\omega(\mathbf{k})$ в окрестности точки $\mathbf{k}_0 = (k_0, l_0)$:

$$\begin{aligned} \omega(k, l) = & \omega(k_0, l_0) + \omega'_k(k - k_0) + \omega'_l(l - l_0) + \\ & + \frac{1}{2}\omega''_{kk}(k - k_0)^2 + \frac{1}{2}\omega''_{ll}(l - l_0)^2 + \omega'_{kl}(k - k_0)(l - l_0) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Квадратичной части разложения фазы θ в (1) поставим в соответствие *действительную симметричную* двумерную матрицу и характеристическое уравнение [5]

$$\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} tk_0^2\omega''_{kk} & tk_0l_0\omega''_{kl} \\ tk_0l_0\omega''_{kl} & tl_0^2\omega''_{ll} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$\det(\mathbf{A}_2 - \lambda_{1,2}\mathbf{E}) = \det \begin{vmatrix} tk_0^2\omega''_{kk} - \lambda_{1,2} & tk_0l_0\omega''_{kl} \\ tk_0l_0\omega''_{kl} & tl_0^2\omega''_{ll} - \lambda_{1,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение для собственных значений

$$\lambda_{1,2}^2 - \lambda_{1,2} \text{Tr}(\mathbf{A}_2) + \det(\mathbf{A}_2) = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты в (4) — определитель $\det(\mathbf{A}_2)$ и след матрицы $\text{Tr}(\mathbf{A}_2)$ являются ортогональными инвариантами матрицы $\mathbf{A}_2$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_2) = & t^2 k_0^2 l_0^2 [\omega''_{kk}\omega''_{ll} - (\omega''_{kl})^2], \\ \text{Tr}(\mathbf{A}_2) = & t [k_0^2\omega''_{kk} + l_0^2\omega''_{ll}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что эйлерова кривизна — это след матрицы $\text{Tr}(\mathbf{A}_2)$ [6]. В силу *симметричности*

и вещественности матрицы $\mathbf{A}_2$ характеристические значения $\lambda_{1,2}$ также будут вещественны. Подчеркнем простой, но важный факт: для вычисления интеграла (1) с помощью метода стационарной фазы необязательно вычислять корни (4). Амплитуда волнового пакета определяется произведением $\lambda_1 \lambda_2$, т.е., в соответствии с теоремой Виета, определителем $\mathbf{A}_2$. Асимптотика интеграла (1) $f_2(\mathbf{x}, t) \approx (i\lambda_1 \lambda_2)^{-1/2} \approx (i \det \mathbf{A}_2)^{-1/2}$ имеет простой физический смысл: произведение $\lambda_1 \lambda_2$ пропорционально физическому объему волнового пакета (λ_1 и λ_2 задают главные оси квадратичной формы $\mathbf{A}_2$). Мнимая единица задает сдвиг фазы $\pm\pi/4$, а знак этого сдвига определяется условием затухания решения на бесконечности и может быть получен с помощью выхода в комплексную плоскость и различных способов замыкания контура интегрирования. В одном случае это приводит к интегралу Фурье, впервые вычисленному Эйлером [7]. Введение малого затухания и обход полюса в комплексной плоскости приводит к методу перевала [см., например, [4]] и, естественно, дает тот же результат.

Обобщение на случай произвольной размерности пространства n не представляет особых трудностей. Асимптотика интеграла (1) имеет вид

$$f_n(\mathbf{x}, t) \approx F(\mathbf{k}_0) [\det \mathbf{A}_n]^{-1/2} \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}_0)t)] \times \exp\left[\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \mathbf{A}_n\right] \quad (6)$$

в пределе $t \rightarrow +\infty$, $|x_i| \rightarrow +\infty$. Волновой вектор $\mathbf{k}_0$ задается условием стационарности

$$\frac{x_i}{t} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}, \quad (7)$$

а условие

$$\det \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right) \neq 0 \quad (8)$$

определяет достаточность разложения (2) с точностью до квадратичных по малым отклонениям волнового вектора членов. В (6) $\operatorname{sgn} \mathbf{A}_n$ — сигнатура матрицы, разность числа положительных и отрицательных собственных значений матрицы $\mathbf{A}_n$.

Читается асимптотика (6) следующим образом. При больших t , x_i и конечном отношении x_i/t разрешим лучевые уравнения (7) относительно волновых чисел $k_i = k_i(x_i/t)$. Найденное значение волнового вектора $\mathbf{k}_0(\mathbf{x}/t)$ в (6) характеризует изменение масштаба (длины, периода) несущей волнового пакета при его распространении. Заметим, что нахождение $\mathbf{k}_0(\mathbf{x}/t)$, т.е. обращение лучевых уравнений может оказаться нетривиальным даже для волн в однородной и изотропной среде, не говоря о более общих ситуациях.

Асимптотику (6)–(8) можно назвать дисперсионной: при больших временах и отличном от нуля определителе (8) каждая пространственная координата дает затухание $t^{-1/2}$, а амплитуда волны зату-

хает обратно пропорционально «объему» волнового пакета в n -мерном пространстве, т.е. как $t^{-n/2}$. Говоря об «объеме» волновых пакетов, следует помнить об условности этого термина, а именно мы говорим об асимптотическом поведении точечного волнового пакета, распределение которого описывается в пространстве волновых чисел дельта-функцией. Отсюда в (6) появляется амплитуда фурье-гармоники $F_n(\mathbf{k}_0)$ в точке стационарности (7). Ниже мы используем разложение (2) для альтернативного метода вычисления асимптотики интеграла (1). Отличие сводится фактически к другому определению вектора $\mathbf{k}_0 = (k_0, l_0)$.

Переход к задаче о волновых пакетах конечного объема кажется очевидным — следует ввести в рассмотрение пространственно-временную модуляцию волнового пакета и учесть возникающие эффекты. Один из способов сделать это — введение формально малого затухания для только что рассмотренных точечных волновых пакетов. Окончательное решение получается в пределе бесконечно малого затухания. Проблема с предельным переходом оказывается непреодолимой на каустиках, связанных с сингулярностью асимптотического выражения, когда определитель матрицы $\operatorname{sgn} \mathbf{A}_n$ обращается в нуль. В таких точках у известных асимптотических методов, в том числе и у метода канонического оператора Маслова, возникают проблемы, которые решаются построением нового асимптотического решения. Эти проблемы решаются по аналогии с одномерной задачей учетом кубического члена в разложении частоты. Возникающие таким образом решения в виде функций Эйри сшиваются с асимптотическими решениями вдали от каустики. Задача оказывается довольно трудоемкой.

Ниже мы покажем, как конечность физического объема пакета может быть учтена путем «размазывания» решения в пространстве волновых векторов. Ключевым отличием нашего подхода является то, что мы не требуем выполнения условия стационарности (7). Это позволяет обойтись без решения лучевых уравнений, необходимого для точечных пакетов. Кроме того, мы избегаем проблем на каустике при обращении в нуль определителя $\mathbf{A}_n$ (8). Это достигается ценой ограничения на вид начальных условий — мы ограничиваемся эталонными формами пакетов. На наш взгляд, такой физически наглядный прием не может существенно исказить эффекты трансформации волновых пакетов малого, но конечного объема, прежде всего эффект поворота пакетов.

2. Физические эффекты распространения волновых пакетов конечного размера

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ волновой пакет имеет гауссово распределение

$$f_2(x, y, t = 0) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \exp \left[ik_0 x + il_0 y - \frac{x^2}{2(\Delta x)^2} - \frac{y^2}{2(\Delta y)^2} \right] \quad (9)$$

и фурье-образ

$$F_2(k, l) = \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{2(\Delta k)^2} - \frac{(l - l_0)^2}{2(\Delta l)^2} \right], \quad (10)$$

где $\Delta k = (\Delta x)^{-1}$, $\Delta l = (\Delta y)^{-1}$ характеризуют ширину пакета в координатном и фурье-пространствах. Соответствующие решения для распределений (9), (10) будем называть *эталонными решениями*. В пределе $\Delta k \rightarrow 0$, $\Delta l \rightarrow 0$ распределение (10) стремится к δ -функции, однако интеграл (1) будет принципиально отличаться от представленных нами выше точечных асимптотик (6)–(7). При этом, что очень важно, у нас не возникает необходимости в предельном переходе!

Для подынтегрального выражения в (1) построим *симметричную комплексную* двумерную матрицу $\mathbf{B}_2$ квадратичного приближения

$$\mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 1 + it(\Delta k)^2 \omega''_{kk} & it\Delta k \Delta l \omega''_{kl} \\ it\Delta k \Delta l \omega''_{kl} & 1 + it(\Delta l)^2 \omega''_{ll} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

которая отличается от матрицы $\mathbf{A}_2$ в (3) единицей на диагонали. Еще одно важное отличие: в $\mathbf{A}_2$ мы использовали несущее волновое число только из соображений размерности, на последующие выкладки этот масштаб не оказывал никакого влияния. Введение новых пространственных масштабов ширины пакета Δk , Δl снимает подобное вырождение, присутствующее в точечных решениях.

Поведение эталонных решений по-прежнему определяется инвариантами квадратичной формы (11), однако сами эти инварианты имеют более сложный вид

$$\det \mathbf{B}_2 = 1 + it[(\Delta k)^2 \omega''_{kk} + (\Delta l)^2 \omega''_{ll}] + t^2(\Delta k)^2(\Delta l)^2[(\omega''_{kl})^2 - \omega''_{kk}\omega''_{ll}], \quad (12)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{B}_2) = it[(\Delta k)^2 \omega''_{kk} + (\Delta l)^2 \omega''_{ll}] + 2.$$

Эти зависимости не сводятся к произведениям комбинации вторых производных дисперсионной зависимости (ср. (4)), что подразумевает отсутствие масштаба пакета. Соответственно амплитуда A не обращается в нуль при вырождении квадратичной формы, определяемой единственно волновой дисперсией. Более общий вид аргумента экспоненты, содержащей линейные члены, принципиально не усложняет задачу. Преобразование Фурье экспоненты квадратичной формы (см., например, [2]) дает

$$\int_{R^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \mathbf{B}x, x \rangle - i \langle x, \xi \rangle \right] dx = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{B})^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \mathbf{B}^{-1} \xi, \xi \rangle \right]. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{B}^{-1}$ — обратная матрица. Для решений, затухающих на бесконечности, имеем

$$\sqrt{\det \mathbf{B}^{-1}} = |\det \mathbf{B}|^{-1/2} \exp \left[-\frac{i}{2} \arg \mathbf{B} \right].$$

Для начальных условий (10) действительная часть матрицы $\mathbf{B}$ строго положительна ($\text{Re } \mathbf{B} > 0$), что обеспечивает абсолютную сходимость интеграла. В нашем случае в (13) появляется безразмерный аргумент квадратичной формы $\xi(\xi_x, \xi_y)$

$$\xi_x = \Delta k(x - c_{\text{gr.}x}t), \quad \xi_y = \Delta l(y - c_{\text{gr.}y}t), \quad (14)$$

определяющий отклонение от траектории пакета с волновым вектором несущей гармоники $\mathbf{k}_0$; $c_{\text{gr.}x} \equiv \omega'_k$, $c_{\text{gr.}y} \equiv \omega'_l$ в (14) — компоненты групповой скорости.

Следует отметить важные физические отличия от метода стационарной фазы: переход к характеристикам типа (14) $\xi(\xi_x, \xi_y) = 0$ обеспечивается наличием большого параметра, «бесконечно большого» времени или расстояния (см. (6)). В нашем подходе эталонных решений малость аргумента $\xi(\xi_x, \xi_y)$, определяющая отклонение от характеристики, связана с узостью спектра пакета ($\Delta k \rightarrow 0$, $\Delta l \rightarrow 0$). Явные ограничения для координат и времени в данном подходе отсутствуют. В этом смысле наш подход можно считать более общим, чем привычные асимптотические методы.

Для определителя матрицы $\mathbf{B}$ в окрестности волнового вектора несущей $\mathbf{k}_0 = (k_0, l_0)$

$$D^2 = |\det \mathbf{B}|^2 = [1 + t^2(\mu_{xy}^2 - \mu_x \mu_y)]^2 + t^2(\mu_x + \mu_y)^2, \quad (15)$$

где для производных дисперсионного соотношения использованы обозначения

$$\mu_x = (\Delta k)^2 \omega''_{kk}, \quad \mu_y = (\Delta l)^2 \omega''_{ll}, \quad \mu_{xy} = \Delta k \Delta l \omega''_{kl}.$$

Волновая функция при этом имеет вид

$$f_2(x, y, t) = \Psi_2(x, y, t) \cos [\phi(x, y, t)] \quad (16)$$

с огибающей (при $t = 0$ — гауссиана)

$$\Psi_2(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{D}} \times \exp \left\{ \frac{1}{2D^2} \left[\xi_x^2 (1 + t^2(\mu_{xy}^2 + \mu_y^2)) + \xi_y^2 (1 + t^2(\mu_{xy}^2 + \mu_x^2)) - 2\xi_x \xi_y t^2 \mu_{xy} (\mu_x + \mu_y) \right] \right\} \quad (17)$$

и фазовой функцией

$$\phi(x, y, t) = k_0 x + l_0 y - \omega(k_0, l_0)t - \theta_2(t) - \omega_2(x, y, t). \quad (18)$$

Поправка к несущей частоте $\omega(k_0, l_0)$ задается квадратичной формой

$$\omega_2(x, y, t) = 2D^{-2} \left[\xi_x^2 (t^2 \mu_y (\mu_{xy} - \mu_x \mu_y) - t \mu_x) + \xi_y^2 (t^2 \mu_x (\mu_{xy} - \mu_x \mu_y) - t \mu_y) + 2\xi_x \xi_y t \mu_{xy} (1 + t^2(\mu_{xy} - \mu_x \mu_y)) \right], \quad (19)$$

а сдвиг фазы также зависит от времени

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \arctg \left[\frac{(\mu_x + \mu_y)t}{1 + t^2(\mu_{xy} - \mu_x \mu_y)} \right]. \quad (20)$$

Решение (14)–(20) справедливо при временах $t \geq 0$, в момент $t = 0$ совпадает с (8) и описывает дисперсионное расплывание, сопровождающееся поворотом пакета конечной ширины в физическом пространстве

на некоторый угол. Легко убедиться в том, что скорость вращения пакета конечна и асимптотически стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Числитель показателя экспоненты (17) можно переписать в следующей форме:

$$C(\xi_x, \xi_y) = -t^2 [(\xi_x \mu_{xy} - \xi_y \mu_x)^2 + (\xi_y \mu_{xy} - \xi_x \mu_y)^2] - \xi_x^2 - \xi_y^2, \quad (21)$$

наглядно показывающей характер трансформации начальной (не зависящая от времени часть) формы пакета со временем. Зависящая от времени часть представляет собой эллипс с осями $\xi_x \mu_{xy} - \xi_y \mu_x = 0$, $\xi_y \mu_{xy} - \xi_x \mu_y = 0$. При больших временах она становится определяющей. Интересно, что первоначально изотропное распределение вовсе не означает отсутствия эффекта поворота пакета: при $t \rightarrow +\infty$ форма пакета определяется как его начальной шириной $(\Delta k, \Delta l)$, так и свойствами волновой дисперсии (μ_x, μ_y, μ_{xy}) . Построенное решение (16)–(20) формально не требует решения лучевых уравнений, в отличие от рассмотренных выше точечных асимптотик. Волновой вектор несущей гармоник $\mathbf{k} = (k_0, l_0)$ фиксирован, что кардинальным образом упрощает рассмотрение.

В важном частном случае $\omega''_{kl} = 0$ и изотропного дисперсионного соотношения направление групповой скорости совпадает с одной из осей эллипса. При этом поворота пакета не происходит. Матрица $\mathbf{B}$ и обратная ей $\mathbf{B}^{-1}$ диагональны, и двумерное решение (17) распадается на произведение двух одномерных диспергирующих решений

$$\Psi_2(x, y, t) = \Psi(x, t)\Psi(y, t), \quad (22)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{(1 + t^2 \mu_x^2)^{1/4}} \exp \left[\frac{(x - c_{gr.x} t)^2}{2(\Delta x)_0^2 (1 + \mu_x^2 t^2)} \right],$$

$$\Psi(y, t) = \frac{1}{(1 + t^2 \mu_y^2)^{1/4}} \exp \left[\frac{(y - c_{gr.y} t)^2}{2(\Delta y)_0^2 (1 + \mu_y^2 t^2)} \right].$$

Поправка к фазе распадается на сумму арктангенсов [8]

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= -\frac{1}{2} \arctg \left[t \frac{\mu_x + \mu_y}{1 - t^2 \mu_x \mu_y} \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\arctg(t(\Delta k)^2 \omega''_{kk}) + \arctg(t(\Delta l)^2 \omega''_{ll})]. \end{aligned} \quad (23)$$

При $t \rightarrow \infty$ (23) дает предельные значения фазы $\theta_2(\infty) = \pm \pi/2$ или 0 в зависимости от знака производных ω_{kk} , ω_{ll} . В n -мерном случае разность числа положительных и отрицательных вторых производных отвечает сигнатуре вещественной матрицы. Таким образом, для θ_2 в (23) мы имеем корректный предельный переход к асимптотике точечных пакетов. Заметим, что многомерные решения типа (22), (23) хорошо известны [9].

Качественные различия между асимптотиками точечными и для пакетов конечного размера обнаруживаются в случае выполнения условия

$$\Delta_{kl} = (\omega''_{kl})^2 - \omega''_{kk} \omega''_{ll} = 0 \quad \text{при} \quad \omega''_{kl} \neq 0. \quad (24)$$

Для точечных асимптотик эта ситуация не может быть разрешена разложением фазы в окрестности точки стационарной фазы до квадратичных членов. Разложения высшего порядка приводят к решениям в терминах функций Эйри. При рассмотрении пакетов конечного размера никакой проблемы не возникает: в показателе экспоненты огибающей $\Psi_2(x, y, t)$ старшие по времени члены сворачиваются в полный квадрат, а (23) описывает вырождение эллиптических линий постоянной фазы в прямую линию в пределе $t \rightarrow \infty$. В одном направлении размер пакета стремится к предельному значению, в перпендикулярном же бесконечно вытягивается. Решение в этом случае можно назвать *квазидиспергирующим*, поскольку дисперсионное распыление в двумерном пространстве происходит так же, как и в одномерном случае. Из (17)–(20) имеем

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x_c \sqrt{|\omega''_{ll}|} - y_c \sqrt{|\omega''_{kk}|} \operatorname{sgn}[\omega''_{kl}(\omega''_{kk} + \omega''_{ll})], \\ x_c &= x - c_{gr.x} t, \quad y_c = y - c_{gr.y} t, \\ \Psi_2(x, y, t) &= \frac{1}{D^{1/2}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{t^2 (\Delta k)^2 (\Delta l)^2 |\mu_x + \mu_y| \xi_0^2 - (\xi_x^2 + \xi_y^2)}{2D^2} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Изолинии решения (25) — эллипсы, эксцентриситет и ориентация главных осей зависят от времени. Условие (24) обеспечивает вырождение этих эллипсов в семейство параллельных прямых при $t \rightarrow +\infty$. Любое сечение пакета имеет гауссову форму, но ширина изменяется со временем по-разному: в направлении малой оси стремится к постоянному значению, по большой же оси происходит линейное по времени распыление, что и обеспечивает затухание пакета, аналогичное одномерному случаю $D^{-1/2} \sim t^{-1/2}$. Видно, что наше рассмотрение, учитывающее наипростейшим способом конечный размер волнового пакета, приводит к качественно новым эффектам (поворот пакета и изменение его формы) в сравнении с одномерным случаем. В то же время наш подход снимает затруднение, связанное с вырождением определителя (24), описывающего дисперсию точечных решений без учета высших членов асимптотических разложений.

Отметим, что для изотропного закона дисперсии $\omega(k, l) = \Omega(\varrho)$, $\varrho = (k^2 + l^2)$, условие каустики $(\omega''_{kl})^2 - \omega''_{kk} \omega''_{ll} = 0$ сводится к $\Omega'(\Omega' + 2\varrho \Omega'') = 0$ и реализуется только для линейной зависимости $\Omega = (a\varrho^{1/2} + b)$ (a, b — произвольные постоянные).

3. Пример. Пакет волн Россби конечного размера

В заключение представим пример, иллюстрирующий приведенный выше асимптотический анализ эволюции двумерных пакетов линейных волн конечного размера. Рассмотрим линейные волны Россби в океане с постоянной стратификацией, диспер-

сионное соотношение для которых имеет вид

$$\omega = \frac{-\beta k}{k^2 + l^2 + a^2}. \quad (26)$$

Здесь $\beta = 2\Omega \cos \theta_0 / R$ — градиент параметра Кориолиса в северном направлении на широте θ_0 ; R — радиус; Ω — частота вращения Земли; $a^2 = \pi^2 n^2 \Omega^2 / (N^2 H^2)$ — квадрат собственного значения краевой задачи по вертикальной координате; $N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$ — частота Брента-Вяйсяля, полагаемая постоянной; H — глубина океана; k — компонента волнового вектора в зональном, l — в меридиональном направлениях; $n = 0, 1, \dots$ — порядковый номер моды. Для баротропной моды $n = 0$ масштаб a обращается в нуль. Условие (24) вырождения волновой дисперсии точечных пакетов в терминах безразмерных волновых чисел $\tilde{k} = k/a$, $\tilde{l} = l/a$ приводит к уравнению *гиперболической лемнискаты* (частный случай лемнискаты Бута), хорошо известной в теории плоских алгебраических кривых:

$$\tilde{k}^4 + 2\tilde{k}^2\tilde{l}^2 + \tilde{l}^4 - 3\tilde{k}^2 + \tilde{l}^2 = 0. \quad (27)$$

Эта универсальная для рассматриваемого типа волн кривая показана на рис. 1, б вместе с дисперсионным соотношением (26) для бароклинных волн Россби (рис. 1, а). Видно, что интересующие нас эффекты реализуются, например, для достаточно высокочастотных волн (векторы $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$) в окрестности максимума безразмерной частоты $\tilde{\omega}_{\max} = 1/2$.

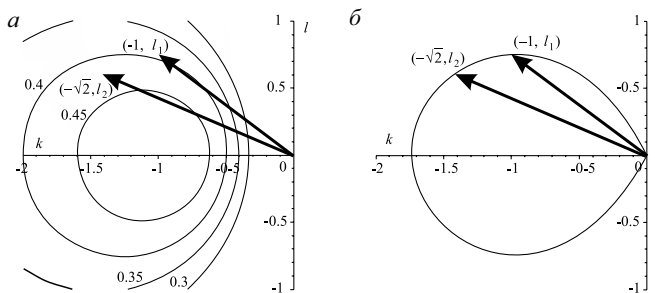


Рис. 1. а — Изочастоты дисперсионного соотношения (26) в безразмерных координатах $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}, \tilde{l})$. Показаны изочастоты $\tilde{\omega} = 0.45, 0.4, 0.35, 0.3$ и волновые векторы $\tilde{\mathbf{k}}_1 = (-1, l_1)$, $l_1 = \sqrt{\sqrt{17/4} - 3/2}$; $\tilde{\mathbf{k}}_2 = (-\sqrt{2}, l_2)$ для примеров рис. 2–4. б — Условие вырождения дисперсии (24) для дисперсионного уравнения бароклинных волн Россби (26). Показаны векторы для примеров рис. 2–4

Лемниската разбивает всю фазовое пространство волн Россби на две области. Внутри кривой (наиболее высокочастотные волны) определитель $\mathbf{B}_2$ положителен, т. е. дисперсия положительна. Внешняя область отвечает отрицательной дисперсии. Знак дисперсии принципиальным образом определяет динамику слабонелинейных диспергирующих волн [11]. В частности, формирование циклонов и антициклонов, которые часто интерпретируются как нелинейные волны Россби, естественно связать с соответствующими областями волновых чисел,

которые выделяются лемнискатой (циклоны — положительная дисперсия — внутри лемнискаты, антициклоны — отрицательная дисперсия — внешность лемнискаты). Корректное рассмотрение этого вопроса требует анализа трехмерных волн Россби, что будет сделано нами в последующих работах.

Рассмотрим эффект квазидисперсии пакета двумерных волн Россби с несущим безразмерным волновым вектором $\tilde{\mathbf{k}}_1 = (-1, [\sqrt{17/4} - 3/2]^{1/2})$. Анизотропия дисперсионного соотношения делает возможным проявление этого нетривиального эффекта даже для первоначально изотропной формы волнового пакета. На рис. 2 показаны изолинии огибающей пакета в разные моменты времени. При малых временах ($t = 1, t = 10$) эволюция сводится к медленному почти изотропному расплыванию пакета. При больших временах ($t = 100, t = 1000$) расплывание продолжается по закону близкому к линейному (внимание на масштаб осей). Расплывание сильно анизотропизуется: пакет вытягивается вдоль некоторого направления, которое асимптотически стремится к предельному на бесконечно больших временах. Очевидно, что качественно близкий эффект сильной анизотропизации первоначально симметричной формы волнового пакета будет наблюдаться и для близких волновых векторов. Иными словами, этот эффект является структурно устойчивым, грубым для конечной области пространства волновых чисел и рассматриваемого типа волн (волн Россби), а значит, физически значимым. В рамках предложенного нами подхода вопрос о структурной устойчивости решается элементарно. Заметим,

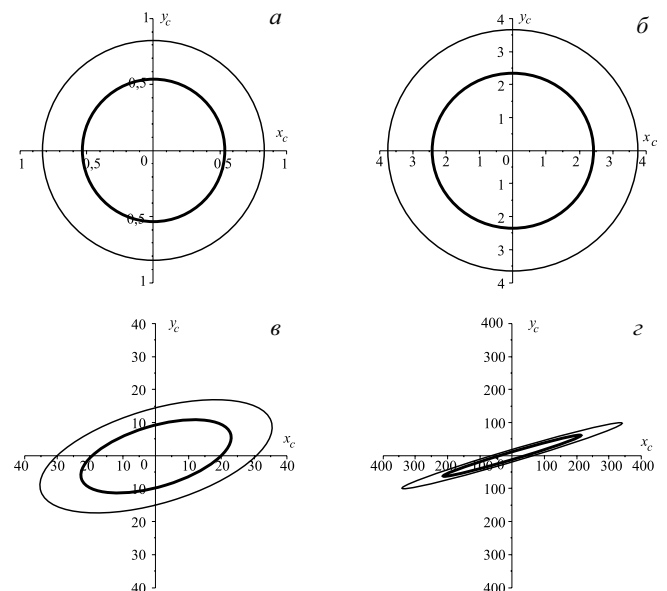


Рис. 2. Форма пакета волн Россби с безразмерным волновым вектором $\tilde{\mathbf{k}}_1 = (-1, \sqrt{\sqrt{17/4} - 3/2})$ в разные моменты времени. Изолинии отвечают уровням 0.75 и 0.5 от максимума амплитуды волны в рассматриваемый момент времени $t = 1, 10, 100, 1000$

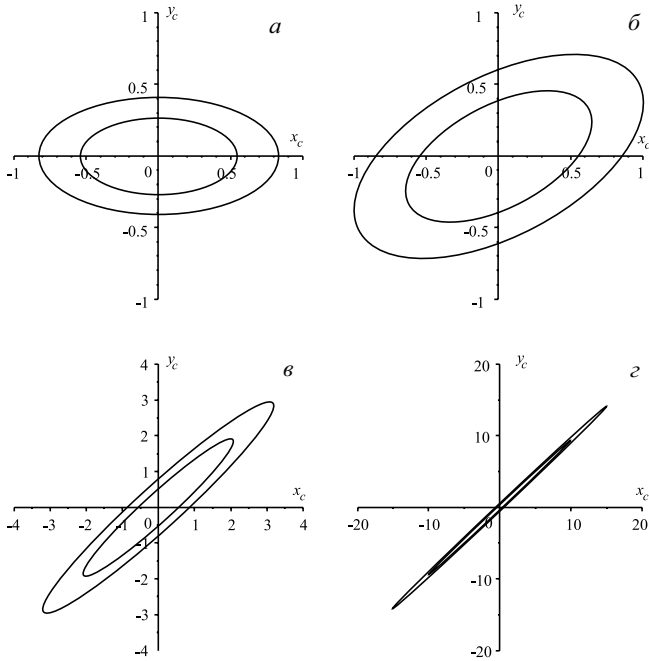


Рис. 3. Форма пакета волн Россби для безразмерного волнового вектора $\tilde{\mathbf{k}}_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{(-5 + \sqrt{33})/2})$ в разные моменты времени $t = 0, 5, 25, 125$. Изолинии отвечают уровням 0.75 и 0.5 от максимума амплитуды

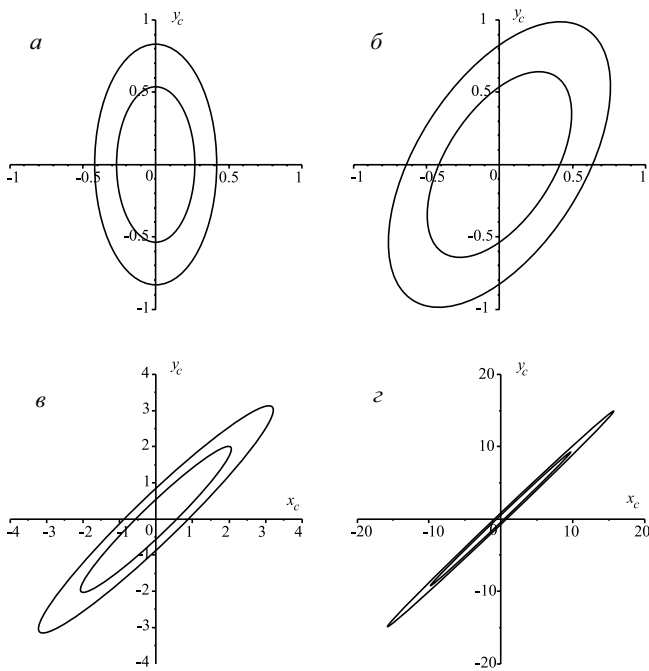


Рис. 4. Форма пакета волн Россби для безразмерного волнового вектора $\tilde{\mathbf{k}}_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{(-5 + \sqrt{33})/2})$ в разные моменты времени $t = 0, 5, 25, 125$. Начальный контур пакета ориентирован под прямым углом к таковому в случае рис. 3. Изолинии отвечают уровням 0.75 и 0.5 от максимума амплитуды

что при построении точечных асимптот волновых пакетов вблизи каустик, т. е. при рассмотрении высших приближений метода стационарной фазы, вопрос о грубости соответствующих решений во многих случаях остается открытым.

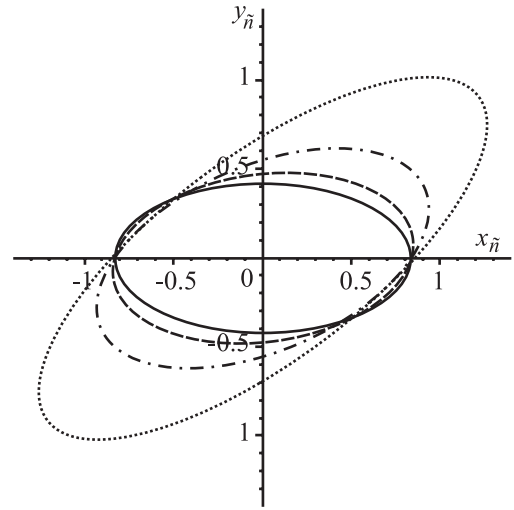


Рис. 5. Сечения волнового пакета на уровне половины максимума, отвечающие случаю рис. 3 $\tilde{\mathbf{k}}_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{(-5 + \sqrt{33})/2})$ для времен $t = 0$ — сплошная, $t = 5$ — штрих, $t = 25$ — штрихпунктир, $t = 125$ — пунктир

В завершение приведем еще две иллюстрации поведения пакета волн Россби при критическом значении безразмерного волнового вектора $\tilde{\mathbf{k}}_1 = (-2^{1/2}, [(33^{1/2} - 5)/2])$. Аналогично рис. 2 на рис. 3, 4 показаны изолинии огибающей волнового пакета в моменты $t = 0, 5, 25, 125$ для начальных распределений в виде эллипса. На рис. 3 эллипс с отношением главных осей 2 вытянут вдоль оси x и в процессе эволюции меняет свою форму и ориентацию. Эволюция происходит на существенно меньших временах, чем в случае рис. 2, причем поворот пакета происходит гораздо быстрее, чем последующее квазидисперсионное распыление. Эволюция пакета с теми же параметрами, но вытянутого вдоль оси ординат (рис. 4), происходит аналогичным образом.

Серию примеров завершим рис. 5, где показаны сечения волнового пакета на уровне половины максимума, отвечающие случаю рис. 3 для времен $t = 0, 5, 25, 125$.

Заключение

Мы рассмотрели приближенные решения для некоторых задачи распространения волн в многомерной среде с учетом конечности физического объема волновых пакетов. Нельзя рассматривать наш подход как критику хорошо разработанных асимптотических методов в теории распространения линейных волн. Известные асимптотические методы (стационарной фазы, перевала и т. п.) неявно содержат предположение о бесконечно малом объеме волнового пакета. Проблема сингулярности этих асимптотик в случае вырождения дисперсионных характеристик хорошо понята специалистами и совершенно определенно связывается именно с «точечностью» пакетов [3]. Мы вводим модуляцию

пакетов, т. е. рассматриваем пакеты конечного объема, с самого начала. В такой постановке серьезные трудности, возникающие в классических асимптотических методах, оказываются несущественными. Возможный спор о справедливости того или иного подхода сталкивается с проблемой физических реалий: насколько справедливо рассматривать пакеты как точечные в пространстве координат или же в пространстве импульсов. Для волн в океане, на наш взгляд, разрешение спора возможно на пути примирения обеих точек зрения: диапазон возможных условий настолько широк, что следует иметь в виду все физические эффекты, предсказываемые этими подходами.

Наибольший выигрыш при использовании нашего весьма грубого, рутинного подхода мы получаем в многомерном случае, где эволюция волнового пакета обретает дополнительную степень свободы — возможность изменения формы и ориентации огибающей волнового пакета. Мы считаем излишним обсуждать богатство физических эффектов, связанных с этим довольно простым фактом. Сильная анизотропия волновых движений в океане порождает множество теорий, призванных ее объяснить. Мы показываем, что одно из таких объяснений связано с *собственной кинематикой пакетов линейных диспергирующих волн*. Соответствующие примеры для волн разных типов мы планируем представить в следующих публикациях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-22-00174).

Список литературы

1. Маслов В.П. // Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
2. Федорюк М.В. // Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
3. Уизем Дж. // Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1972. (Whitham G.B. // Linear and Nonlinear Waves. Wiley, 1974.)
4. Лайтхилл Дж. // Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. (Lighthill J. // Waves in Fluids. Cambridge University Press, 1978.)
5. Беклемишев Д.В. // Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2006; 2007.
6. Погорелов А.В. // Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. (Pogorelov A.V. // Differential Geometry. 1st edition. Gronningen, The Netherlands: P. Noordhoff N.V., 1954.)
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. // Методы теории функции комплексного переменного. Изд. 5-е, испр. М.: Наука, 1987.
8. Абрамовиц М., Стиган И. // Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. (Abramowitz M., Stegun I. // Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series. 55. Tenth printing, December 1972.)
9. Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В., Талипова Т.Г., Хариш К. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. XLVI, № 7. С. 499.
10. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. Т. 2. М.: Мир, 1984. (Pedlosky G. // Geophysical Fluid Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1987.)
11. Кадомцев Б.Б. // Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.

On the asymptotics of multidimensional linear wave packets: reference solutions

V. G. Gnevyshev^{1,a}, S. I. Badulin^{1,2,b}

¹ Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences. Moscow 117997, Russia.

² Novosibirsk State University. Novosibirsk 630090, Russia.

E-mail: ^a avi9783608@gmail.com, ^b badulin@ioran.ru.

The classic problem of linear wave-packet propagation in a dispersive medium is considered. Asymptotic equations of the Cauchy problem for two-dimensional Gaussian wave packets are constructed in terms of Fourier integrals. These asymptotic solutions are regular at the caustics and describe new physical features of wave-packet propagation: rotation in space and formation of a wave front with anomalously slow dispersion (quasi-dispersive).

Keywords: linear waves, wave dispersion, method of stationary phase, method of steepest descent, saddlepoint method, wave packet dispersion.

PACS: 47.35.-i, 92.10.-H.

Received 12 September 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2017. 72, No. 4. Pp. 415–423.

Сведения об авторах

1. Гневывшев Владимир Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (499) 124-75-65, e-mail: 978-36-08@mail.ru, avi9783608@gmail.com.
2. Бадулин Сергей Ильич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, зав. лабораторией; тел.: (499) 124-75-65, e-mail: sergei.badulin@gmail.com, badulin@ioran.ru.